

Polynômes

Définition d'un polynôme

Exercice 1

- Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer l'existence d'un unique couple de polynômes (R_1, R_2) tel que $P = R_1(X^2) + XR_2(X^2)$.
- Soient P et Q deux polynômes tels que $P(X)^2 = Q(X^2)$. Montrer qu'il existe $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = R(X^2)$ ou $P = XR(X^2)$.

Exercice 2

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(X^2) = (X^3 + 1)P(X)$.

Exercice 3

Soit P un polynôme. Montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.

Division euclidienne

Exercice 4

Soit $B \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non nul de degré $n > 0$. À tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ on fait correspondre le quotient Q et le reste R de la division euclidienne de P par B (ainsi $P = BQ + R$) et on définit les applications

$$\phi : \begin{pmatrix} \mathbb{R}[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_{n-1}[X] \\ P & \mapsto & R \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \psi : \begin{pmatrix} \mathbb{R}[X] & \rightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & Q \end{pmatrix}$$

- Montrer que ϕ et ψ sont des applications linéaires, puis chercher leurs noyaux et leurs images.
- Montrer que pour tout $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$, $\phi(P_1 P_2) = \phi(\phi(P_1)\phi(P_2))$.

Exercice 5

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $P_n = 1 + X^n + X^{2n} + X^{3n} + X^{4n}$.

- Déterminer les racines complexes de P_1 .
- Pour quelles valeurs de n le polynôme P_1 divise-t-il P_n ?

Racines et factorisation

Exercice 6

- Factoriser en éléments irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $X^n + 1$.
- En déduire la factorisation en éléments irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ du polynôme $X^n + 1$ (on distinguera deux cas suivant la parité de n).

Exercice 7

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1 tel que P' divise P .

Exercice 8

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme réel.

- Montrer que si $a \in \mathbb{R}$ est racine d'ordre $m \geq 1$ de P alors a est racine de P' d'ordre $m - 1$.
- Montrer que si P est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$ alors P' l'est aussi (utiliser le théorème de Rolle).
- Montrer que si P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ alors P' l'est aussi.

Familles de polynômes

Exercice 9

On considère la fonction $f : x \mapsto \arctan(x)$.

- a. Montrer l'existence d'une unique famille de polynômes (P_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}.$$

- b. Préciser le degré et le coefficient dominant de P_n .

Exercice 10

On définit une suite de polynômes (T_n) en posant :

$$T_0 = 1 \quad T_1 = X \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

- a. Déterminer le degré, le coefficient dominant et le coefficient constant de T_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n a la même parité que n .
c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$, et justifier que T_n est l'unique polynôme vérifiant cette relation.
d. Déterminer les racines de T_n dans $[-1, 1]$, et en déduire que T_n est un polynôme scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.
e. Montrer que $(X^2 - 1)T_n'' + XT_n' - n^2T_n = 0$ (on pourra dériver deux fois la relation obtenue à la question c)

Exercice 11

On définit une suite de polynômes (P_n) à l'aide des relations :

$$P_0 = 0, \quad P_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$$

- a. Calculer les polynômes P_n pour $2 \leq n \leq 5$.
b. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le degré et le coefficient dominant de P_n .
c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le polynôme P_n a même parité que $n - 1$.
d. Déterminer $P_n(0)$ (on distinguera deux cas suivant la parité de n).
e. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\sin(n\theta) = \sin(\theta)P_n(2\cos \theta)$.
f. Montrer que pour tout $n \geq 1$ le polynôme P_n est scindé à racines simples (on déterminera ses racines).
g. En déduire pour $n \geq 1$ la valeur de $\prod_{k=1}^{n-1} \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

On appelle *suite de Fibonacci* la suite (f_n) définie par les relations :

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

- h. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(i) = i^{n-1}f_n$ et en déduire, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, que $f_n^2 = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + 4\cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$.