MATHÉMATIQUES

18

Fiabilité

BTS | Mathématiques | Groupement C1

Objectifs du chapitre

- Connaître et utiliser les indicateurs de fiabilité : $R(t)$, $\lambda(t)$, MTBF, MTTF, MTTR
- Appliquer la loi exponentielle et ses propriétés (sans mémoire, taux constant)
- Utiliser la loi de Weibull pour modéliser les différentes périodes de vie d'un composant
- Calculer la fiabilité de systèmes en série, en parallèle et mixtes
- Construire et interpréter un tableau AMDEC et calculer la criticité
- Analyser la défaillance d'un système par arbre de défaillances
- Calculer la disponibilité d'un équipement à partir du MTBF et du MTTR
- Choisir une stratégie de maintenance adaptée à un contexte industriel

Situation professionnelle

Sophie est ingénieure de maintenance dans une entreprise de génie climatique industriel. Elle est chargée d'analyser la fiabilité d'une centrale de traitement d'air (CTA) composée de plusieurs sous-systèmes : compresseur, échangeur thermique, ventilateur et système de régulation. À partir des historiques de pannes sur les cinq dernières années, Sophie doit : évaluer la fiabilité de chaque composant, déterminer la configuration série/parallèle du système, construire le tableau AMDEC pour identifier les points critiques et proposer un plan de maintenance préventive adapté.

1. Définitions fondamentales

Fiabilité $R(t)$ La **fiabilité** d'un composant est la probabilité qu'il fonctionne correctement jusqu'à l'instant t, sans défaillance, dans ses conditions nominales d'utilisation :

$$R(t) = P(T > t)$$

où T est la variable aléatoire « durée de vie » du composant. On a toujours $0 \leq R(t) \leq 1$, $R(0) = 1$ et $\lim_{t \to +\infty} R(t) = 0$.

Taux de défaillance $\lambda(t)$ Le **taux de défaillance** (ou taux de hasard) est la probabilité instantanée de défaillance sachant que le composant fonctionnait jusqu'à l'instant t :

$$\lambda(t) = -\frac{R'(t)}{R(t)}$$

Il s'exprime en défaillances par unité de temps (ex. : pannes/heure, pannes/année). On peut aussi écrire : $R(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(u)\,\mathrm{d}u\right)$.

MTBF, MTTF, MTTR

- **MTBF** (Mean Time Between Failures) — temps moyen entre deux défaillances d'un composant réparable :

$$\mathrm{MTBF} = \int_0^{+\infty} R(t)\,\mathrm{d}t$$

- **MTTF** (Mean Time To Failure) — même formule, employé pour les composants non réparables (durée de vie moyenne).
- **MTTR** (Mean Time To Repair) — temps moyen nécessaire pour réparer un composant défaillant (durée moyenne d'intervention).

Exemple numérique

Sur une année (8760 h), un compresseur tombe en panne 4 fois et les interventions durent respectivement 3 h, 5 h, 4 h et 6 h.

- MTTR = $\dfrac{3+5+4+6}{4} = 4{,}5$ h
- Temps total de panne = 18 h ⇒ temps de bon fonctionnement = 8760 − 18 = 8742 h
- MTBF = $\dfrac{8742}{4} \approx 2185{,}5$ h

2. Modèles de durée de vie

2.1 Loi exponentielle

Loi exponentielle de taux λ La loi exponentielle est le modèle de fiabilité le plus simple. Le taux de défaillance est **constant** au cours du temps :

$$R(t) = e^{-\lambda t} \qquad (t \geq 0,\ \lambda > 0)$$

Les caractéristiques associées :

$$\text{MTBF} = \frac{1}{\lambda}, \qquad F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \qquad \lambda(t) = \lambda = \text{constante}$$

Propriété sans mémoire Pour la loi exponentielle :

$$P(T > t + s \mid T > t) = P(T > s) = e^{-\lambda s}$$

Un composant qui a fonctionné pendant t heures a exactement la même probabilité de fonctionner encore s heures qu'un composant neuf. Cette propriété est adaptée à la **période de vie utile** (taux de défaillance constant).

Exemple : fiabilité d'une pompe

Un constructeur annonce un MTBF de 5000 h pour une pompe hydraulique. Taux de défaillance : $\lambda = \dfrac{1}{5000} = 2 \times 10^{-4}$ pannes/h.

Fiabilité après 1000 h :

$$R(1000) = e^{-2\times 10^{-4}\times 1000} = e^{-0{,}2} \approx 0{,}819$$

Il y a 81,9 % de chance que la pompe fonctionne sans panne pendant 1000 h.

Temps de bon fonctionnement avec 90 % de fiabilité ($R(t) = 0{,}9$) :

$$0{,}9 = e^{-\lambda t} \Rightarrow t = \frac{-\ln 0{,}9}{\lambda} = \frac{0{,}1054}{2 \times 10^{-4}} \approx 527 \text{ h}$$

2.2 Loi de Weibull

Loi de Weibull La loi de Weibull généralise la loi exponentielle avec deux paramètres :

$$R(t) = \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}\right] \qquad (t \geq 0)$$

- β (*paramètre de forme*) contrôle l'évolution du taux de défaillance
- η (*paramètre d'échelle*, durée caractéristique) : instant auquel $R = e^{-1} \approx 63{,}2\,\%$ ont défailli

Taux de défaillance : $\lambda(t) = \dfrac{\beta}{\eta}\left(\dfrac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}$

Interprétation du paramètre β

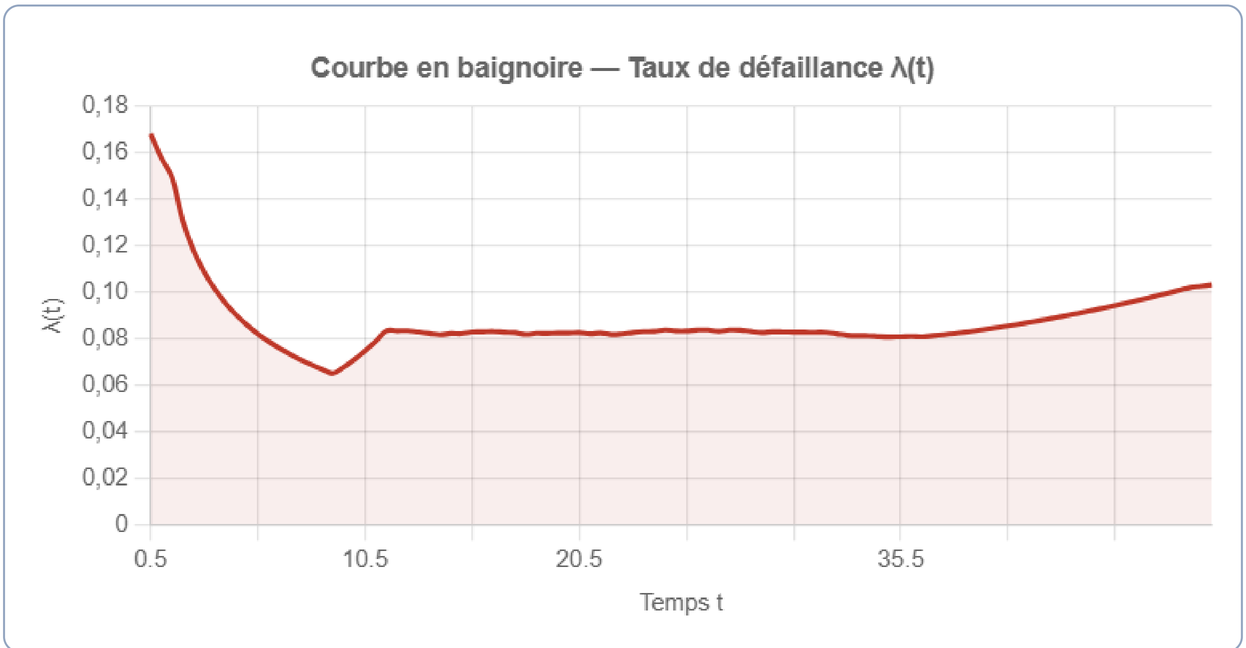
Valeur de β	$\lambda(t)$	Période de vie	Causes typiques
$\beta < 1$	Décroissant	Jeunesse (rodage)	Défauts de fabrication, erreurs d'installation
$\beta = 1$	Constant	Vie utile	Défaillances aléatoires (loi exponentielle)
$\beta > 1$	Croissant	Vieillissement	Usure, fatigue, corrosion
$\beta = 2$	Linéaire croissant	Vieillissement	Usure progressive
$\beta = 3{,}5$	Proche loi normale	Vieillissement accusé	Fatigue mécanique

MTBF de Weibull : $\text{MTTF} = \eta\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$ où Γ est la fonction Gamma ($\Gamma(n+1) = n!$ pour les entiers).

2.3 Courbe en baignoire

Courbe en baignoire La courbe en baignoire représente l'évolution du taux de défaillance $\lambda(t)$ au cours de la vie d'un composant. Elle comprend trois phases :

1. **Phase de jeunesse** (ou rodage) : $\lambda(t)$ décroissant (β < 1)
2. **Vie utile** : $\lambda(t)$ pratiquement constant (β = 1)
3. **Vieillissement** : $\lambda(t)$ croissant (β > 1)



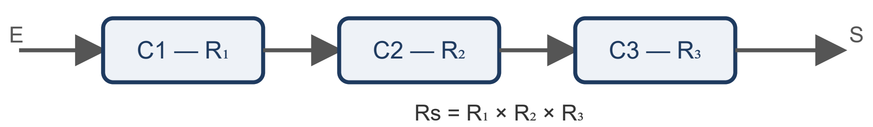
3. Diagrammes de fiabilité

3.1 Système en série

Fiabilité d'un système en série Dans un système en série, **tous** les composants doivent fonctionner pour que le système fonctionne. La défaillance d'un seul composant entraîne la défaillance du système. Si les composants sont indépendants :

$$R_s(t) = R_1(t) \cdot R_2(t) \cdots R_n(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t)$$

Schéma d'un système en série



Attention La fiabilité d'un système en série est **toujours inférieure** à la fiabilité du composant le moins fiable. Plus on ajoute de composants en série, plus le système est fragile.

3.2 Système en parallèle (redondance active)

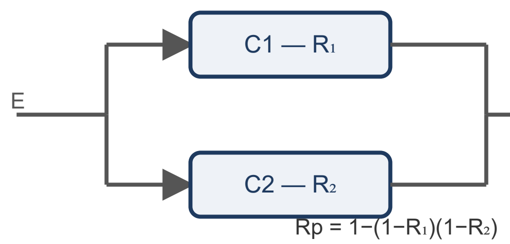
Fiabilité d'un système en parallèle Dans un système en parallèle, le système fonctionne dès qu'**au moins un** composant fonctionne.

$$R_p(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - R_i(t)) = 1 - F_1(t) \cdot F_2(t) \cdots F_n(t)$$

Pour deux composants identiques de fiabilité R :

$$R_p = 1 - (1 - R)^2 = 2R - R^2 > R$$

Schéma d'un système en parallèle



3.3 Systèmes mixtes (série-parallèle)

On calcule la fiabilité des groupes en parallèle en premier, puis on assemble en série, ou vice versa, en identifiant la structure du système.

Exemple : système hydraulique
Un circuit hydraulique comprend : deux pompes en parallèle ($R_1 = R_2 = 0{,}90$), puis un filtre en série ($R_3 = 0{,}95$), puis deux vannes en parallèle ($R_4 = R_5 = 0{,}98$).

Étape 1 — groupe pompes :

$$R_{12} = 1 - (1 - 0{,}90)^2 = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$$

Étape 2 — groupe vannes :

$$R_{45} = 1 - (1 - 0{,}98)^2 = 1 - 0{,}0004 = 0{,}9996$$

Étape 3 — système global (série) :

$$R_s = R_{12} \times R_3 \times R_{45} = 0{,}99 \times 0{,}95 \times 0{,}9996 \approx 0{,}940$$

3.4 Redondance active vs passive

Types de redondance

- **Redondance active** : tous les composants fonctionnent en même temps. Le système continue à fonctionner tant qu'il en reste au moins un. Modèle : système en parallèle classique.
- **Redondance passive (de secours)** : un seul composant fonctionne à la fois. En cas de défaillance, un composant de secours (stand-by) prend le relais. Le composant de secours ne vieillit pas en attente (hypothèse simplificatrice).

4. Analyse AMDEC

AMDEC — Analyse des Modes de Défaillance, de leurs Effets et de leur Criticité

L'AMDEC est une méthode systématique d'analyse des risques qui recense pour chaque composant :

- Les **modes de défaillance** : comment le composant peut-il tomber en panne ?
- Les **effets** sur le système et l'utilisateur
- Les **causes** de la défaillance
- L'**indice de criticité** $C = G \times F \times D$

Indices de l'AMDEC

Indice	Signification	Valeurs (1 à 4)
G	Gravité de l'effet sur le système/utilisateur	1 = mineur, 2 = significatif, 3 = critique, 4 = catastrophique
F	Fréquence (probabilité) d'occurrence de la défaillance	1 = rare, 2 = peu fréquent, 3 = fréquent, 4 = très fréquent
D	Détectabilité (facilité à détecter avant défaillance)	1 = détection facile, 4 = non détectable
C	Criticité = G × F × D	Min 1, max 64 — seuil d'alerte souvent fixé à C ≥ 12 ou C ≥ 16

Exemple de tableau AMDEC — Centrale de Traitement d'Air (CTA)

Composant	Mode de défaillance	Effet sur le système	Cause probable	G	F	D	C = G×F×D	Niveau
Compresseur	Grippage	Arrêt total de la CTA	Manque d'huile, surcharge thermique	4	2	2	**16**	Fort
Filtre à air	Colmatage	Perte de débit, mauvaise qualité d'air	Défaut de maintenance préventive	2	4	2	**16**	Fort
Ventilateur	Déséquilibrage	Vibrations, usure roulements	Encrassement des pales	3	3	2	**18**	Fort
Sonde de température	Dérive du signal	Mauvaise régulation, inconfort	Vieillissement du capteur	2	2	3	**12**	Moyen
Échangeur thermique	Fuite	Perte de fluide frigoporteur	Corrosion, chocs	4	1	2	**8**	Faible
Courroie d'entraînement	Rupture	Arrêt du ventilateur	Usure normale, mauvaise tension	3	2	1	**6**	Faible

Conclusion AMDEC : le ventilateur (C = 18), le compresseur et le filtre (C = 16) dépassent le seuil d'alerte fixé à 12. Ces trois composants doivent être prioritaires dans le plan de maintenance.

5. Analyse par arbres de défaillances

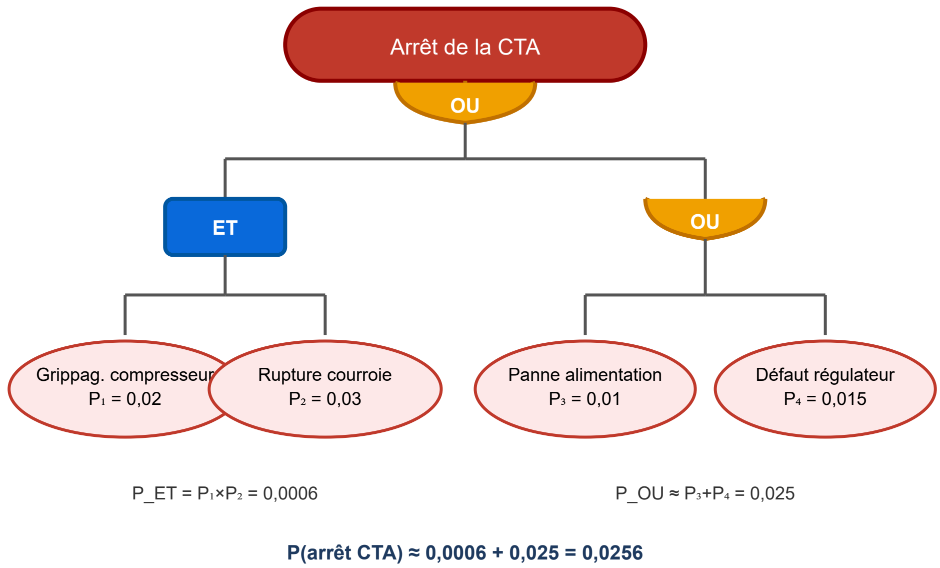
Arbre de défaillances (Fault Tree Analysis) Un arbre de défaillances est un modèle graphique déductif qui représente toutes les combinaisons de défaillances de composants pouvant conduire à un événement indésirable (l'**événement sommet**).

Portes logiques

Porte	Symbole	Condition de sortie	Calcul probabilité
ET (AND)	⋒ (D aplati)	La sortie est vraie si *tous* les entrées sont vraies	$P_s = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_n$
OU (OR)	⋓ (D arrondi)	La sortie est vraie si *au moins une* entrée est vraie	$P_s = 1 - (1-P_1)(1-P_2)\cdots(1-P_n)$

Pour des événements indépendants de faibles probabilités : porte OU : $P_s \approx P_1 + P_2 + \cdots + P_n$.

Exemple : arbre de défaillances — arrêt de la CTA



Calcul de la probabilité de l'événement sommet

- Branche mécanique (porte ET) : $P_{ET} = P_1 \times P_2 = 0{,}02 \times 0{,}03 = 6 \times 10^{-4}$
- Branche électrique (porte OU) : $P_{OU} = 1 - (1 - 0{,}01)(1 - 0{,}015) \approx 0{,}025$
- Événement sommet (porte OU des deux branches) :

$$P_{\text{arrêt}} \approx P_{ET} + P_{OU} = 6 \times 10^{-4} + 0{,}025 \approx 2{,}56\,\%$$

6. Disponibilité

Disponibilité D La **disponibilité** est la probabilité qu'un équipement soit en état de fonctionner à un instant donné (ou sur une période). Elle tient compte à la fois de la fiabilité et de la maintenabilité :

$$D = \frac{\text{MTBF}}{\text{MTBF} + \text{MTTR}}$$

Maintenabilité $M(t)$ La **maintenabilité** est la probabilité qu'une réparation soit effectuée en un temps inférieur ou égal à t. En supposant un taux de réparation constant μ :

$$M(t) = 1 - e^{-\mu t} \qquad \text{avec } \mu = \frac{1}{\text{MTTR}}$$

Disponibilité

$$D = \frac{\text{MTBF}}{\text{MTBF} + \text{MTTR}}$$

Taux de réparation μ

$$\mu = \frac{1}{\text{MTTR}}$$

Indisponibilité U

$$U = 1 - D = \frac{\text{MTTR}}{\text{MTBF} + \text{MTTR}}$$

Exemple : disponibilité du compresseur de la CTA

MTBF = 2185 h (calculé en §1), MTTR = 4,5 h.

$$D = \frac{2185}{2185 + 4{,}5} = \frac{2185}{2189{,}5} \approx 0{,}9979$$

La CTA est disponible 99,79 % du temps, soit environ 18 h d'indisponibilité par an.

7. Stratégies de maintenance

Types de maintenance

Type	Description	Avantages	Inconvénients	Utilisation
Corrective	Intervention après la panne	Aucun coût si pas de panne	Arrêts imprévus, coûts élevés en urgence	Composants peu critiques, à faible coût
Préventive systématique	Intervention à intervalles fixes (temps ou cycles)	Planification facile, évite les pannes	Peut remplacer des pièces encore bonnes	Composants dont la fiabilité suit Weibull ($\beta > 1$)
Préventive conditionnelle (prédictive)	Intervention selon l'état réel du composant (capteurs, vibrations…)	Optimise les remplacement, évite les pannes	Nécessite des capteurs et un traitement des données	Composants critiques, coûteux, accessibles à l'instrumentation

Choix de la stratégie selon la courbe en baignoire

- **Phase de jeunesse** ($\beta < 1$) : maintenance corrective ou amélioration du processus de fabrication/installation.
- **Vie utile** ($\beta = 1$) : les pannes sont aléatoires ; la maintenance préventive systématique n'apporte pas de bénéfice (propriété sans mémoire). Préférer la surveillance conditionnelle.
- **Vieillissement** ($\beta > 1$) : la maintenance préventive systématique est efficace (remplacement avant la fin de vie).

8. Application industrielle — Fiabilité de la CTA complète

Données constructeur

Pour la centrale de traitement d'air (CTA), Sophie dispose des données suivantes à 2000 h de fonctionnement :

- Compresseur (loi exponentielle) : MTBF = 5000 h ⇒ $R_1(2000) = e^{-2000/5000} = e^{-0{,}4} \approx 0{,}670$
- Ventilateur (Weibull, $\beta = 2$, $\eta = 3000$ h) : $R_2(2000) = e^{-(2000/3000)^2} = e^{-0{,}444} \approx 0{,}641$
- Filtre (loi exponentielle, MTBF = 3000 h) : $R_3(2000) = e^{-2000/3000} = e^{-0{,}667} \approx 0{,}513$
- Régulation (loi exponentielle, MTBF = 10000 h) : $R_4(2000) = e^{-2000/10000} = e^{-0{,}2} \approx 0{,}819$

Calcul de la fiabilité système

Architecture : compresseur et ventilateur en parallèle (groupe 1), puis filtre et régulation en série.

Étape 1 — Groupe compresseur + ventilateur (parallèle) :

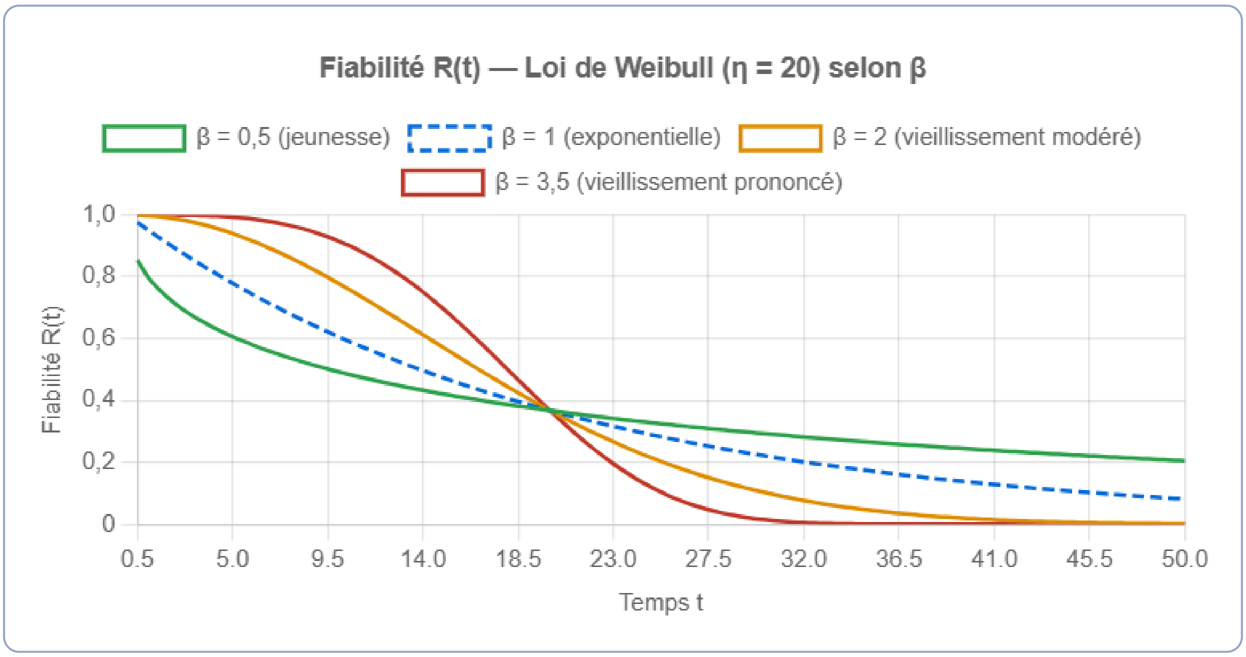
$$R_{12} = 1 - (1 - 0{,}670)(1 - 0{,}641) = 1 - 0{,}330 \times 0{,}359 = 1 - 0{,}118 = 0{,}882$$

Étape 2 — Système global (série) :

$$R_s = R_{12} \times R_3 \times R_4 = 0{,}882 \times 0{,}513 \times 0{,}819$$
$$R_s = 0{,}882 \times 0{,}420 \approx 0{,}371$$

Interprétation : à 2000 h, la fiabilité de la CTA n'est plus que de 37,1 %. Le filtre (R = 51,3 %) est le maillon le plus faible et doit être remplacé en priorité.

Courbe de fiabilité de Weibull selon β



Méthode

Construire et analyser un diagramme de fiabilité

1. **Identifier les composants** du système et leurs paramètres (λ, MTBF ou paramètres Weibull).
2. **Déterminer la structure** : série (maillon faible), parallèle (redondance), ou mixte.
3. **Calculer $R_i(t)$** pour chaque composant à l'instant considéré. Loi expo. : $R_i(t) = e^{-t/\mathrm{MTBF}_i}$. Weibull : $R_i(t) = e^{-(t/\eta_i)^{\beta_i}}$.
4. **Calculer la fiabilité des groupes** : Série : produit. Parallèle : $1 - \prod(1 - R_i)$.
5. **Assembler les groupes** pour obtenir $R_s(t)$.
6. **Identifier le maillon faible** : le composant avec la plus faible fiabilité en configuration série.
7. **Calculer la disponibilité** : $D = \mathrm{MTBF}/(\mathrm{MTBF} + \mathrm{MTTR})$.
8. **Proposer des actions** : redondance sur les maillons faibles critiques, plan de maintenance préventive.

À retenir — Fiabilité

Fiabilité $R(t) = P(T > t)$	**Taux de défaillance** $\lambda(t) = -\dfrac{R'(t)}{R(t)}$
Loi exponentielle $R(t) = e^{-\lambda t}, \quad \text{MTBF} = \dfrac{1}{\lambda}$	**Loi de Weibull** $R(t) = e^{-(t/\eta)^{\beta}}$
Série $R_s = R_1 \cdot R_2 \cdots R_n$	**Parallèle** $R_p = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - R_i)$
AMDEC $C = G \times F \times D$	**Disponibilité** $D = \dfrac{\text{MTBF}}{\text{MTBF} + \text{MTTR}}$

- La loi exponentielle (λ constant) modélise la **vie utile** ; propriété sans mémoire.
- Weibull avec $\beta < 1$ = jeunesse ; $\beta = 1$ = vie utile ; $\beta > 1$ = vieillissement.
- La **courbe en baignoire** justifie les trois phases et les stratégies de maintenance associées.
- En série : la fiabilité est limitée par le maillon le plus faible.
- La redondance (parallèle) améliore la fiabilité mais augmente le coût.
- L'AMDEC permet de hiérarchiser les actions de maintenance selon la criticité $C = G \times F \times D$.

18

MATHÉMATIQUES

Fiabilité

BTS | Mathématiques | Durée : 40 min | /20

Nom : _____ Prénom : _____ Date : _____

Exercice 1 — Indicateurs MTBF / MTTR (3 pts)

Sur une période de fonctionnement, un moteur électrique tombe en panne 5 fois. Le temps total de bon fonctionnement est de 6000 h ; les 5 réparations ont duré au total 15 h.

a. Calculer le MTBF (temps moyen entre deux défaillances). *(1,5 pt)*
b. Calculer le MTTR (temps moyen de réparation). *(1,5 pt)*

Exercice 2 — Loi exponentielle (5 pts)

Un capteur de pression suit une loi exponentielle de MTBF = 4000 h. On rappelle $\lambda = \dfrac{1}{\mathrm{MTBF}}$ et $R(t) = e^{-\lambda t}$. On donne $e^{-0{,}25} \approx 0{,}779$.

a. Calculer le taux de défaillance λ. *(1,5 pt)*
b. Calculer la fiabilité $R(1000)$ au bout de 1000 h. *(2 pts)*
c. Que vaut la fiabilité à $t = 0$? Justifier par la propriété sans mémoire que la fiabilité ne dépend pas de l'âge déjà atteint. *(1,5 pt)*

Exercice 3 — Loi de Weibull (3 pts)

Un roulement suit une loi de Weibull $R(t) = e^{-(t/\eta)^{\beta}}$ avec $\beta = 2$ et $\eta = 3000$ h. On donne $e^{-1} \approx 0{,}368$.

a. Calculer $R(3000)$. *(1,5 pt)*
b. Que signifie ici la valeur $\beta = 2$ sur l'évolution du taux de défaillance ? *(1,5 pt)*

Exercice 4 — Fiabilité d'un système (5 pts)

Un système comprend deux composants identiques de fiabilité $R = 0{,}9$.

a. Calculer la fiabilité R_s si les deux composants sont en série. *(1,5 pt)*
b. Calculer la fiabilité R_p si les deux composants sont en parallèle (redondance). *(2 pts)*

c. Comparer R_s, R_p et R ; conclure sur l'intérêt de la redondance. *(1,5 pt)*

Exercice 5 — Disponibilité (4 pts)

Une pompe a un MTBF = 990 h et un MTTR = 10 h. On rappelle $D = \dfrac{\text{MTBF}}{\text{MTBF} + \text{MTTR}}$

.

a. Calculer la disponibilité D. *(2 pts)*

b. En déduire l'indisponibilité $U = 1 - D$, exprimée en pourcentage. *(2 pts)*