

Variables aléatoires

1 Variable aléatoire

Définition : variable aléatoire

On considère une expérience aléatoire et on note son univers Ω .

On appelle **variable aléatoire** une fonction définie sur Ω qui, à chaque issue de cette expérience aléatoire, associe un nombre de l'intervalle $[0; 1]$.

Cette fonction est souvent notée X .

On note alors $\{X = a\}$ l'ensemble des issues auxquelles on associe la valeur a . La probabilité que cette issue se réalise est donc notée $P(X = a)$.

On note $\{X < a\}$ l'ensemble des issues auxquelles on associe une valeur inférieure à a .

Exemple

On dispose des tickets sur une table. Il y a 20 tickets au total. Il y a trois tickets qui permettent de gagner 2€, il y en a 10 qui permettent de gagner 1€. Les autres sont perdants.

Jean-Kevin pioche un de ces tickets au hasard.

On note X la variable aléatoire associée au gain de cette expérience. X peut prendre la valeur 0 ou 1 ou 2.

On a $P(X = 0) = \frac{7}{20}$: c'est la probabilité que Jean-Kevin pioche un ticket perdant.

$$P(X = 1) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \text{ et } P(X = 2) = \frac{3}{20}.$$

$P(X < 2) = \frac{17}{20}$. C'est la probabilité de gagner moins de 2€ en piochant un de ces tickets.

Définition : loi de probabilité

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit X une variable aléatoire prenant des valeurs x_i pour $i \in [0; n]$.

On note $P(X = x_i)$ la probabilité de l'ensemble des issues ayant pour image x_i par X .

On appelle **loi de probabilité de X** l'ensemble des $P(X = x_i)$.

Exemple

Si on reprend l'exemple précédent, la loi de probabilité de X peut être représentée par le tableau ci-contre :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{7}{20}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{20}$

Définition : espérance

On considère une variable aléatoire X dont on donne ci-dessous la loi de probabilité :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(x = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

On appelle **espérance** de la variable aléatoire X le nombre noté $E(X)$ ou \bar{X} définie par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \times p_i = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \dots + x_n \times p_n$$

Il s'agit de la moyenne des valeurs x_i pondérées par leurs probabilités p_i .

Exemple

On reprend l'exemple précédent des tickets et on souhaite déterminer $E(X)$.

$$E(X) = 0 \times \frac{7}{20} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{20} = \frac{4}{5}$$

Remarque

Lorsqu'il s'agit d'un jeu, celui-ci est favorable au joueur si son espérance est un nombre positif et défavorable si son espérance est un nombre négatif.

Dans l'exemple précédent, le gain moyen est donc de 0,80€.

Définition

Quand l'espérance d'une expérience aléatoire vaut 0 on dit qu'elle est **équitable**.

2 Loi de Bernoulli**Définition : épreuve de Bernoulli**

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui admet exactement deux issues.

La première est nommée **succès**, notée S, de probabilité notée $p \in [0; 1]$. La seconde est nommée **échec**, notée E ou \bar{S} , de probabilité $1 - p$.

Exemple

On lance une pièce de monnaie et on note S : « Obtenir pile » et E : « Obtenir face ».

Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli.

Définition : Loi de Bernoulli

Soit X une variable aléatoire associée à une épreuve de Bernoulli prenant la valeur 1 pour un succès et 0 pour un échec. On note p la probabilité du succès.

On dit que X est une **variable de Bernoulli** de paramètre p ou que X suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p .

La loi de probabilité suivie par X est la suivante :

x_1	0	1
$p(X = x_i)$	$1 - p$	p

Propriété

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p .

L'espérance $E(X)$ est alors :

$$E(X) = p$$

Exemple

Jean-Kevin joue à un jeu. Il lance un dé cubique non truqué numéroté de 1 à 6. S'il obtient 5, il gagne. Sinon, il perd.

On note X la variable aléatoire associée à cette épreuve de Bernoulli. Le succès S est « Obtenir la face portant le numéro 5 » a une probabilité de réalisation de $\frac{1}{6}$.

On a donc $p = \frac{1}{6}$ et $1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. La loi de probabilité de X est donc :

x_1	0	1
$p(X = x_i)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

L'espérance de cette variable aléatoire X est $E(X) = p = \frac{1}{6}$.

Cela signifie que la probabilité que Jean-Kevin gagne est de $\frac{1}{6}$.

Variables aléatoires

> Utiliser une loi de probabilité

Exercice n°1 On considère une variable aléatoire X dont on donne la loi de probabilité ci-dessous.

1. Quelle est la probabilité que la variable aléatoire X prenne la valeur 14 ?
2. Quelle est, en pourcentage, la probabilité que la variable aléatoire X prenne la valeur 12 ?
3. Déterminer $P(X > 12)$.
4. Déterminer $P(X \leq 12)$.

x_i	10	11	12	13	14
$P(X = x_i)$	0,4	0,1	0,05	0,15	0,3

Exercice n°2 On lance un dé cubique non truqué.

Si on tombe sur un nombre pair, on perd 3€. Si on obtient le 3 ou le 5, on ne gagne rien et on ne perd rien. Si on obtient le 6, on gagne 2€.

On note X la variable aléatoire associée au gain de cette expérience aléatoire.

1. Recopier et compléter la loi de probabilité de X ci-dessous :

Gain x_i	-3	0	2
$P(X = x_i)$			

2. À quoi correspond l'évènement $\{X = 0\}$?
3. Déterminer $P(X = 0)$.
4. À quoi correspond l'évènement $\{X \geq 0\}$?
5. Déterminer $P(X \geq 0)$.

Exercice n°3

Dans un restaurant, un menu rapide est proposé aux clients qui choisissent une entrée et un plat parmi deux propositions à chaque fois :

- Entrée : Salade composée (3€) ou Assiette de charcuterie (5€)
- Plat : Steak-frites (7€) ou Cabillaud-riz (9€)

On choisit un client au hasard parmi ceux qui ont pris ce menu rapide dans ce restaurant et on note T la variable aléatoire correspondant au prix total payé par ce client pour son repas.

1. Quelles sont toutes les valeurs que peut prendre T ?
2. À l'aide d'un tableau, déterminer la loi de probabilité de T .
3. Que signifie $\{T = 10\}$? Que vaut $P(T = 10)$?
4. Quelle est la probabilité que le client ait payé 12€ pour son menu rapide ?
5. Déterminer $P(T \leq 12)$ et interpréter le résultat obtenu.

> Calculer et interpréter l'espérance d'une variable aléatoire

Exercice n°4

Un magasin décide de distribuer des bons d'achats cachés dans une enveloppe. Un client choisit alors une enveloppe au hasard et gagne un montant de 5€ ou 10€ ou 50€ ou 100€.

On note Y la variable aléatoire associée au gain du client dont on donne la loi de probabilité ci-dessous.

1. Quelle est, en pourcentage, la probabilité qu'un client gagne 100€ ?
2. Calculer $P(Y < 50)$.
3. Calculer l'espérance $E(Y)$ et interpréter le résultat.

y_i	5	10	50	100
$P(Y = y_i)$	0,4	0,3	0,2	0,1

Exercice n°5

Une urne contient 10 boules rouges, six boules bleues et une boule verte, indiscernables au toucher.

Un jeu consiste à tirer une boule dans l'urne : si la boule tirée est verte, on gagne 10€. Si elle est bleue, on gagne 5€. Si elle est rouge, on ne gagne rien. Pour jouer à ce jeu, on doit payer 5€.

On note X la variable aléatoire associée au gain algébrique d'un joueur, en euros.

1. Déterminer la loi de probabilité de X .
2. Calculer $P(X \geq 0)$ et interpréter le résultat obtenu.
3. (a) Calculer l'espérance de X .
- (b) Que peut-on prédire à un joueur, si celui-ci décide de jouer un très grand nombre de fois à ce jeu ?

Exercice n°6

Entre le 6 Octobre 2008 et le 21 mai 2014, il y a eu 881 tirages de Loto. On donne ci-dessous le nombre de tirages en fonction du nombre de gagnants au rang 1 sur cette période.

Nombre de gagnants au rang 1	0	1	2	3
Nombre de tirages	689	157	29	6

Source : la Française des jeux

On choisit au hasard un tirage du loto de cette période et on appelle X la variable aléatoire donnant le nombre de gagnants au rang 1 à ce tirage.

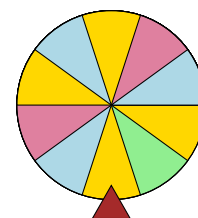
1. Déterminer la loi de probabilité de X .
2. Calculer l'espérance de X et interpréter ce résultat.

Exercice n°7

La roue de loterie ci-contre est constituée de dix secteurs de même taille. Si la flèche s'arrête sur un secteur vert, on gagne 50€. Si elle s'arrête sur un secteur rose, il gagne 10€. Si c'est sur un secteur bleu, on gagne 1€.

Sinon, on ne gagne rien. On note X la variable aléatoire associée au gain d'un joueur qui lance cette roue.

1. Déterminer la loi de probabilité de X .
2. Calculer l'espérance de X . Le jeu est-il équitable ?
3. L'organisateur du jeu prévoit de faire payer la participation à 5€. Qu'en pensez-vous ?
4. Quel prix du billet doit-on fixer pour que le jeu soit équitable ?



> Reconnaître une loi de Bernoulli

Exercice n°8

Jean-Kevin lance un dé cubique non truqué. S'il obtient 5, il gagne. Sinon, il perd. On note X la variable aléatoire associée à cette épreuve.

1. Montrer que X suit une loi de Bernoulli. Déterminer le succès et l'échec.
2. Quelle est l'espérance de X ? Interpréter ce résultat.

Exercice n°9

On dispose d'une urne dans laquelle il y a 200 tickets dont 6 tickets gagnants pour un voyage. On pioche un ticket au hasard dans cette urne.

On note X la variable aléatoire associée à cette expérience aléatoire.

1. Montrer que X suit une loi de Bernoulli dont on donnera les paramètres.
2. Déterminer la loi de probabilité de X .
3. Quelle est la probabilité de tomber sur un ticket gagnant?

Exercice n°10

Une usine fabrique des vis. Après plusieurs analyses internes, il s'avère que 5% des vis sont défectueuses.

On prélève une vis au hasard parmi celles fabriquées à la fin d'une journée. On note X la variable aléatoire qui prend la valeur 0 si la vis est défectueuse et qui prend la valeur 1 sinon.

1. Établir la loi de probabilité de X .
2. Quelle est la loi suivie par X ? Donner son paramètre.

Exercice n°11 On considère le programme Python suivant :

```

1 from random import*
2 def jeu():
3     if random()<0.2:
4         return(1)
5     else:
6         return(0)

```

1. Que permet de réaliser ce programme?
2. On note X la variable aléatoire associée à la valeur de sortie du programme. Quelle est la loi suivie par X ?
3. Quelle est la probabilité que le programme retourne 0? Donner la réponse sous forme décimale puis sous forme fractionnaire et enfin sous forme d'un pourcentage.

Exercice n°12 On considère le programme Python suivant :

1. Que permet de réaliser ce programme?
2. On note X la variable aléatoire associée à la valeur de sortie du programme. Quelle est la loi suivie par X ?
3. Quelle est la probabilité que le programme retourne 0? Donner la réponse sous forme décimale puis sous forme fractionnaire et enfin sous forme d'un pourcentage.

```

1 from random import*
2 def jeu():
3     m=randint(1,6)
4     if m==5:
5         return(1)
6     else:
7         return(0)

```