

Mathématiques

Corrigé du DS n°3

Exercice 1.

Partie I : étude d'une suite

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$H_{n+1} - H_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} > 0.$$

Ainsi, la suite (H_n) est croissante.

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Par décroissance de la fonction $x \mapsto 1/x$ sur $\mathbb{R}_+^*$, pour tout $k \in [n+1, 2n]$:

$$\frac{1}{k} > \frac{1}{2n}.$$

En sommant terme à terme pour k allant de $n+1$ à $2n$:

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} > \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$H_{2n} - H_n > \frac{1}{2}.$$

- (c) La suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant croissante, d'après le théorème de la limite monotone, il y a deux cas possibles :
- soit elle converge et admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$,
 - soit elle diverge vers $+\infty$ et admet $+\infty$ comme limite.
- (d) Raisonnons par l'absurde : supposons que (H_n) converge. Alors, en notant ℓ sa limite, on a que (H_{2n}) converge aussi vers ℓ . On en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} H_{2n} - H_n = 0.$$

En passant à la limite dans l'inégalité de la question précédente :

$$0 \geq \frac{1}{2},$$

ce qui est une contradiction. Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty.$$

- (e) i. Fonction pour calculer H_n en Python :

```
def calcul_H(n):  
    H = 0  
    for k in range(1, n+1):  
        H = H + 1/k  
    return H
```

- ii. Script pour trouver n tel que $H_n > 10^5$:

```
def rang():  
    H = 0  
    n = 0  
    while H < 10**5:  
        n = n + 1  
        H = H + 1/n  
    return n
```

2. (a) Soit f définie sur $] -1, +\infty[$ par $f(x) = x - \ln(1+x)$. Alors comme f est dérivable en tant que somme de fonctions usuelles dérivables sur cet intervalle :

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}.$$

Or $x+1 > 0$ sur cet intervalle, donc $f'(x) > 0$ pour tout $x > 0$. On en déduit que f admet un minimum en $x=0$ et $f(0)=0$ donc

$$\ln(1+x) \leq x, \quad \forall x \in]-1, +\infty[.$$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1}, \quad \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq -\frac{1}{n+1}.$$

Ainsi :

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

- (c) Montrons que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - \ln(n+2) - H_n + \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) > 0,$$

$$v_{n+1} - v_n = H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq 0,$$

$$v_n - u_n = H_n - \ln(n) - H_n + \ln(n+1) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

En conclusion, les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et convergent vers la même limite γ .

3. (a) On considère la proposition dépendant de n :

$$\mathcal{P}(n) : \quad "S_n = H_{2n} - H_n".$$

Initialisation. Pour $n=1$,

$$S_1 = \sum_{k=1}^2 \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad H_2 - H_1 = \left(1 + \frac{1}{2}\right) - 1 = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Alors

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \underbrace{\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}}_{=S_n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = S_n + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}.$$

Par ailleurs,

$$H_{2n+2} - H_{n+1} = \left(H_{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(H_n + \frac{1}{n+1}\right) = (H_{2n} - H_n) + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence $S_n = H_{2n} - H_n$, on obtient

$$S_{n+1} = H_{2n+2} - H_{n+1}.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = H_{2n} - H_n.$$

- (b) Par définition de (v_n) :

$$H_n = v_n + \ln(n)$$

donc

$$S_n = v_{2n} + \ln(2n) - v_n - \ln(n) = v_{2n} - v_n + \ln(2).$$

- (c) Comme $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \gamma$, on a $v_{2n} - v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Ainsi :

$$S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(2).$$

Partie II : formule d'inversion de Pascal

1. Soient $i, k, n \in \mathbb{N}$ tels que $i \leq k \leq n$. Alors :

$$\binom{n}{k} \binom{k}{i} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \cdot \frac{k!}{(k-i)!i!} = \frac{n!}{(n-k)!(k-i)!i!}.$$

On écrit

$$\frac{n!}{(n-k)!(k-i)!i!} = \frac{n!}{(n-i)!i!} \cdot \frac{(n-i)!}{(n-k)!(k-i)!} = \binom{n}{i} \binom{n-i}{n-k}.$$

2. Soit (u_n) une suite réelle et (v_n) définie par $v_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k$. Alors :

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} v_k = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} u_i.$$

En échangeant l'ordre des sommes d'après le théorème de Fubini :

$$\sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{i} u_i = \sum_{0 \leq i \leq k \leq n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{i} u_i \quad (\text{d'après la question 1}).$$

$$= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} u_i \sum_{k=i}^n (-1)^{n-k} \binom{n-i}{n-k}.$$

Posons $j = n - k$, on a :

$$= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} u_i \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j \binom{n-i}{j}.$$

- (b) D'après la formule du binôme de Newton,

$$\sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j \binom{n-i}{j} = (1-1)^{n-i} = 0^{n-i}.$$

Ainsi :

$$\sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j \binom{n-i}{j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i < n, \\ 1 & \text{si } i = n. \end{cases}$$

Par conséquent, dans la somme précédente, tous les termes s'annulent sauf celui pour $i = n$:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} v_k = \binom{n}{n} u_n \cdot 1 = u_n.$$

Partie III : application

1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $1 - x \neq 1$, donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} (1-x)^k = \frac{1 - (1-x)^n}{1 - (1-x)} = \frac{1 - (1-x)^n}{x}.$$

2. (a) La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'_n(x) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k x^{k-1}.$$

Si $x = 0$, alors

$$f'_n(0) = \binom{n}{1} (-1)^1 0^0 = -n,$$

(donc la formule demandée est vraie pour $x = 0$). Sinon,

$$f'_n(x) = \frac{1}{x} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-x)^k = \frac{1}{x} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-x)^k - 1 \right).$$

D'après la formule du binôme de Newton, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'_n(x) = \frac{(1-x)^n - 1}{x}.$$

Or, d'après la question précédente,

$$\frac{(1-x)^n - 1}{x} = - \sum_{k=0}^{n-1} (1-x)^k.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'_n(x) = - \sum_{k=0}^{n-1} (1-x)^k.$$

(b) On définit la fonction F_n par

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1-x)^{k+1}}{k+1}.$$

F_n est une primitive de f_n . Donc, il existe un réel λ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1-x)^{k+1}}{k+1} + \lambda.$$

Comme $f_n(0) = 0$, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1-0)^{k+1}}{k+1} + \lambda = 0,$$

soit

$$\lambda = - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = -H_n.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1-x)^{k+1}}{k+1} - H_n.$$

(c) D'après la relation précédente,

$$f_n(1) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1-1)^{k+1}}{k+1} - H_n = -H_n.$$

Or, par définition de f_n ,

$$f_n(1) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Ainsi,

$$H_n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

3. On reprend les notations de la question 2 : on pose donc $u_0 = 0$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$u_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$H_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k \quad (\text{formule valable en posant } H_0 = 0).$$

D'après la formule d'inversion de Pascal, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} H_k.$$

Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} H_k.$$

En multipliant par $(-1)^{n+1}$, on obtient

$$\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} H_k.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} H_k.$$

Exercice 2.

Partie I

1. On appelle succès l'événement « obtenir Pile ». Sa probabilité est

$$p = \frac{2}{3}.$$

Un lancer de pièce est une épreuve de Bernoulli. On répète cette épreuve 3 fois de manière indépendante. La variable aléatoire X compte le nombre de succès, donc X suit la loi $\mathcal{B}(3, \frac{2}{3})$. Le joueur est déclaré vainqueur si le nombre de Pile est pair (0 ou 2) :

$$A = [X = 0] \cup [X = 2].$$

Par incompatibilité, on a

$$P(A) = P(X = 0) + P(X = 2) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{13}{27}.$$

2. Pour chaque valeur de X , on a une valeur différente de G . Si $X = 0$, alors $G = 0$, si $X = 1$, alors on perd 10 euros et $G = -10$, si $X = 2$, alors on gagne 20 euros et $G = 20$, enfin, si $X = 3$, on perd 30 euros et $G = -30$.

Au final :

$$G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}.$$

On a ensuite :

$$P(G = 0) = P(X = 0) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27},$$

$$P(G = 20) = P(X = 2) = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9},$$

$$P(G = -30) = P(X = 3) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27},$$

$$P(G = -10) = P(X = 1) = 3 \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}.$$

3. On calcule l'espérance de G

$$\mathbb{E}(G) = -30P(G = -30) - 10P(G = -10) + 20P(G = 20) = -30P(X = 3) - 10P(X = 1) + 20P(X = 2)$$

Donc

$$\mathbb{E}(G) = -30 \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 10 \times 3 \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 20 \times 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = -\frac{60}{27} = -\frac{20}{9}.$$

On trouve donc que $\mathbb{E}(G) < 0$ et que le jeu est défavorable au joueur.

4. Python

```
(a) def loiX():
    x = 0
    for k in range(3):
        if rd.rand() < 2/3:
            x = x + 1
    return x
```

```

(b) def loiG():
    x = loiX()
    if x == 0:
        G = 0
    elif x == 1:
        G = -10
    elif x == 2:
        G = 20
    else:
        G = -30
    return G

```

Partie II

1. (a) Si $Y = 1$, alors $Z = 1$. Si $Y = -1$, alors $Z = 0$. On a bien :

$$Z(\Omega) = \{0, 1\}.$$

De plus :

$$P(Z = 1) = P(Y = 1) = P(X \in 2\mathbb{N}) = P(A),$$

et on a bien :

$$Z \hookrightarrow B(P(A)).$$

- (b) D'après la question précédente :

$$E(Z) = P(A), \quad \text{et} \quad Y = 2Z - 1.$$

Par linéarité de l'espérance :

$$E(Y) = E(2Z - 1) = 2E(Z) - 1 = 2P(A) - 1.$$

2. (a) On appelle succès l'événement : « obtenir Pile ». Sa probabilité est p . Un lancer de pièce est donc une épreuve de Bernoulli. On répète cette épreuve n fois de manière identique et indépendante. La variable aléatoire X compte le nombre de succès, ainsi :

$$X \hookrightarrow B(n, p).$$

- (b) D'après le théorème de transfert :

$$E(Y) = E((-1)^X) = \sum_{k=0}^n (-1)^k P(X = k) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

On utilise alors la formule du binôme :

$$E(Y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-p)^k (1-p)^{n-k} = (1-p-p)^n = (1-2p)^n.$$

3. D'après les questions 1(b) et 2(b), on a :

$$(1-2p)^n = E(Y) = 2P(A) - 1 \iff P(A) = \frac{(1-2p)^n + 1}{2}.$$

4. On résout :

$$\begin{aligned}
 P(A) \geq \frac{1}{2} &\iff \frac{(1-2p)^n + 1}{2} \geq \frac{1}{2} \iff (1-2p)^n \geq 0, \\
 &\iff n \text{ pair} \quad \text{ou} \quad 1-2p \geq 0, \\
 &\iff n \text{ pair} \quad \text{ou} \quad p \leq \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Partie III

1. On « gagne » 10 euros pour chaque Pile (compté avec X) affecté du signe donné par Y selon la parité de X , ou encore :

$$G = 10XY = 10X(-1)^X.$$

Toujours avec le théorème de transfert, on obtient :

$$E(G) = \sum_{k=0}^n 10k(-1)^k P(X = k) = 10 \sum_{k=0}^n (-1)^k k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

2. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a :

$$k \binom{n}{k} = \frac{kn!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

3. En utilisant le résultat de la question précédente, on a :

$$E(G) = 10 \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} (-p)^k (1-p)^{n-k} = 10n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} (-p)^k (1-p)^{(n-1)-(k-1)}.$$

En posant $j = k - 1$, on obtient :

$$E(G) = 10n(-p) \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-p)^j (1-p)^{n-1-j}.$$

Par la formule du binôme de Newton :

$$E(G) = -10np(1-2p)^{n-1}.$$

4. On connaît déjà les conditions pour que $P(A) \geq \frac{1}{2}$. Par ailleurs :

$$E(G) \leq 0 \iff -10np(1-2p)^{n-1} \leq 0 \iff (1-2p)^{n-1} \geq 0 \iff 1-2p \geq 0 \text{ ou } n \text{ impair.}$$

Comme n ne peut pas être pair et impair à la fois, la conjonction des conditions précédentes donne bien :

$$\begin{cases} P(A) \geq \frac{1}{2} \\ E(G) \leq 0 \end{cases} \iff p \leq \frac{1}{2}.$$

5. (a) La fonction f est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et a fortiori sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Le calcul donne :

$$f'(x) = (1-2x)^{n-2}(1-2nx).$$

f est strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{2n}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2}\right]$. f atteint son maximum en $\frac{1}{2n}$ avec

$$f\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}.$$

De plus, $f(0) = 0 = f\left(\frac{1}{2}\right)$.

(b) La rentabilité est optimale pour le concepteur lorsque l'espérance du gain est minimale, ou, de manière équivalente, lorsque $f(p)$ est maximal sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Il faut donc choisir

$$p = \frac{1}{2n}.$$