

Trigonométrie – Fiche de cours

1. Le cercle trigonométrique, radian et mesure principale

Le cercle trigonométrique a pour centre l'origine du repère et pour rayon 1

Le radian est une unité d'angle avec $\pi (rd) = 180^\circ$

La mesure principale d'un angle α est définie par $\alpha \in]-\pi; \pi]$

2. Cosinus et sinus d'un réel

Un point M sur le cercle a pour coordonnées $M(\cos x; \sin x)$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

3. Formules de trigonométrie

a. Ligne trigonométrique

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$$

b. Angles associés

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

4. Equations trigonométriques

a. $\cos x = \cos a$

Cas 1: $x_1 = a + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

Cas 2: $x_2 = -a + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

b. $\sin x = \sin a$

Cas 1: $x_1 = a + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

Cas 2: $x_2 = \pi - a + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

5. Fonction cosinus

a. Définition et propriétés

$\cos x$ est l'abscisse d'un point M situé sur le cercle trigonométrique

- **domaine de définition**: $\cos x$ est définie $\forall x \in \mathbb{R}$

- **propriété**: $\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq \cos x \leq 1$

- **périodicité**: $\cos x = \cos(x + 2\pi)$ fonction 2π -périodique

- **parité**: $\cos x = \cos(-x)$ fonction paire

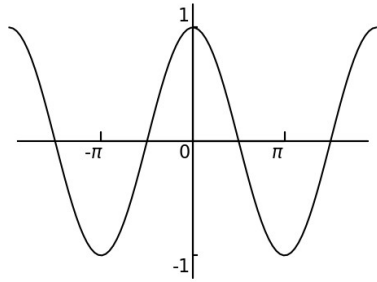
- **signe**: $\cos x \geq 0$ pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

b. Tableau de variations

Etude réduite à $x \in [0; \pi]$ car $\cos x$ fonction paire et 2π -périodique

x	0	π
$f(x) = \cos(x)$	1	-1

c. Représentation graphique



6. Fonction sinus

a. Définition et propriétés

$\sin x$ est l'ordonnée d'un point M situé sur le cercle trigonométrique

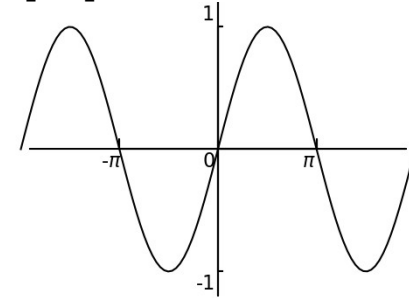
- **domaine de définition**: $\sin x$ est définie $\forall x \in \mathbb{R}$
- **propriété**: $\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq \sin x \leq 1$
- **périodicité**: $\sin x = \sin(x + 2\pi)$ fonction 2π -périodique
- **parité**: $\sin x = -\sin(-x)$ fonction impaire
- **signe**: $\sin x \geq 0$ pour $x \in [0; \pi]$

b. Tableau de variations

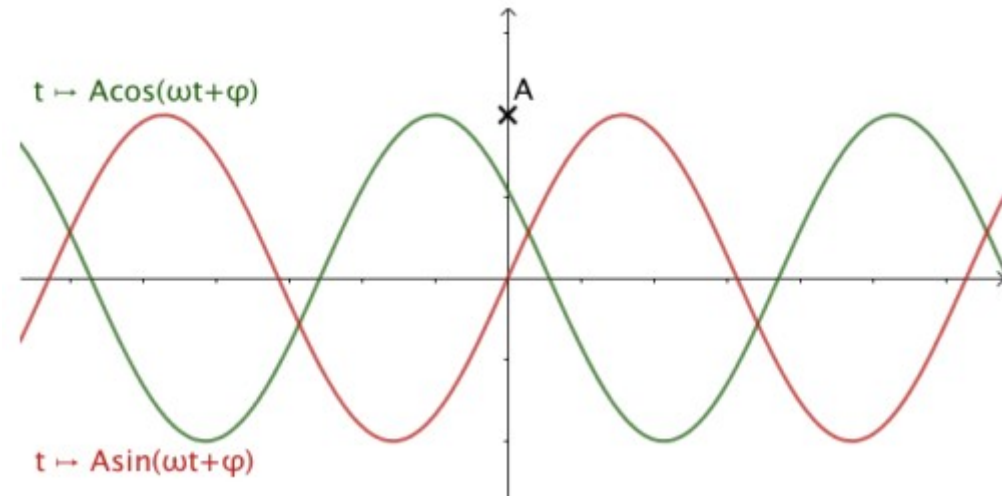
Etude réduite à $x \in [0; \pi]$ car $\sin x$ fonction impaire et 2π -périodique

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f(x) = \sin(x)$	-1	1	-1

c. Représentation graphique



7. Fonctions trigonométriques $A \cdot \cos(\omega t + \phi)$ et $A \cdot \sin(\omega t + \phi)$



Les fonctions trigonométriques $A \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)$ et $A \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi)$ sont caractérisées par :

- A amplitude (unité en V, m ou s)
- $\omega = 2\pi \cdot f$ pulsation en rad/s
- ϕ déphasage en rad (lié à un retard) de l'onde

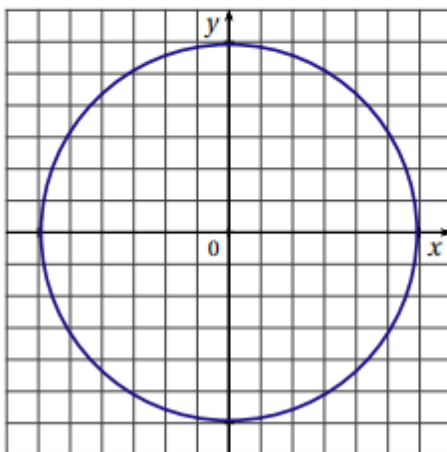
Trigonométrie – Exercices – Devoirs

Exercice 1 corrigé disponible

- Placer sur le cercle trigonométrique les points A, B, C et D repérés respectivement par les réels

$$-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3} \text{ et } \frac{3\pi}{4}.$$

- Donner les coordonnées des quatre points A, B, C et D .



Exercice 2 corrigé disponible

Écrire plus simplement les expressions suivantes :

- $A = \sin(x - \pi) + \sin(5\pi - x) + \sin(x - 3\pi)$
- $B = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

Exercice 3 corrigé disponible

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

- $\sin t + \sin \frac{\pi}{3} = 0.$
- $\cos\left(t + \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{4}.$

Exercice 4 corrigé disponible

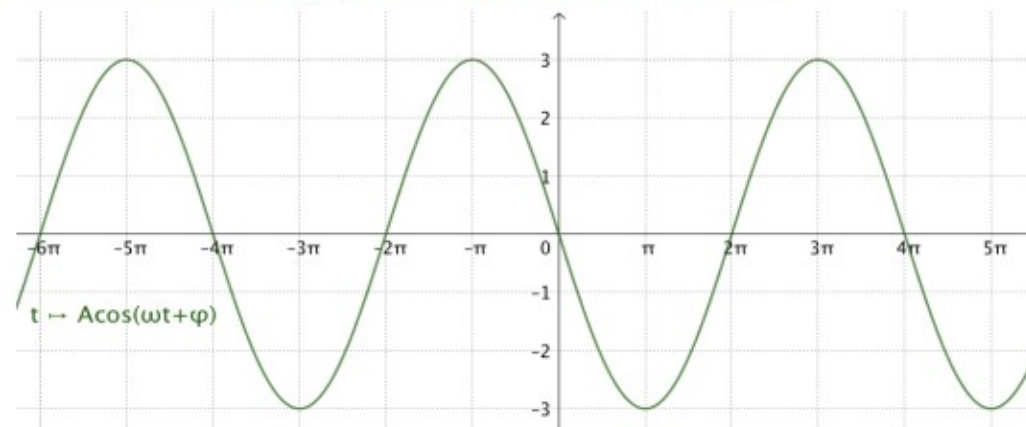
Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle donné.

- $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $x \in]-\pi; \pi]$.
- $2\cos^2 x - 1 = 0$ et $x \in]-\pi; \pi]$.

Exercice 5 corrigé disponible

On a représenté ci-dessous la courbe d'une fonction sinusoïdale f du type :
 $t \mapsto A\cos(\omega t + \varphi)$

Déterminer à l'aide du graphique l'expression de la fonction f .



Exercice 6 corrigé disponible

Placer sur un cercle trigonométrique les points A, B, C et D repérés par les réels suivants :

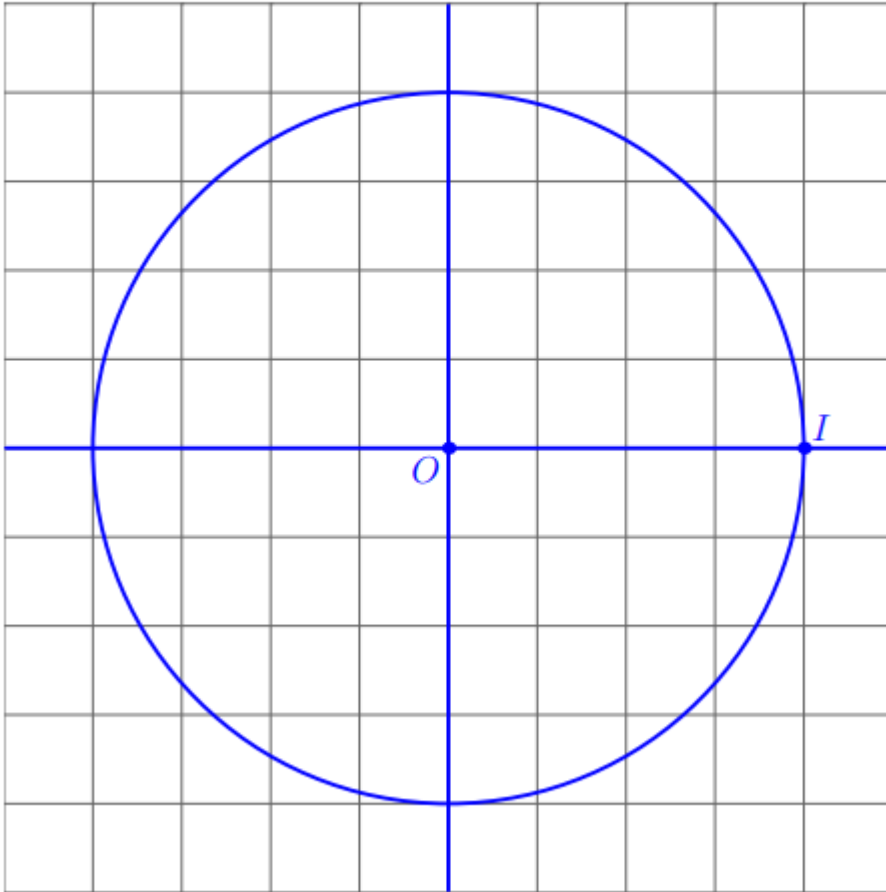
$$\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; -\frac{3\pi}{4}; \frac{10\pi}{3}$$

Déterminer le sinus et le cosinus de chacun de ces angles

Exercice 7 corrigé disponible

Placer les points suivants sur le cercle trigonométrique

$$A\left(-\frac{\pi}{3}\right); \quad B\left(-\frac{5\pi}{6}\right); \quad C\left(\frac{2\pi}{3}\right); \quad D(\pi); \quad E\left(-\frac{\pi}{4}\right) \text{ et } J\left(\frac{\pi}{2}\right).$$



Exercice 8 corrigé disponible

Les fonctions suivantes sont-elles paires, impaires ou ni l'un ni l'autre ?

- $f_1(x) = \sin(3x)$.
- $f_2(x) = -2 \cos(x)$.
- $f_3(x) = 7x \sin(4x)$.
- $f_4(x) = 3 \cos(x) + 1$.

Exercice 9 corrigé disponible

Montrer que les fonctions suivantes sont 2π -périodiques.

- $f_1(x) = \sin(x) + 1$.
- $f_2(x) = -2 \cos(x) + 1$.
- $f_3(x) = \sin^2(x) + 1$.
- $f_4(x) = \cos^2(x) + 2 \sin(x) + 1$.

Exercice 10 corrigé disponible

Compléter avec $\cos x$, $\sin x$, $-\cos x$ ou $-\sin x$:

$$\cos(-x) = \dots$$

$$\sin(-x) = \dots$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \dots$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \dots$$

$$\cos(\pi + x) = \dots$$

$$\sin(\pi + x) = \dots$$

$$\cos(\pi - x) = \dots$$

$$\sin(\pi - x) = \dots$$

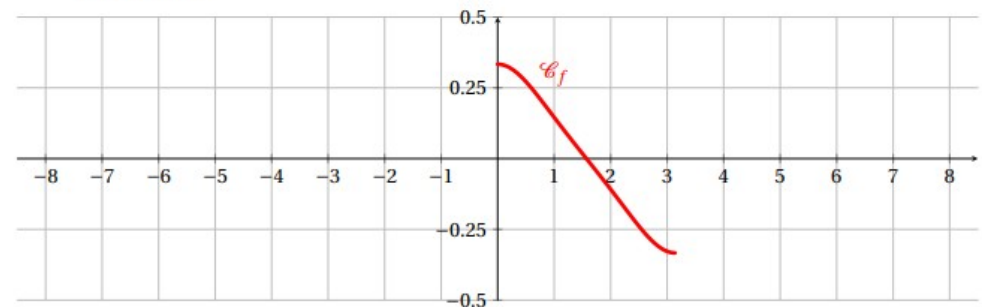
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \dots$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \dots$$

Exercice 11 corrigé disponible

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{\cos(x)}{3 + \sin^2(x)}$.

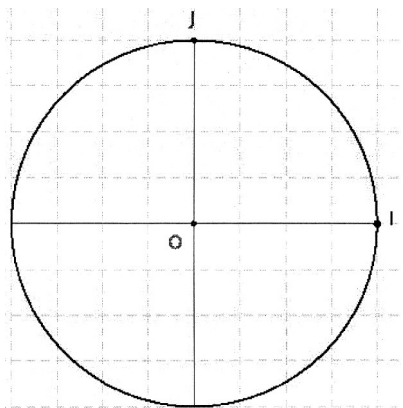
- Montrer que f est paire. Interpréter graphiquement.
- Montrer que f est périodique de période 2π . Interpréter graphiquement.
- En déduire le plus petit intervalle I possible pour étudier f .
- Ci-dessous, on donne \mathcal{C}_f la représentation graphique de f sur I . Compléter sa représentation graphique sur \mathbb{R} .



Exercice 12 corrigé disponible

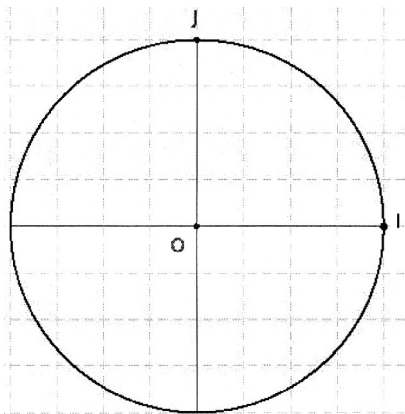
1. Placer sur le cercle trigonométrique les points représentatifs des réels suivants :

$$\frac{2\pi}{3} ; -\frac{3\pi}{4} ; \frac{17\pi}{6} ; \frac{5\pi}{2}$$



2. Déterminer la mesure principale des angles puis les placer sur le cercle trigonométrique

$$\frac{23\pi}{4} ; -\frac{20\pi}{3} ; \frac{37\pi}{8} ; -\frac{41\pi}{6}$$



Exercice 13 corrigé disponible

Résoudre les équations suivantes :
Sur $] -\pi ; \pi]$

1. $\cos x = \frac{1}{2}$

2. $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. $\cos x = \cos \frac{2\pi}{3}$

4. $\cos^2 x = \frac{3}{4}$

Exercice 14 corrigé disponible

1. Résoudre dans $] -\pi ; \pi]$:

(a) $\cos x = \cos \left(\frac{-\pi}{4} \right)$; (b) $\sin x = \sin \frac{2\pi}{3}$

2. Résoudre dans $] -\pi ; \pi]$:

(a) $\cos x = \cos \left(\frac{-3\pi}{4} \right)$; (b) $\sin x = \sin \frac{4\pi}{3}$

Exercice 15 corrigé disponible

Compléter :

Degrés	0	30	45	60	90	135	180	360
Radians	0							

Degrés	1		-15	20	270		
Radians		1				$\frac{167\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{3}$

Exercice 16 corrigé disponible

Déterminer la mesure principale des angles orientés suivants :

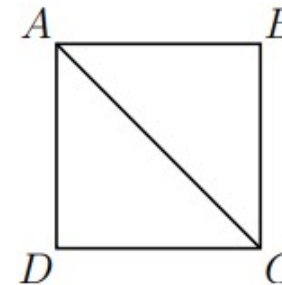
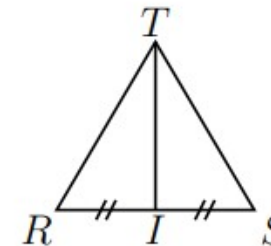
- a) $\frac{7\pi}{3}$ b) $-\frac{11\pi}{6}$ c) $\frac{9\pi}{8}$ d) $\frac{15\pi}{2}$
 e) $\frac{26\pi}{4}$ f) $-\frac{13\pi}{5}$

Exercice 17 corrigé disponibleL'évolution de la population P d'animaux dans une forêt est modélisée par :

$$P(t) = 500 + 50 \sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$

où t est exprimé en années.

- Calculer $P(0)$, $P\left(\frac{1}{2}\right)$ et $P(1)$.
- Quelle est la période de la fonction P ?
- Pour quelle valeur de t , la population est-elle à son maximum dans la première année? Quelle est la population maximum?

Exercice 18 corrigé disponible $ABCD$ est un carré de côté 1.Calculer la longueur AC , puis en déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{4}$ et $\sin \frac{\pi}{4}$.**Exercice 19** corrigé disponible RST est un triangle équilatéral de côté 1.Calculer la longueur TI , en déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{6}$, $\sin \frac{\pi}{6}$, $\cos \frac{\pi}{3}$ et $\sin \frac{\pi}{3}$.

Exercice 20 corrigé disponible

Résoudre les équations sur $]-\pi; \pi]$:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & \text{b) } \sin x = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \text{c) } \cos t = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \\ \text{d) } \sin t = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) & \text{e) } \cos x = 0 & \text{f) } \cos x = \frac{1}{2} \\ \text{g) } \sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{h) } \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & \end{array}$$

Exercice 21 corrigé disponible

À l'aide du cercle trigonométrique ci-dessous, compléter les valeurs des cosinus et sinus.

$$\begin{array}{llll} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = & \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = & \cos(0) = & \sin(2\pi) = \\ \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = & \cos(-3\pi) = & \cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = & \sin\left(\frac{13\pi}{4}\right) = \\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = & \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = & \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = & \\ \sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = & \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = & \cos(8\pi) = & \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = & \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = & \sin\left(\frac{10\pi}{2}\right) = & \end{array}$$

Exercice 22 corrigé disponible

1. Convertir les mesures suivantes en radian.

$$\begin{array}{lll} \text{(a) } x_1 = 45^\circ & \text{(c) } x_3 = 90^\circ & \text{(e) } x_5 = 120^\circ \\ \text{(b) } x_2 = 135^\circ & \text{(d) } x_4 = 300^\circ & \text{(f) } x_6 = 150^\circ \end{array}$$

2. Convertir les mesures suivantes en degrés.

$$\begin{array}{lll} \text{(a) } x_1 = \frac{\pi}{5} \text{ rad} & \text{(c) } x_3 = \frac{5\pi}{3} \text{ rad} & \text{(e) } x_5 = \frac{5\pi}{12} \text{ rad} \\ \text{(b) } x_2 = \frac{3\pi}{2} \text{ rad} & \text{(d) } x_4 = \frac{\pi}{6} \text{ rad} & \text{(f) } x_6 = \frac{4\pi}{5} \text{ rad} \end{array}$$

Exercice 23 corrigé disponible

Déterminer la mesure principale des angles suivants, puis représenter le point correspondant sur le cercle trigonométrique :

$$\begin{array}{lll} \text{(a) } \frac{15\pi}{2} & \text{(e) } \frac{151\pi}{3} & \text{(i) } \frac{77\pi}{6} \\ \text{(b) } -\frac{9\pi}{4} & \text{(f) } \frac{101\pi}{6} & \text{(j) } -\frac{41\pi}{6} \\ \text{(c) } 152\pi & \text{(g) } -\frac{333\pi}{4} & \text{(k) } \frac{253\pi}{4} \\ \text{(d) } -\frac{59\pi}{3} & \text{(h) } -\frac{47\pi}{2} & \text{(l) } \frac{2023\pi}{6} \end{array}$$

Exercice 24 corrigé disponible

Résoudre les équations trigonométriques suivantes sur $]-\pi; \pi]$:

- $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$
- $\sin(\pi - x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos^2 x = \frac{1}{4}$
- $\sin x = \frac{1}{2}$

Exercice 25 corrigé disponible

Simplifier les expressions suivantes :

$$1) A = \cos(0) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos(\pi)$$

$$2) B = \cos(-\pi) + \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$3) C = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin(\pi)$$

Exercice 26 corrigé disponible

Résoudre les équations trigonométriques suivantes sur $]-\pi; \pi]$:

$$1) \cos(x) = \cos\left(\frac{8\pi}{2}\right)$$

$$2) \sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

$$3) \cos(x) = -\cos(x)$$