

TD $\varphi 19$: Rayonnement dipolaire

Exercice 1 : Rayonnement dipolaire (*Oral Mines-Ponts*)

Soit $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi rc} \ddot{p} \sin \theta \vec{u}_\varphi$ un champ électrique ou magnétique (où p est un moment dipolaire)

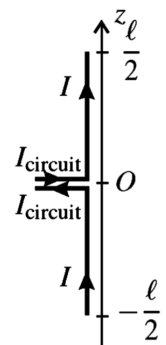
1. Par analyse dimensionnelle, déterminer si $\vec{A}$ est un champ électrique ou magnétique.
2. Quel est le domaine de validité de cette expression ?
3. Calculer l'autre champ ($\vec{E}$ ou $\vec{B}$).
4. Calculer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ et en discuter.

Exercice 2 : Antenne assimilable à un dipôle oscillant

On considère une antenne hertzienne de taille l alimentée en son milieu par un circuit qui délivre l'intensité $I_{\text{circuit}}(t) = I_0 \cos \omega t$.

Dans l'antenne, l'intensité I dépend de z et du temps. On suppose qu'elle est nulle aux deux extrémités de côté $z = \pm \frac{l}{2}$. D'après les hypothèses, le courant dans l'antenne vaut :

$$I(z, t) = I_{\text{circuit}}(t) \left(1 - 2 \frac{|z|}{l} \right)$$



1. Quelle doit être la condition sur l pour que cette antenne puisse être étudiée dans le cadre des dipôles électriques oscillants ?
2. En utilisant la loi locale de conservation de la charge sous la forme $\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial z} = 0$, déterminer la densité linéique de charge $\lambda(z, t)$ le long du fil en $z > 0$ et en $z < 0$.
3. En déduire que cette antenne est assimilable à un dipôle dont le moment dipolaire s'écrit $\vec{p}(t) = p_0 \cos(\omega t + \psi) \vec{u}_z$ avec p_0 et ψ à exprimer.

Exercice 3 : Dipôle magnétique oscillant (*Oral CCINP*)

Une spire circulaire de centre O, de rayon a et d'axe (Oz) est parcourue par un courant sinusoïdal de pulsation ω et dont l'intensité $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ est la même en tout point du circuit. Cette spire possède un moment magnétique instantané $\vec{m}(t) = m_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$ avec m_0 une constante. Elle crée dans sa zone de rayonnement un champ ayant dans le système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) d'axe (Oz) l'expression :

$$\frac{\mu_0 m_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi rc} \cos(\omega t - kr) \vec{u}_\varphi \text{ et } - \frac{\mu_0 m_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi rc^2} \cos(\omega t - kr) \vec{u}_\theta$$

1. Exprimer m_0 en fonction de I_0 et a .
2. Identifier dans les deux expressions ci-dessus celle du champ électrique $\vec{E}(M, t)$ et celle du champ magnétique $\vec{B}(M, t)$.
3. Que vaut le rapport $\frac{\|\vec{E}\|}{\|\vec{B}\|}$? Décrire la structure du champ rayonné par le dipôle magnétique oscillant, la comparer au champ électromagnétique rayonné par le dipôle électrique oscillant.
4. Calculer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ ainsi que sa moyenne temporelle.
5. Calculer la puissance moyenne $\langle P \rangle$ rayonnée dans tout l'espace. La mettre sous la forme :

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} R_0 \left(\frac{a}{\lambda} \right)^4 I_0^2$$

avec λ la longueur d'onde et R_0 à exprimer en fonction de μ_0 et c uniquement. Faire l'application numérique pour R_0 .

Exercice 4 : Antenne demi-onde (*Oral Mines-Ponts*)

Une antenne filiforme, colinéaire à (Oz) , de longueur $l = \frac{\lambda}{2}$, centrée à l'origine est le siège d'un courant sinusoïdal de la forme :

$$I(z, t) = I_0 \cos\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right) e^{i\omega t} \text{ avec } \omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

Un point M est repéré par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) d'origine O et d'axe (Oz) . On se place dans la zone de rayonnement $r \gg \lambda$. On admet que le champ magnétique total rayonné est :

$$\vec{B}(M, t) = \frac{i\mu_0 I_0}{2\pi r \sin \theta} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right) \exp\left[i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \vec{u}_\varphi$$

et que localement ce champ électromagnétique a la structure d'une onde plane progressive de direction de propagation $\vec{u}_r$.

1. Calculer la valeur moyenne du vecteur de Poynting en M.
2. Dans quelle direction cette antenne rayonne-t-elle le maximum d'énergie? Représenter l'indicatrice de rayonnement.
3. Calculer la puissance moyenne P rayonnée par l'antenne à travers une sphère de rayon r .
4. En déduire la résistance de rayonnement R de l'antenne, définie par $P = RI_{eff}^2$. Faire l'application numérique.

Donnée : $\int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} d\theta = 1,22$.

Exercice 5 : Couleur du ciel (*Oral CCINP MP*)

On considère le modèle de Thomson de l'électron élastiquement lié. On se place dans le référentiel cartésien dont l'origine O est le noyau d'un atome d'hydrogène et on étudie l'électron représenté par un point M de coordonnées (x, y, z) . Ce dernier est soumis à une force de rappel élastique $\vec{F}_r = -k\vec{OM}$ et à une force dissipative modélisée par une force de frottement fluide $\vec{F}_r = -h\vec{v}$. De plus, on tient compte d'un champ électrique d'expression $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x$.

1. En supposant que le mouvement de l'électron n'est que selon $\vec{e}_x$, déterminer l'équation du mouvement. Faire apparaître la pulsation caractéristique ω_0 et le facteur de qualité Q . Calculer les valeurs de ω_0 et Q .
2. On suppose que le régime permanent est atteint. $\underline{x}$ est de la forme $\underline{x} = \underline{X}_m e^{i\omega t}$. Déterminer le module et l'argument de $\underline{X}_m$.
3. Déterminer la pulsation ω qui maximise le module de $\underline{X}_m$.
4. Le spectre du visible s'étendant du bleu au rouge, comparer les pulsations ω associées au bleu et au rouge à ω_0 .
5. En déduire une expression simplifiée du module de $\underline{X}_m$.
6. On définit la puissance rayonnée : $P_r = K|\ddot{x}|^2$ où K est une constante arbitraire. Calculer le rapport entre la puissance rayonnée par le bleu et celle rayonnée par le rouge.
7. Justifier pourquoi le ciel est bleu en l'absence de nuages.

Données :

- masse d'un électron : $m_e = 9,1 \times 10^{-31}$ kg
- charge d'un proton : $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C
- Coefficient de frottement : $h = 9,1 \times 10^{-23}$ kg.s⁻¹.
- raideur : $k = 3,6 \times 10^2$ N.m⁻¹.

Exercice 6 : Durée de vie de l'atome d'hydrogène dans le modèle de Bohr (*Oral CCINP*)

Dans le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène, l'électron de masse m et de charge $-e$ tourne autour du noyau O supposé immobile sur une orbite circulaire.

1. En supposant que la seule force exercée sur l'électron est la force électrique due au noyau, calculer l'accélération $\vec{a}(t)$ de l'électron en orbite circulaire de rayon r_e en fonction de m , e , ϵ_0 et r_e .
2. Déterminer l'énergie mécanique E_m de l'électron en fonction de e , ϵ_0 et r_e .
3. On rappelle que la puissance moyenne rayonnée à travers une sphère de centre O et de rayon r est donnée par la formule de Larmor : $P_{ray} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\|\vec{a}\|^2}{c^3}$
Déterminer P_{ray} en fonction de e , m , ϵ_0, c et r_e .
4. Cette puissance est prélevée sur l'énergie mécanique de l'électron. Si on suppose que l'énergie rayonnée durant une révolution de l'électron autour du noyau est très petite devant l'énergie mécanique E_m , on peut considérer que l'orbite électronique est quasiment circulaire avec un rayon $r_e(t)$ qui varie très lentement.
Etablir l'équation différentielle vérifiée par $r_e(t)$ et en déduire l'évolution du rayon de l'orbite en fonction du temps. On notera r_0 la valeur de r_e à $t = 0$ et on posera $K = \frac{4e^4}{3(4\pi\epsilon_0)^2 c^3 m^2}$. Quel est le mouvement décrit par l'électron en réalité?
5. Calculer la durée τ au bout de laquelle $r_e = 0$ et la comparer à la période T de révolution de l'électron. Conclure.

Données :

- masse de l'électron : $m = 9,1 \times 10^{-31}$ kg
- charge élémentaire : $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C
- permittivité diélectrique du vide : $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ F.m⁻¹.
- $r_0 = 0,53 \times 10^{-10}$ m