

Mathématiques
Devoir surveillé n°7
Mai 2026

Durée de l'épreuve : 4h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1.

Soit p un entier naturel fixé. Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$u_n = \frac{1}{\binom{n+p}{n}}.$$

1. Montrer que si $p = 0$ ou si $p = 1$ la série de terme général u_n diverge.

On suppose dans toute la suite que p est supérieur ou égal à 2 et on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k.$$

2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+p+2)u_{n+2} = (n+2)u_{n+1}.$$

- (b) En déduire par récurrence sur n que

$$S_n = \frac{1}{p-1} (1 - (n+p+1)u_{n+1})$$

3. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$v_n = (n+p)u_n.$$

- (a) Montrer que la suite (v_n) est décroissante.
(b) En déduire que la suite (v_n) converge et que sa limite ℓ est positive ou nulle.
(c) Utiliser le résultat précédent pour montrer que la série de terme général u_n converge et donner sa somme en fonction de p et de ℓ .
4. On suppose dans cette question seulement que $\ell \neq 0$.

- (a) Montrer que

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ell}{n}$$

- (b) En déduire une contradiction avec la question 3.

5. Donner la valeur de ℓ et en déduire en fonction de p , la somme de la série de terme général u_n .

Exercice 2.

Partie I

Pour tout couple (a, b) de $\mathbb{R}^2$, soit M la matrice carrée d'ordre 2 définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

1. Dans cette question, on choisit $a = b = -1$.
 - (a) La matrice M est-elle inversible ?
 - (b) Calculer pour tout entier $n \geq 2$, la matrice M^n .
2. Dans cette question, on choisit $a = b$.
 - (a) La matrice M est-elle inversible ?
 - (b) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$M^n = (1 + a)^{n-1} M$$

3. On revient au cas général où a et b sont des réels quelconques.
Montrer que la matrice M est inversible si et seulement si $a \neq b$.

Partie II

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes, on dit qu'elles sont **indépendantes** lorsque

$$\forall (i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = j).$$

Soit N la matrice aléatoire définie par :

$$N = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 1 & Y \end{pmatrix}$$

et A l'événement :

"la matrice N est inversible."

1. Dans cette question, on considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes et suivant toutes les deux la loi géométrique de paramètre p avec $0 < p < 1$. On pose $q = 1 - p$.
 - (a) i. Justifier l'égalité suivante par double inclusion :

$$[X = Y] = \bigcup_{k=1}^{+\infty} [X = k] \cap [Y = k]$$

Indication : on pourra raisonner en considérant une issue ω telle que $X(\omega) = Y(\omega)$, et introduire la valeur commune k .

- ii. En déduire la relation :

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = k)$$

- (b) Calculer $\sum_{k=1}^{\infty} p^2 q^{2k-2}$.
- (c) En déduire $\mathbb{P}(A)$ en fonction de q .
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans cette question, on considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes et suivant toutes les deux la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.
 - (a) Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \quad \text{et} \quad (x+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k$$

- (b) En utilisant l'identité $(x+1)^{2n} = (x+1)^n (x+1)^n$, montrer que l'on a :

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$$

2

(c) En déduire la relation :

$$\mathbb{P}(X = Y) = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$$

(d) Calculer $\mathbb{P}(A)$ en fonction de n .

(e) La commande `rd.binomial(n,p)` permet de simuler une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p . Recopier et compléter la fonction suivante qui prend en entrée un entier n et qui permet de déterminer si la matrice N est inversible ou non et, le cas échéant, calcule son inverse :

```
def inversible(n):
    X = ...
    Y = ...
    d = ...
    if ...:
        return "matrice non inversible"
    else:
        invN = (1/d) * np.array([...])
        return invN
```

Exercice 3.

Partie I

Dans cette partie, x désigne un réel de $[0, 1[$.

1. (a) Montrer que :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2} dt \leq \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{m+1}.$$

(b) En déduire que :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2} dt = 0.$$

2. (a) Pour tout réel t de $[0, 1[$ et pour tout k élément de $\mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j}$.

(b) En déduire que :

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt.$$

(c) Utiliser la question 1) pour montrer que la série de terme général $\frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ converge et exprimer $\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ sous forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

(d) Conclure que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt.$$

On admet sans démonstration que l'on a aussi :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{x^{2j}}{2j} = \int_0^x \frac{t^{2k+1}}{1-t^2} dt.$$

Partie II

Un joueur réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce. Cette pièce donne "pile" avec la probabilité p avec $0 < p < 1$ et "face" avec la probabilité $q = 1 - p$.

On note N la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier "pile".

Si N prend la valeur n , le joueur place n boules numérotées de 1 à n dans une urne, puis il extrait une boule au hasard de cette urne. On dit que le joueur a gagné si le numéro porté par la boule tirée est impair et on désigne par A l'événement : « le joueur gagne ». On appelle X la variable aléatoire égale au numéro porté par la boule extraite de l'urne.

1. Reconnaître la loi de N .
2. (a) La commande `np.floor` renvoie la partie entière d'un nombre. Montrer que, si m est un entier naturel, la commande `2*np.floor(m/2)` renvoie la valeur m si et seulement si m est pair.
- (b) Compléter les commandes Python suivantes pour qu'elles simulent N et X puis renvoient l'un des deux messages « le joueur a gagné » ou « le joueur a perdu ».

```
p = float(input("Donner la valeur de p: "))
N = np.random.geometric(p) # Loi géométrique
X = np.random.randint(1, N + 1) # Loi uniforme
if ...:
    print("...")
else:
    print("...")
```

3. (a) Donner, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à j , la valeur de $\mathbb{P}_{[N=2j]}(X = 2k + 1)$.
- (b) Donner, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à $j + 1$, la valeur de $\mathbb{P}_{[N=2j+1]}(X = 2k + 1)$.
- (c) Déterminer $\mathbb{P}_{(N=2j)}(X = 2k + 1)$ lorsque k appartient à $\llbracket 0, j - 1 \rrbracket$.
- (d) Déterminer $\mathbb{P}_{(N=2j+1)}(X = 2k + 1)$ lorsque k appartient à $\llbracket 0, j \rrbracket$.
4. (a) Justifier que

$$\mathbb{P}(X = 2k + 1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n) \mathbb{P}_{[N=n]}(X = 2k + 1).$$

En admettant que l'on peut scinder la somme précédente selon la parité de n , montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = 2k + 1) = \frac{p}{q} \left(\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{q^{2j}}{2j} + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{q^{2j+1}}{2j+1} \right).$$

- (b) En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = 2k + 1) = \frac{p}{q} \int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t} dt.$$

5. (a) Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)} dt = 0.$$

- (b) Montrer que

$$\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = 2k + 1) = \frac{p}{q} \left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)} dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)} dt \right).$$

- (c) En déduire que :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{p}{q} \int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)} dt$$

6. (a) Trouver trois constantes réelles a , b et c telles que, pour tout t différent de 1 et de -1, on ait :

$$\frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1-t)^2}.$$

- (b) Écrire $\mathbb{P}(A)$ explicitement en fonction de q .

- (c) En déduire que $\mathbb{P}(A) > \frac{1}{2}$.