

CHAPITRE 15

PROBABILITÉS, VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES ET LOIS USUELLES

I	Expériences aléatoires, univers et probabilités	4
I.1	Vocabulaire des probabilités	4
I.2	Vers la définition de probabilité	6
I.3	Propriétés d'une probabilité	10
I.4	Variables aléatoires	13
II	Probabilités conditionnelles	16
II.1	Définition	16
II.2	Propriétés des probabilités conditionnelles	17
III	Loi d'une variable aléatoire	22
III.1	Définition	22
III.2	Composée d'une application et d'une variable aléatoire	24
III.3	Lois usuelles	25
III.4	Loi conditionnelle sachant un événement	29
III.5	Couple de variables aléatoires	30
IV	Indépendance	34
IV.1	Évènements indépendants	34
IV.2	Variables aléatoires indépendantes	36
	Cas de deux variables	36
	Famille finie de variables aléatoires indépendantes	37
	Suite de variables aléatoires indépendantes	37
IV.3	Lemme des coalitions	38

Extrait du programme

Variables aléatoires discrètes

On généralise l'étude des variables aléatoires à valeurs dans un ensemble fini menée en première année aux variables aléatoires discrètes. Ces outils permettent d'aborder, sur des exemples simples, l'étude de procédés stochastiques à temps discret. La mise en place du cadre de cette étude se veut à la fois minimale, pratique et rigoureuse :

- la notion de tribu n'appelle aucun autre développement que sa définition ;
- l'étude de la dénombrabilité d'un ensemble et la construction d'espaces probabilisés sont hors programme ;
- les diverses notions de convergences (presque sûre, en probabilité, en loi, etc.) sont hors programme.

Toutes les variables aléatoires mentionnées dans le programme sont implicitement supposées discrètes.

La notion de variable à densité est hors programme.

La notion d'espérance conditionnelle est hors programme.

B - Probabilités, variables aléatoires discrètes et lois usuelles

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Univers, événements, variables aléatoires discrètes	
Univers Ω , tribu $\mathcal{A}$. Espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.	On se limite à la définition et à la stabilité par les opérations ensemblistes finies ou dénombrables.
	Traduction de la réalisation des événements $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ à l'aide des quantificateurs $\exists$ et $\forall$.
Événements.	Généralisation du vocabulaire relatif aux événements introduit en première année.
Une variable aléatoire discrète X est une application définie sur Ω , telle que $X(\Omega)$ est au plus dénombrable et, pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\})$ est un événement.	L'univers Ω n'est en général pas explicité.
	Notations $(X = x)$, $\{X = x\}$, $(X \in A)$.
	Notation $(X \geq x)$ (et analogues) lorsque X est à valeurs réelles.
b) Probabilité	
Probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$, σ -additivité.	Notation $P(A)$.
Espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.	
Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire.	Application : pour une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements (non nécessairement monotone), limites quand n tend vers l'infini de $P\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right)$ et $P\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right)$.
Croissance de la probabilité.	
Continuité croissante, continuité décroissante.	
Sous-additivité : $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.	En cas de divergence de la série à termes positifs $\sum P(A_n)$, on rappelle que $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = +\infty.$
Événement presque sûr, événement négligeable.	Système quasi-complet d'événements.
c) Probabilités conditionnelles	
Si $P(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par la relation $P(A B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.	Si $(A_n)_{n \geq 0}$ est un système complet ou quasi-complet d'événements, alors $P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B A_n)P(A_n)$
L'application P_B définit une probabilité.	
Formule des probabilités composées.	On rappelle la convention $P(B A_n)P(A_n) = 0$ lorsque $P(A_n) = 0$.
Formule des probabilités totales.	
Formule de Bayes.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
d) Loi d'une variable aléatoire discrète	
Loi P_X d'une variable aléatoire discrète.	La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$.
Variable aléatoire $f(X)$.	On note $X \sim Y$ lorsque les variables X et Y suivent la même loi, sans soulever de difficulté sur cette notation.
Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.	On ne soulève aucune difficulté sur le fait que $f(X)$ est une variable aléatoire.
Variable géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$:	Notation $X \sim \mathcal{G}(p)$.
$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$.	Relation $P(X > k) = (1 - p)^k$.
Variable de Poisson de paramètre $\lambda > 0$:	Interprétation comme rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p .
$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.	Notation $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.
Couple de variables aléatoires discrètes.	Interprétation en termes d'événements rares.
Loi conjointe, lois marginales.	Un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire à valeurs dans un produit.
Loi conditionnelle de Y sachant un événement A .	Notation $P(X = x, Y = y)$.
	Extension aux n -uplets de variables aléatoires.
e) Événements indépendants	
Indépendance de deux événements.	Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B équivaut à $P(A B) = P(A)$.
Indépendance d'une famille finie d'événements.	L'indépendance deux à deux n'entraîne pas l'indépendance.
Si A et B sont indépendants, A et $\bar{B}$ le sont aussi.	Extension au cas de n événements.
f) Variables aléatoires indépendantes	
Deux variables aléatoires discrètes X et Y définies sur Ω sont indépendantes si, pour tout $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.	Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$.
	De façon équivalente, la distribution de probabilités de (X, Y) est donnée par $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$.
Suites de variables aléatoires indépendantes, suites i.i.d.	Extension au cas de n variables aléatoires.
Fonctions de variables indépendantes :	On ne soulève aucune difficulté quant à l'existence d'un espace probabilisé portant une suite i.i.d.
si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$.	Modélisation du jeu de pile ou face infini : suite i.i.d. de variables de Bernoulli.
Lemme des coalitions :	Extension au cas de plus de deux variables aléatoires.
si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi.	Extension au cas de plus de deux coalitions.

I. Expériences aléatoires, univers et probabilités

I.1. Vocabulaire des probabilités



Définition 15.1 – Expérience aléatoire

Une **expérience aléatoire** (ou épreuve aléatoire) est une expérience dont on ne peut pas prédire le résultat de manière certaine.



Exemple 15.1

Lancer de dé(s), lancer de pièce(s), tirage de cartes, évolution du cours de la bourse, comportement de particules physiques...



Définition 15.2 – Univers, résultat

On appelle **univers**, ou univers des possibles, l'ensemble de toutes les réalisations possibles d'une expérience aléatoire. Cet ensemble est noté Ω .

Un **résultat**, ou **issue**, ou **possible**, de l'expérience est un élément ω de Ω .



Exemple 15.2

- ▶ Le lancer d'un dé à 6 faces. L'univers est $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket$.
- ▶ Trois lancers d'un dé à 6 faces.
Si on s'intéresse au résultat des trois dés, alors l'univers est $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^3$.
Si on s'intéresse à la somme des résultats des 3 dés, alors l'univers est $\Omega = \llbracket 3, 18 \rrbracket$.
- ▶ Le lancer d'une pièce. L'univers est $\Omega = \{P, F\}$ (P = Pile et F = Face). On peut également utiliser l'univers $\Omega = \{0, 1\}$ en convenant que 1 correspond à pile et 0 à face.



Remarque 15.1

En pratique, il ne sera pas nécessaire de préciser l'univers Ω .



Remarque 15.2 – Notion d'évènements

Un événement associé à une expérience aléatoire est une combinaison de résultats de l'expérience.

Par exemple, « obtenir un résultat pair » lors d'un lancer de dé à 6 faces est un événement.

Pour écrire l'événement « obtenir un résultat pair » on utilise la notation ensembliste $\{2, 4, 6\}$.

On dit qu'un événement A est réalisé dans l'issue ω lorsque $\omega \in A$.



Exemple 15.3

Deux lancers d'une pièce (où l'univers choisi est $\Omega = \{(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)\}$). L'événement « obtenir deux fois le même résultat » est $\{(P, P), (F, F)\}$.

**Définition 15.3 – Événement certain, événement impossible et événements élémentaires**

Soit Ω un univers.

- l'ensemble Ω est appelé l'**événement certain** ;
- l'ensemble vide $\emptyset$ est appelé l'**événement impossible** ;
- pour tout $\omega \in \Omega$, le singleton $\{\omega\}$ est appelé **événement élémentaire**.

**Définition 15.4 – Opérations sur les événements**

Soient Ω un univers et, A et B deux événements.

- L'**événement contraire** de A est l'ensemble $\bar{A}$.
- L'**événement** « A ou B » est l'ensemble $A \cup B$.
- L'**événement** « A et B » est l'ensemble $A \cap B$.

**Exemple 15.4**

On lance un dé à 6 faces (où l'univers choisi est $\llbracket 1, 6 \rrbracket$).

- L'événement contraire de l'événement « obtenir un résultat pair » ($\{2, 4, 6\}$) est l'événement « obtenir un résultat impair » ($\{1, 3, 5\}$).
- L'événement « obtenir un résultat pair » ($\{2, 4, 6\}$) ou « obtenir un résultat supérieur ou égal à 4 » ($\{4, 5, 6\}$) est l'événement $\{2, 4, 5, 6\}$.
- L'événement « obtenir un résultat pair » ($\{2, 4, 6\}$) et « obtenir un résultat supérieur ou égal à 4 » ($\{4, 5, 6\}$) est l'événement $\{4, 6\}$.

Remarque 15.3

1. L'événement « A ou B » se réalise si, et seulement si, A se réalise ou B se réalise. *On rappelle que le « ou » est inclusif.* Lorsque les deux événements A et B se réalisent simultanément, l'événement « A ou B » se réalise.
2. L'événement « A et B » se réalise si, et seulement si, A et B se réalisent simultanément.
3. L'événement contraire de « A ou B » est l'événement « $\bar{A}$ et $\bar{B}$ ».
4. L'événement contraire de « A et B » est l'événement « $\bar{A}$ ou $\bar{B}$ ».

**Définition 15.5 – Opérations sur les événements**

Soient Ω un univers, et A et B deux événements.

- On dit que les événements A et B sont **disjoints** (ou **incompatibles**) lorsque $A \cap B = \emptyset$.
- On dit que l'événement A **entraîne** l'événement B lorsque $A \subset B$.

Remarque 15.4

1. Deux événements sont disjoints lorsqu'ils ne peuvent se réaliser simultanément.
2. Un événement et son événement contraire sont disjoints.
3. Dire A entraîne B signifie que si A est réalisé, alors B est réalisé.

I.2. Vers la définition de probabilité

Remarque 15.5 – Approche fréquentiste (univers fini)

On s'intéresse à un événement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ de l'univers Ω (ensemble fini).

Comment mesurer les chances de voir se réaliser l'événement A ?

Une manière naturelle de tenter de répondre à la question est de répéter un grand nombre N de fois l'expérience aléatoire et de compter le nombre n_A de fois où l'événement A s'est réalisé. On note alors $p_A = \frac{n_A}{N}$.

L'événement contraire $\bar{A}$ s'est donc réalisé $N - n_A$ fois et on a alors $p_{\bar{A}} = 1 - p_A$.

L'événement certain Ω a été réalisé N fois, donc $p_{\Omega} = 1$.

On considère B un événement tel que A et B sont disjoints. On suppose que l'événement B s'est réalisé n_B fois lors des N répétitions de l'expérience aléatoire.

L'événement $A \cup B$ s'est donc réalisé $n_A + n_B$ fois. Donc, $p_{A \cup B} = p_A + p_B$.

Définition 15.6 – Probabilité sur un univers fini

Une probabilité sur un univers **fini** Ω est une application $\mathbb{P}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0, 1]$ vérifiant :

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
2. Si A et B sont deux événements disjoints, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

On dit alors que $(\Omega, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé **fini**.

Remarque 15.6 – Et lorsque Ω est infini ?

Il est difficile de définir une « probabilité » intéressante sur $\mathcal{P}(\Omega)$ tout entier. Nous allons être obligé de définir une nouvelle notion pour parler d'événement (autrement dit d'ensemble dont on veut pouvoir calculer les « chances » de se réaliser).

Définition 15.7 – Tribu

Soit Ω un ensemble. On appelle **tribu** sur Ω une partie $\mathcal{F}$ de l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω telle que :

- $\Omega \in \mathcal{F}$,
- pour tout $A \in \mathcal{F}$, $\bar{A} = \Omega \setminus A$, le complémentaire de A , appartient à $\mathcal{F}$ (on dit que $\mathcal{F}$ est stable par passage au complémentaire),
- pour toute suite $(A_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{F}$, la réunion $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ appartient à $\mathcal{F}$ (on dit que $\mathcal{F}$ est stable par réunion dénombrable).

Les éléments de $\mathcal{F}$ sont appelés **événements** et on dit que le couple $(\Omega, \mathcal{F})$ est un espace probabilisable.

Exemple 15.5

- $\{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu sur Ω , appelée tribu triviale.
- $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω .
- Soit $A \subset \Omega$. L'ensemble $\{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$ est une tribu (dite engendrée par A).
- Lorsque Ω est fini ou dénombrable on utilise la tribu $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

 Remarque 15.7

L'ensemble $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ désigne l'ensemble des éléments de Ω qui appartiennent au moins à un des événements A_n .
Autrement dit :

$$\omega \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \iff \exists n \in \mathbb{N}, \omega \in A_n.$$

**Proposition 15.1**

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilisable.

► $\emptyset \in \mathcal{F}$

► Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événement de $\mathcal{F}$, alors $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{F}$ (on dit que $\mathcal{F}$ est stable par intersection dénombrable).

Démonstration

► On a $\emptyset = \overline{\Omega}$.

► On a $\overline{\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{F}$ et $\mathcal{F}$ est stable par passage au complémentaire et union dénombrable. □

 Remarque 15.8

L'ensemble $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ désigne l'ensemble des éléments de Ω qui appartiennent à tous les événements A_n .
Autrement dit :

$$\omega \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \iff \forall n \in \mathbb{N}, \omega \in A_n.$$

 Remarque 15.9

En particulier, quitte à prendre une infinité d'événements égaux, une tribu est stable par réunion et intersection finie.

**Définition 15.8 – Probabilité**

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilisable.

On appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{F})$ une application $\mathbb{P}: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ telle que :

► $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,

► (**σ -additivité**) pour toute suite $(A_n)_{n \geq 0}$ d'événements deux à deux disjoints,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

On appelle **espace probabilisé** un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ où $\mathcal{F}$ est une tribu et $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

 Remarque 15.10

Comme $\Omega = \bigcup_{\omega \in \Omega} \{\omega\}$ où les événements $\{\omega\}$ sont deux à deux disjoints et en nombre au plus dénombrable. Donc, par σ -additivité et positivité de $\mathbb{P}$,

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) \quad \text{et} \quad \forall \omega \in \Omega, 0 \leq \mathbb{P}(\{\omega\}) \leq 1.$$

**Définition 15.9 – Distribution de probabilités**

Soit I un ensemble au plus dénombrable.

Une **distribution de probabilités sur I** est une famille $(p_i)_{i \in I}$ de réels positifs ou nuls indexée par I et de somme 1.

 Remarque 15.11

Comme les réels p_i sont positifs et de somme 1, on a, pour tout $i \in I$, $p_i \in [0, 1]$.

 Exemple 15.6

En notant $p_1 = \frac{1}{3}$, $p_2 = \frac{1}{2}$ et $p_3 = \frac{1}{6}$, on a une distribution de probabilité $(p_i)_{i \in [1,3]}$.

**Théorème 15.1 – Détermination d'une probabilité par les images des singletons**

Soient Ω un univers au plus dénombrable et $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ une distribution de probabilités.

Alors, il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω telle que, pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega$.

De plus, pour tout événement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega.$$

Démonstration**Analyse.**

On suppose que $\mathbb{P}$ existe.

Soit A un événement. On peut écrire $A = \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}$. De plus, les événements de l'union sont deux à deux disjoints et en nombre au plus dénombrable (car A est une partie de Ω qui est au plus dénombrable). Donc, par σ -additivité,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} p_\omega.$$

Synthèse.

Pour tout événement A , on pose $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$.

- Pour tout $\omega' \in \Omega$: $\mathbb{P}(\{\omega'\}) = \sum_{\omega \in \{\omega'\}} p_\omega = p_{\omega'}$.
- Comme $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ est une distribution de probabilités : $\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$.
- Soit $(A_n)_{n \geq 0}$ une suite d'événements deux à deux disjoints.

On a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{\omega \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n} p_\omega.$$

Par sommation par paquets (famille sommable à termes positifs ou nuls),

$$\sum_{\omega \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n} p_\omega = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\omega \in A_n} p_\omega = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Donc, $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité. □

💡 Exemple 15.7

En notant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \frac{1}{en!}$, on a une distribution de probabilité $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

En effet, les p_n sont positifs ou nuls et, en reconnaissant une série exponentielle, donc convergente, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{en!} = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{e} \times e^1 = 1.$$



Exercice 15.1

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $p_n = \frac{\lambda}{2^n}$.

Déterminer λ pour que $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit une distribution de probabilité.

Résolution

La série géométrique $\sum \frac{1}{2^n}$ de raison $\left| \frac{1}{2} \right| < 1$ converge. Donc, la série $\sum p_n$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \lambda \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2\lambda.$$

En prenant $\lambda = \frac{1}{2}$, la famille $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien une distribution de probabilité.



Définition 15.10 – Probabilité uniforme sur un univers fini

Soit Ω un univers fini de cardinal n . L'unique probabilité sur Ω qui vérifie, pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{n}$ est appelée **probabilité uniforme** sur Ω .

Tous les événements élémentaires ont la même probabilité de se réaliser, on dit qu'ils sont **équiprobables**.

On a alors, pour toute partie A de Ω ,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{n} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}.$$

🔍 Remarque 15.12 – Quand peut-on considérer qu'il y a équiprobabilité lors d'une expérience aléatoire ?

- ▶ Lancer de pièce(s) équilibrée(s) ;
- ▶ Lancer de dé(s) équilibré(s) ;
- ▶ Tirage dans une urne où sont placées des boules indiscernables au toucher ;
- ▶ Plus généralement, lorsqu'une expérience est réalisée **au hasard**.

🔍 Remarque 15.13 – Lien avec le dénombrement

Soit Ω un univers fini muni de sa **probabilité uniforme**. La formule donnant $\mathbb{P}(A)$, pour un événement A , se résume en :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Nombre de cas favorables à } A}{\text{Nombre de cas total}}.$$

Le problème est alors ramené aux calculs du nombre d'éléments de A , donc du dénombrement.

💡 Exemple 15.8

On tire 5 cartes au hasard dans un paquet de 52 cartes.

L'univers Ω est l'ensemble des parties à 5 éléments du paquet de cartes. On a donc $\text{Card}(\Omega) = \binom{52}{5}$.

Le tirage est effectué au hasard, on munit Ω de la probabilité uniforme.

On note A l'événement « exactement 2 As sont tirés ». On a $\text{Card}(A) = \binom{4}{2} \binom{48}{3}$

Donc,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{4}{2} \binom{48}{3}}{\binom{52}{5}}.$$

I.3. Propriétés d'une probabilité

🔗 Théorème 15.2 – Propriétés d'une probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. On a : $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
2. Soit $n \geq 1$.

Si $A_1, \dots, A_n$ sont des événements deux à deux disjoints, alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$.

3. Pour tout événement A , on a

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A).$$

4. Pour tous $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$ tels que $A \subset B$, on a :

$$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B) \quad (\text{croissance de la probabilité}) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A).$$

5. Pour tous événements A et B , on a :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

En particulier, $\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

6. Soient $n \geq 1$ et $A_1, \dots, A_n$ des événements. On a : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$.

Démonstration

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \emptyset$.

Les événements A_n sont deux à deux disjoints et $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \emptyset$. Donc, $\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\emptyset)$.

D'où, la série à termes constants $\sum \mathbb{P}(\emptyset)$ converge, donc tous ses termes sont nuls : $\mathbb{P}(\emptyset)$.

2. Pour tout entier $i > n$, on pose $A_i = \emptyset$.

On a alors, $\bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ et les événements de la suite $(A_n)_{n \geq 0}$ sont deux à deux disjoints.

Donc, comme $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i).$$

3. On a $\Omega = A \cup \bar{A}$ et les événements A et $\bar{A}$ sont disjoints, donc $\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A})$. Comme $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, on a l'égalité voulue.

4. On a $B = A \cup (B \setminus A)$ et les événements A et $B \setminus A$ sont disjoints, donc $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A)$.

D'où l'égalité voulue. L'inégalité découle de $\mathbb{P}(B \setminus A) \in [0, 1]$.

5. On a $A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus (A \cap B))$ et les événements $A \setminus (A \cap B)$, $A \cap B$ et $B \setminus (A \cap B)$ sont disjoints, donc $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \setminus (A \cap B)) + \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \setminus (A \cap B))$.

Or, $A \cap B \subset A$, donc par le point précédent, $\mathbb{P}(A \setminus (A \cap B)) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

De même, $\mathbb{P}(B \setminus (A \cap B)) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Ainsi, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

On sait que $\mathbb{P}(A \cap B) \geq 0$, donc $\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

6. Par le point précédent, on a : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cup A_n\right) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) + \mathbb{P}(A_n)$. Puis on conclut par récurrence. $\square$

L'ensemble des réalisations de l'expérience aléatoire pour lesquelles le résultats est dans A .

**Notation 15.1 – Événement presque sûr, événement négligeable**

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et A un événement.

- Lorsque $\mathbb{P}(A) = 1$, on dit que A est un événement presque sûr.
- Lorsque $\mathbb{P}(A) = 0$, on dit que A est un événement négligeable.

**Théorème 15.3**

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

- **Continuité croissante** : si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements (c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$), alors :

$$\mathbb{P}(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right).$$

- **Continuité décroissante** : si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements (c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$), alors :

$$\mathbb{P}(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right).$$

- **Sous-additivité** : si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements, alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Démonstration

Faire des dessins !

- On pose $B_0 = A_0 \in \mathcal{F}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1} \in \mathcal{F}$.

Les événements de la suite $(B_n)_{n \geq 0}$ sont deux à deux disjoints et $\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$.

Donc, par définition de (B_n) , on a : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(A_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n \setminus A_{n-1})$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_{n-1} \subset A_n$ (suite croissante d'événements), donc $\mathbb{P}(A_n \setminus A_{n-1}) = \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_{n-1})$.

D'où, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \mathbb{P}(A_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} (\mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_{n-1}))$.

Or (somme télescopique), $\mathbb{P}(A_0) + \sum_{n=1}^N (\mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_{n-1})) = \mathbb{P}(A_0) + (\mathbb{P}(A_N) - \mathbb{P}(A_0)) = \mathbb{P}(A_N)$.

D'où, $\mathbb{P}(A_N) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$.

► On pourrait mener un raisonnement similaire, mais on peut aussi utiliser le théorème précédent :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}\right).$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{A_n} \in \mathcal{F}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$ implique $\overline{A_n} \subset \overline{A_{n+1}}$.

On en déduit que la suite d'événements $(\overline{A_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion. Donc,

$$\mathbb{P}(\overline{A_n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}\right).$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\overline{A_n}) = 1 - \mathbb{P}(A_n)$.

Donc, $\mathbb{P}(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$.

► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $B_n = \bigcup_{k=0}^n A_k \in \mathcal{F}$ (stabilité par union finie d'une tribu).

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n \subset B_{n+1}$.

Donc, par continuité croissante, $\mathbb{P}(B_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k\right)$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(B_n) \leq \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(A_k)$.

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente et en remarquant que $\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k = \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k$, on obtient le résultat voulu. $\square$

Remarque 15.14

La série $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ est une série à termes positifs, donc, sa suite des sommes partielles est croissante.

Par le théorème de la limite monotone, si $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ diverge, sa suite des sommes partielles diverge vers $+\infty$.

Dans ce cas, on pose $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$, de sorte que, l'inégalité dans la sous-additivité a encore un sens.



Exercice 15.2

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille d'événements.

1. Montrer que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$.

2. Montrer que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$.

Résolution

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $B_n = \bigcup_{k=0}^n A_k$.

La suite (B_n) est croissante pour l'inclusion $(B_n \subset B_{n+1})$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{k=0}^n A_k = \bigcup_{k=0}^n B_k$.

Donc, par continuité croissante,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^n B_k\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k\right)$$

De plus,

$$\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k = \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k.$$

Donc,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $B_n = \bigcap_{k=0}^n A_k$.

La suite (B_n) est décroissante pour l'inclusion $(B_{n+1} \subset B_n)$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\bigcap_{k=0}^n A_k = \bigcap_{k=0}^n B_k$.

Donc, par continuité croissante,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^n B_k\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} B_k\right)$$

De plus,

$$\bigcap_{k=0}^{+\infty} B_k = \bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k.$$

Donc,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$$

I.4. Variables aléatoires

Remarque 15.15

En général, pour décrire efficacement les événements associés à une expérience aléatoire, on utilise une application qui à une issue associe une valeur.

Par exemple, lorsqu'on lance deux dés, on peut s'intéresser au nombre de 5 obtenus. On considère alors une application qui à une issue (autrement dit, un lancer) associe le nombre de 5 obtenus.

On parle alors de **variable aléatoire**.



Définition 15.11 – Variable aléatoire

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilisable et E un ensemble quelconque.

On dit qu'une application $X : \Omega \rightarrow E$ est une **variable aléatoire discrète sur** $(\Omega, \mathcal{F})$ lorsque :

- L'ensemble des valeurs possibles de X est au plus dénombrable. Autrement dit, $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.
- Pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{F}$.

De plus, pour tout $A \subset X(\Omega)$, on a $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$.

Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, on dit que X est une variable aléatoire réelle.

Remarque 15.16 – Justification de : « pour tout $A \subset X(\Omega)$, on a $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ »

Soit $A \subset X(\Omega)$.

L'ensemble $X(\Omega)$ est au plus dénombrable et $A \subset X(\Omega)$. Donc, A est au plus dénombrable.

De plus, $X^{-1}(A) = \bigcup_{x \in A} X^{-1}(\{x\})$. De plus, pour tout $x \in A$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{F}$.

D'où, comme A est au plus dénombrable, A s'écrit comme une union finie ou dénombrable d'éléments de $\mathcal{F}$. Donc, $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$.

Remarque 15.17

1. Une variable aléatoire n'est ni une variable ni aléatoire !
2. L'ensemble $X(\Omega)$ est l'ensemble des valeurs prises par X et est appelé le **support de la variable aléatoire**.
3. L'ensemble $X^{-1}(\{x\})$ est l'ensemble des issues $\omega \in \Omega$ tels que $X(\omega) = x$.
4. Si Ω est fini ou dénombrable et $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, alors les deux conditions de la définition sont automatiquement vérifiées.

Exemple 15.9

1. Tirage simultané de 5 cartes dans un jeu de 52 cartes.
On peut s'intéresser à la variable aléatoire X qui à un tirage associe le nombre d'As obtenus. Dans ce cas, $X(\Omega) = \llbracket 0, 4 \rrbracket$.
2. Lancer de deux dés discernables.
On s'intéresse à la somme des résultats des deux dés. L'univers est $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$ et on considère à la variable aléatoire S :

$$\begin{aligned} \Omega &\rightarrow \llbracket 2, 12 \rrbracket \\ (a, b) &\mapsto a + b. \end{aligned}$$
3. On lance une infinité de fois une pièce. L'univers est $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$. On peut s'intéresser à la variable aléatoire X du premier pile obtenu. On a $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.
On remarque que Ω est non dénombrable mais que $X(\Omega)$ est dénombrable.

Notation 15.2

Soit Ω un univers et E un ensemble quelconque.

1. Soit $X : \Omega \rightarrow E$ une variable aléatoire discrète.

- Pour tout $A \subset X(\Omega)$, on note

$$(X \in A) = X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\},$$

Autrement dit, il s'agit de l'ensemble des issues pour lesquelles X prend une valeur qui appartient à A .

- Pour tout $x \in E$, on note

$$(X = x) = X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}.$$

Autrement dit, il s'agit de l'ensemble des issues pour lesquelles X prend la valeur x .

2. Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle discrète. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note :

- $(X \leq x) = X^{-1}([-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}.$
- $(X < x) = X^{-1}([-\infty, x[) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\}.$
- $(X \geq x) = X^{-1}([x, +\infty]) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geq x\}.$
- $(X > x) = X^{-1}(]x, +\infty]) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > x\}.$
- $(X \neq x) = X^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{x\}) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \neq x\}.$

Exemple 15.10

Lancer de deux dés discernables. On s'intéresse à la variable aléatoire S :

$$\begin{aligned} \Omega &\rightarrow \llbracket 2, 12 \rrbracket \\ (a, b) &\mapsto a + b. \end{aligned}$$

L'événement « la somme des résultats des deux dés est paire » est $(S \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\})$.

L'événement « la somme des résultats des deux dés est 5 » est $(S = 5)$.

Remarque 15.18

On a :

$$(X \in A) = \bigcup_{x \in A} (X = x).$$



Définition 15.12 – Variables aléatoires particulières

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

► Soient E un ensemble quelconque et $a \in E$. L'application

$$\begin{aligned} X: \Omega &\rightarrow E \\ \omega &\mapsto a \end{aligned}$$

est appelée **variable aléatoire certaine**, ou **constante**.

► Soit $A \in \mathcal{F}$. L'application

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A: \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A. \end{cases} \end{aligned}$$

est appelée **indicatrice de A** .

Remarque 15.19

La variable aléatoire indicatrice de A est à valeurs dans $\{0, 1\}$. De plus,

$$(\mathbb{1}_A = 1) = A \quad \text{et} \quad (\mathbb{1}_A = 0) = \overline{A}.$$

Exemple 15.11

Lancer d'un dé. L'univers considéré est $\llbracket 1, 6 \rrbracket$. La variable indicatrice de l'événement A « le dé est tombé sur une face paire » est :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A: \llbracket 1, 6 \rrbracket &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } \omega \text{ est impair.} \end{cases} \end{aligned}$$

II. Probabilités conditionnelles

II.1. Définition

🔔 Remarque 15.20 – Le jeu de Monty Hall

► Le jeu oppose un présentateur à un candidat (le joueur). Ce joueur est placé devant trois portes fermées. Derrière l'une d'elles se trouve une voiture et derrière chacune des deux autres se trouve une chèvre. Il doit tout d'abord désigner une porte.

A priori, le joueur a une probabilité de $\frac{1}{3}$ d'avoir choisi la porte derrière laquelle se trouve la voiture.

► Puis le présentateur doit ouvrir une porte qui n'est ni celle choisie par le candidat, ni celle cachant la voiture (le présentateur sait quelle est la bonne porte dès le début). Le candidat a alors le droit d'ouvrir la porte qu'il a choisie initialement, ou d'ouvrir la troisième porte.

Quelle stratégie doit adopter le joueur pour avoir le plus de chance de repartir avec une voiture ?

Vous pouvez simuler 100 essais sur le site suivant : <http://sorciersdesalem.math.cnrs.fr/Vulgarisation/Hall/hall.html>
Les plus téméraires essaieront de simuler ce jeu sur python (vous pouvez utiliser le module random et la fonction randint).

Cet exemple montre que le fait de savoir que l'événement « la voiture ne se trouve pas derrière cette porte » a ajouté de l'information ce qui modifie la probabilité de certains événements.

🔔 Remarque 15.21 – Approche fréquentiste (univers fini)

On s'intéresse à deux événements $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ de l'univers Ω .

On répète n fois la même expérience aléatoire et on s'intéresse à la probabilité de A sous l'hypothèse que l'événement B est réalisé. La « chance » de voir A se réaliser est donc $\frac{n_{A \cap B}}{n_B} = \frac{n_{A \cap B}}{n} \times \frac{n}{n_B}$.



Définition 15.13 – Probabilité conditionnelle

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et B un événement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$.

Pour tout événement $A \in \mathcal{F}$, on appelle **probabilité conditionnelle de A sachant B** le réel

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

On trouve aussi la notation $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B)$.

🔔 Remarque 15.22

► La relation de la définition se réécrit :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \times \mathbb{P}(B).$$

► Lorsque $\mathbb{P}(B) = 0$, on pose par convention $\mathbb{P}(A|B) \times \mathbb{P}(B) = 0$. L'égalité précédente est alors encore valable (Attention : écrire seulement $\mathbb{P}(A|B)$ n'a pas de sens dans ce cas !).

Théorème 15.4

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et B un événement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$.

L'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_B : \mathcal{F} &\rightarrow [0, 1] \\ A &\mapsto \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B) \end{aligned}$$

est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

Démonstration

► On a $\mathbb{P}(\Omega|B) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$.

► Soit $(A_n)_{n \geq 0}$ une suite d'événements deux à deux disjoints. On a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \middle| B\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \cap B\right)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} (A_n \cap B)\right)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Or, les événements de la suite $(A_n \cap B)_{n \geq 0}$ sont deux à deux disjoints. Donc,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \middle| B\right) = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{P}(A_n \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n|B).$$

□

Remarque 15.23

En particulier, on a :

1. On a : $\mathbb{P}(\emptyset|B) = 0$.
2. Soit $n \geq 1$. Si $A_1, \dots, A_n$ sont des événements deux à deux disjoints, alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \middle| B\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i|B)$.
3. Pour tout $A \in \mathcal{F}$, on a : $\mathbb{P}(\bar{A}|B) = 1 - \mathbb{P}(A|B)$.
4. Pour tous $A_1 \in \mathcal{F}$ et $A_2 \in \mathcal{F}$, on a : $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2|B) = \mathbb{P}(A_1|B) + \mathbb{P}(A_2|B) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2|B)$.
5. On peut utiliser les propriétés de continuité croissante, continuité décroissante et sous-additivité $\mathbb{P}_B$.

II.2. Propriétés des probabilités conditionnelles**Théorème 15.5 – Formule des probabilités composées**

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A_1, \dots, A_n$ des événements tels que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \neq 0$.

Alors,

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2|A_1) \times \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \times \dots \times \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Démonstration

Pour tout $j \in [1, n-1]$, on a $\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i \subset \bigcap_{i=1}^j A_i$, donc, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^j A_i\right) \geq \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) > 0$.

Toutes les probabilités conditionnelles de la formule ont alors un sens. De plus,

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2|A_1) \times \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \times \dots \times \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \\ &= \mathbb{P}(A_1) \times \frac{\mathbb{P}(A_2 \cap A_1)}{\mathbb{P}(A_1)} \times \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)} \times \dots \times \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n)}{\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})}. \end{aligned}$$

La formule des probabilités composées s'ensuit par télescopage. □

💡 Exemple 15.12

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules vertes et n boules rouges. On pioche successivement et sans remise les boules, que l'on suppose indiscernables au toucher, de l'urne jusqu'à vider l'urne.

Calculons la probabilité de vider l'urne en alternant boule verte et boule rouge.

Soit A l'événement dont on souhaite calculer la probabilité. Pour tout $i \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$, on introduit les événements R_i : « on pioche une boule rouge au i -ème tirage » et V_i : « on pioche une boule verte au i -ème tirage ». Ainsi,

$$A = (R_1 \cap V_2 \cap R_3 \cap \cdots \cap V_{2n}) \cup (V_1 \cap R_2 \cap V_3 \cap \cdots \cap R_{2n}).$$

Les deux événements de l'union sont disjoints, on a

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(R_1 \cap V_2 \cap R_3 \cap \cdots \cap V_{2n}) + \mathbb{P}(V_1 \cap R_2 \cap V_3 \cap \cdots \cap R_{2n}).$$

Les couleurs rouge et verte jouent des rôles symétriques, donc on a :

$$\mathbb{P}(R_1 \cap V_2 \cap R_3 \cap \cdots \cap V_{2n}) = \mathbb{P}(V_1 \cap R_2 \cap V_3 \cap \cdots \cap R_{2n}).$$

Comme $\mathbb{P}(R_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap R_{2n-1}) > 0$, la formule des probabilités composées donne

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R_1 \cap V_2 \cap R_3 \cap \cdots \cap V_{2n}) &= \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}(V_2 | R_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(V_{2n} | R_1 \cap V_2 \cap R_3 \cap \cdots \cap R_{2n-1}) \\ &= \frac{n}{2n} \times \frac{n}{2n-1} \times \cdots \times \frac{1}{1} \\ &= \frac{(n!)^2}{(2n)!} \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{P}(A) = \frac{2(n!)^2}{(2n)!}$.

📌 Méthode 15.1 – Quand utiliser la formule des probabilités composées ?

On peut utiliser la formule des probabilités composées pour calculer la probabilité d'un événement qui s'écrit comme une intersection. C'est le cas lorsque l'événement décrit une succession d'événements (tirages successifs dans une urne par exemple).

📖 Définition 15.14 – Système complet d'événements

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(B_i)_{i \in I}$ une famille d'événements indexée par un ensemble I au plus dénombrable.

On dit que $(B_i)_{i \in I}$ est un **système complet d'événements** de Ω lorsque :

1. pour tout $i \in I$, $B_i \in \mathcal{F}$.
2. pour tout $(i, j) \in I^2$, si $i \neq j$, alors B_i et B_j sont disjoints (autrement dit, $B_i \cap B_j = \emptyset$).
3. $\Omega = \bigcup_{i \in I} B_i$.

On dit que $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est un **système quasi-complet d'événements** de Ω lorsque :

1. pour tout $i \in I$, $B_i \in \mathcal{F}$.
2. pour tout $(i, j) \in I^2$, si $i \neq j$, alors B_i et B_j sont disjoints (autrement dit, $B_i \cap B_j = \emptyset$).
3. $\sum_{i \in I} \mathbb{P}(B_i) = 1$.

Remarque 15.24

La différence entre un système complet d'événement et une partition de Ω est qu'on ne suppose pas les B_i non vide.

Exemple 15.13 – Cas particuliers fréquemment rencontrés

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, A un événement et X une variable aléatoire discrète sur Ω .

- La famille $(A, \bar{A})$ est un système complet d'événements.
- La famille $((X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements.

Théorème 15.6 – Formule des probabilités totales

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(B_i)_{i \in I}$ un système complet ou quasi-complet d'événements.

Pour tout $A \in \mathcal{F}$, on a :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A \cap B_i) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A|B_i) \times \mathbb{P}(B_i),$$

où $\mathbb{P}(A|B_i) \times \mathbb{P}(B_i) = 0$ lorsque $\mathbb{P}(B_i) = 0$.

Démonstration

(Cas d'un système complet d'événements).

Les événements de la suite $(A \cap B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sont deux à deux disjoints et $A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (A \cap B_n)$.

Donc, par σ -additivité,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} (A \cap B_n)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A \cap B_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A|B_n) \times \mathbb{P}(B_n).$$

□

Proposition 15.2 – Cas particuliers importants

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Soit $B \in \mathcal{F}$.

Pour tout $A \in \mathcal{F}$, on a :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B) \times \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|\bar{B}) \times \mathbb{P}(\bar{B})$$

2. Soit X une variable aléatoire discrète sur Ω .

Pour tout $A \in \mathcal{F}$, on a :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(A|X=x) \times \mathbb{P}(X=x)$$

Démonstration

1. On considère le système complet d'événements $(B, \bar{B})$.
2. On considère le système complet d'événements $((X = x))_{x \in X(\Omega)}$.

□

Exemple 15.14

Soit $n \geq 2$ un entier. On dispose de n urnes numérotées de 1 à n . L'urne $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ contient k boules blanches et $n - k$ boules noires. On choisit une urne au hasard et on pioche simultanément deux boules dans cette urne. Calculons la probabilité d'obtenir deux boules blanches.

Soit A l'événement dont on souhaite calculer la probabilité.

On note U la variable aléatoire correspondant au numéro de l'urne choisie. La variable aléatoire U est à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

L'urne est choisie au hasard, donc on est dans le cadre de l'équiprobabilité et, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbb{P}(U = k) = \frac{1}{n}$. Comme $((U = 1), \dots, (U = n))$ est un système complet d'événements, la formule des probabilités totales donne

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A|U = k) \times \mathbb{P}(U = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A|U = k).$$

Les boules de l'urne k sont indiscernables au toucher, donc on est dans le cadre de l'équiprobabilité. De plus, les boules sont tirées simultanément donc on ne tient pas compte de l'ordre.

Donc, lorsque l'on pioche deux boules dans l'urne k , le nombre total de tirages est $\binom{n}{2}$ et le nombre de cas favorable est $\binom{k}{2}$.

Ainsi,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\binom{k}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{1}{n^2(n-1)} \sum_{k=1}^n k(k-1).$$

Or, $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, après calculs, on a

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n+1}{3n}.$$



Méthode 15.2 – Quand utiliser la formule des probabilités totales ?

On peut utiliser la formule des probabilités totales pour calculer la probabilité d'un événement qui peut être décrit à l'aide d'une disjonction de cas.



Théorème 15.7 – Formule de Bayes

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et A et B deux événements de probabilités non nulles. On a :

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B) \times \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Démonstration

On a :

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|B) \times \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Le famille $(B, \overline{B})$ est un système complet d'événements. Donc,

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B) \times \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B) \times \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|\overline{B}) \times \mathbb{P}(\overline{B})}$$

□

Remarque 15.25 Formule de Bayes

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, A un événement et $(B_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements. On suppose que $\mathbb{P}(A) > 0$.

Alors, pour tout $i \in I$, en appliquant la formule de Bayes, puis la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_i) \times \mathbb{P}(B_i)}{\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A|B_j) \times \mathbb{P}(B_j)}.$$

💡 Exemple 15.15 – Retour au problème de Monty-Hall

Considérons la situation suivante :

- Le candidat choisit la porte 1.
- L'animateur ouvre le porte 2.

Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, on note A_i l'événement « la voiture est derrière la porte i » et O l'événement « l'animateur ouvre la porte 2 ».

Calculons la probabilité que la voiture se trouve derrière la porte 3 sachant que la porte 2 a été ouverte, autrement dit $\mathbb{P}(A_3|O)$.

La famille (A_1, A_2, A_3) est un système complet d'événement. Par la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}(A_3|O) = \frac{\mathbb{P}(O|A_3) \times \mathbb{P}(A_3)}{\mathbb{P}(O|A_1) \times \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(O|A_2) \times \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(O|A_3) \times \mathbb{P}(A_3)}.$$

Initialement la voiture a 1 chance sur 3 de se trouver derrière chaque porte. Donc, $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_3) = \frac{1}{3}$.

De plus,

- Sachant que la voiture se trouve derrière la porte 1, l'animateur ouvre au hasard la porte 2 ou 3. Donc, $\mathbb{P}(O|A_1) = \frac{1}{2}$.
- Sachant que la voiture se trouve derrière la porte 2, la probabilité que l'animateur ouvre cette porte est nulle. Donc, $\mathbb{P}(O|A_2) = 0$.
- Sachant que la voiture se trouve derrière la porte 3, l'animateur ouvre nécessairement la porte 2. Donc, $\mathbb{P}(O|A_3) = 1$.

D'où,

$$\mathbb{P}(A_3|O) = \frac{1 \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3}} = \frac{2}{3}.$$

De plus, $\mathbb{P}(A_2|O) = 0$. Donc, $\mathbb{P}(A_1|O) = \frac{1}{3}$.

La stratégie optimale est donc de **changer de porte**.

III. Loi d'une variable aléatoire

Dans toute cette partie, on considère $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, E un ensemble quelconque et $X : \Omega \rightarrow E$ une variable aléatoire discrète.

III.1. Définition

Remarque 15.26

Comme X est discrète, son support est au plus dénombrable, et on le note $X(\Omega)$. On munit cet ensemble $X(\Omega)$ de la tribu $\mathcal{P}(X(\Omega))$.

Théorème 15.8

L'application

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_X : \mathcal{P}(X(\Omega)) &\rightarrow [0, 1] \\ A &\mapsto \mathbb{P}(X \in A). \end{aligned}$$

est une probabilité sur $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$.

Démonstration

On vérifie les conditions de la définition 15.8 page 7.

► Pour tout $A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$, $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) \in [0, 1]$.

► On a $(X \in X(\Omega)) = \Omega$, donc, $\mathbb{P}_X(X(\Omega)) = \mathbb{P}(X \in X(\Omega)) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.

► Soit $(B_n)_{n \geq 0}$ de parties de $\mathcal{P}(X(\Omega))$ deux à deux disjointes.

On remarque :

$$\left(X \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n \right) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (X \in B_n).$$

Donc,

$$\mathbb{P}_X \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n \right) = \mathbb{P} \left(X \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n \right) = \mathbb{P} \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} (X \in B_n) \right)$$

De plus, comme les B_n sont deux à deux disjointes, les événements $(X \in B_n)$ sont deux à deux disjointes.

Donc, comme $\mathbb{P}$ est une probabilité,

$$\mathbb{P}_X \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X \in B_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_X(B_n).$$

□

Définition 15.15 – Loi d'une variable aléatoire

La probabilité $\mathbb{P}_X : A \mapsto \mathbb{P}(X \in A)$ est appelée **loi de X** .

Exemple 15.16

Lancer d'une pièce équilibrée. L'espace probabilisé utilisé est l'univers $\Omega = \{P, F\}$ muni de la probabilité uniforme sur Ω . On note X la variable aléatoire qui donne le résultat du lancer. La loi de X est :

$$\mathbb{P}(X \in \Omega) = 1, \quad \mathbb{P}(X = F) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(X = P) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X \in \emptyset) = 0.$$

Remarque : ici, la variable aléatoire est $X : \Omega \rightarrow \Omega$. Il s'agit de l'application identité sur Ω .

$$\omega \mapsto \omega$$

Théorème 15.9

La probabilité $\mathbb{P}_X$ est déterminée par la distribution de probabilités $(\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$.

De plus, on a :

$$\forall A \in \mathcal{P}(X(\Omega)), \quad \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x).$$

Démonstration

Pour tout $A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$, par double inclusion, on a $(X \in A) = \bigcup_{x \in A} (X = x)$.

Or, les événements $(X = x)$ sont deux à deux disjoints et en nombre au plus dénombrable, donc,

$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x).$$

□

Théorème 15.10

Soit $(p_i)_{i \in I}$ une distribution de probabilité (où I est un ensemble au plus dénombrable).

Il existe X une variable aléatoire discrète telle que, pour tout $i \in I$, $\mathbb{P}(X = i) = p_i$.

Démonstration

Par le théorème 15.1 page 8, il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(I, \mathcal{P}(I))$.

L'application $X = \text{id}_I$ convient. En effet,

- ▶ $X(I) = I$ est au plus dénombrable.
- ▶ Pour tout $i \in I$, $(X = i) = \{j \in I \mid X(j) = i\} = \{j \in I \mid j = i\} = \{i\}$.
- ▶ Pour tout $i \in I$, $\mathbb{P}(X = i) = \mathbb{P}(\{i\}) = p_i$.

Méthode 15.3 – Déterminer la loi d'une variable aléatoire

Déterminer la loi de X revient à :

1. déterminer $X(\Omega)$;
2. pour tout $x \in X(\Omega)$, calculer $\mathbb{P}(X = x)$.

Remarque 15.27

Quand on travaille avec une variable aléatoire $X : \Omega \rightarrow E$, l'univers Ω et la probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω n'ont plus de réelle importance. Ce qui important est de connaître $X(\Omega)$, le support de X , et $\mathbb{P}_X$, sa loi.

Remarque 15.28

On travaille parfois avec un ensemble contenant $X(\Omega)$ plutôt qu'avec $X(\Omega)$. C'est le cas en particulier lorsqu'on travaille sur les couples de variables aléatoires (voir paragraphe ultérieur).

Exemple 15.17

On note S la somme des résultats d'un lancer de deux dés équilibrés à 6 faces et discernables (ils sont de couleurs différentes par exemple). S est une variable aléatoire et sa loi est :

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(S = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

Notation 15.3 – Variables aléatoires de même loi

Lorsque deux variables aléatoires X et Y ont la même loi (autrement dit, lorsque $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$), on écrit $X \sim Y$.

III.2. Composée d'une application et d'une variable aléatoire

Notation 15.4

Soient F un ensemble et $f : X(\Omega) \rightarrow F$ une application.
La variable aléatoire discrète $f \circ X : \Omega \rightarrow F$ est notée $f(X)$.

Théorème 15.11

Soient F un ensemble et $f : X(\Omega) \rightarrow F$ une application. On note $Y = f(X)$.

On a :

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \mathbb{P}(X = x) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \text{tel que } y=f(x)}} \mathbb{P}(X = x)$$

Autrement dit, la loi de Y se déduit de la loi de X .

Démonstration

On a :

$$(f(X) = y) = (X \in f^{-1}(\{y\})) = \bigcup_{x \in f^{-1}(\{y\})} (X = x).$$

De plus, $f^{-1}(\{y\})$ est une partie de $X(\Omega)$.

Comme X est discrète, $X(\Omega)$ est au plus dénombrable, donc, $f^{-1}(\{y\})$ aussi.

D'autre part, les événements $(X = x)$ sont deux à deux disjoints.

D'où le résultat par σ -additivité. □

Exemple 15.18

Soit X une variable aléatoire qui prend les valeurs -1 , 1 et 2 dont la loi est donnée par

x	-1	1	2
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

La variable aléatoire $Y = X^2$ prend les valeurs 1 et 4 . De plus,

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X = -1) + \mathbb{P}(X = 1) = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y = 4) = \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{4}.$$

Donc, sa loi est donnée par

y	1	4
$\mathbb{P}(Y = y)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

Théorème 15.12

Soient F un ensemble et $f : X(\Omega) \rightarrow F$ une application. On considère X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Si $X_1 \sim X_2$, alors $f(X_1) \sim f(X_2)$.

Démonstration

On sait que la loi de $f(X_1)$ se déduit de la loi de X_1 , et que la loi de $f(X_2)$ se déduit de la loi de X_2 .
Comme X_1 et X_2 ont la même loi, $f(X_1)$ et $f(X_2)$ ont la même loi. □

III.3. Loïs usuelles**Loi uniforme**

Lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité de se produire, on est dans le cadre de l'équiprobabilité.

 Définition 15.16

On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi uniforme sur l'ensemble fini** $F = \{x_1, \dots, x_n\}$, non vide, lorsque :

$$X(\Omega) = F \quad \text{et} \quad \forall x \in F, \quad \mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{\text{Card}(F)}.$$

On note $X \sim \mathcal{U}(F)$. La loi de X est :

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{\text{Card}(F)}$	$\frac{1}{\text{Card}(F)}$	$\dots$	$\frac{1}{\text{Card}(F)}$

 Exemple 15.19

1. On lance un dé équilibré et on note X le résultat du lancer du dé. La variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, 6 \rrbracket$.
2. Une urne contient n jetons indiscernables au toucher numérotés de 1 à n . On tire un jeton dans l'urne et on note X le numéro du jeton tiré. La variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Loi de Bernoulli **Définition 15.17 – Épreuve de Bernoulli**

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience à deux issues : « succès » (généralement modélisé par 1) et « échec » (généralement modélisé par 0).

 Définition 15.18 – Loi de Bernoulli de paramètre p

Soit $p \in]0, 1[$.

On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi de Bernoulli de paramètre p** lorsque :

$$X(\Omega) = \{0, 1\} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = 1) = p.$$

On note $X \sim \mathcal{B}(p)$.

 Exemple 15.20

1. Lancer d'une pièce dont la probabilité d'obtenir pile est p . On considère la variable aléatoire X qui vaut 1 si la pièce tombe sur pile et 0 sinon. On a : $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Remarque : la variable aléatoire $1 - X$ vaut 0 si la pièce tombe sur pile et 1 sinon, et cette variable aléatoire suit la loi $\mathcal{B}(1 - p)$.

2. Lancer d'un dé équilibré. On considère la variable aléatoire X qui vaut 1 si le dé tombe sur une face paire et 0 sinon. On a : $X \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.
3. On tire une boule dans une urne contenant a boules rouges et b boules vertes. On note X la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule tirée est verte et 0 sinon. La variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{B}\left(\frac{b}{a+b}\right)$.

**Proposition 15.3**

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ avec $\mathbb{P}(X \in A) \in]0, 1[$.

La variable aléatoire $\mathbb{1}_A$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$.

Démonstration

La variable aléatoire $\mathbb{1}_A$ est à valeurs dans $\{0, 1\}$. De plus, $(\mathbb{1}_A = 1) = A$ et $(\mathbb{1}_A = 0) = \bar{A}$.

Donc, $\mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 1) = \mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 0) = \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$. □

Loi binomiale **Définition 15.19 – Loi binomiale**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi binomiale de paramètres n et p** lorsque :

$$X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k}.$$

On note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

 Exemple 15.21

1. On lance n fois une pièce dont la probabilité d'obtenir pile est p . On considère la variable aléatoire X qui compte le nombre de fois où la pièce est tombée sur pile. On a : $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.
2. On tire avec remise n fois une boule dans une urne contenant a boules rouges et b boules vertes. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où la boule tirée est verte. La variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{B}\left(n, \frac{b}{a+b}\right)$.

Remarque 15.29 – Justification intuitive de la formule

Loi géométrique

Définition 15.20

Soit $p \in]0, 1[$. On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi géométrique de paramètre p** lorsque :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = k) = p \times (1 - p)^{k-1}.$$

On note $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Exemple 15.22

Le premier succès obtenu lors de la répétition d'un nombre illimité d'épreuves de Bernoulli de paramètre p indépendantes suit la loi géométrique de paramètre p .

Proposition 15.4

Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$. On a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X > k) = (1 - p)^k.$$

Démonstration

On remarque que

$$(X > k) = \bigcup_{j=k+1}^{+\infty} (X = j).$$

D'où, comme les événements $(X = j)$ sont deux à deux disjoints,

$$\mathbb{P}(X > k) = \sum_{j=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = j) = \sum_{j=k+1}^{+\infty} p(1-p)^j - 1 = \sum_{i=k}^{+\infty} p(1-p)^i = p \times \frac{(1-p)^k}{1-(1-p)} = (1-p)^k.$$

□

Exercice 15.3 – Loi sans mémoire

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe $p \in]0, 1[$ tel que $X \sim \mathcal{G}(p)$.
2. $\mathbb{P}(X = 1) \in]0, 1[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X > n) > 0$ et, pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$,

$$\mathbb{P}(X > n + k | X > n) = \mathbb{P}(X > k).$$

Une variable aléatoire vérifiant cette propriété est dite **sans mémoire**.

L'équivalence montre que les lois géométriques sont exactement les lois discrètes sans mémoire.

Résolution

► Montrons que (1) $\Rightarrow$ (2).

On a : $\mathbb{P}(X=1) = p \in]0, 1[$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} p \times (1-p)^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} p \times (1-p)^{n+k} = (1-p)^n \times p \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^k = (1-p)^n \times p \times \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^n > 0.$$

Enfin, pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$,

$$\mathbb{P}(X > n+k | X > n) = \frac{\mathbb{P}(X > n+k, X > n)}{\mathbb{P}(X > n)} = \frac{\mathbb{P}(X > n+k)}{\mathbb{P}(X > n)} = \frac{(1-p)^{n+k}}{(1-p)^n} = (1-p)^k = \mathbb{P}(X > k).$$

► Montrons que (2) $\Rightarrow$ (1).

On note $p = \mathbb{P}(X=1) \in]0, 1[$.

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X > n+1) = \mathbb{P}(X > n+1, X > n) = \mathbb{P}(X > n+1 | X > n) \times \mathbb{P}(X > n).$$

D'où, par absence de mémoire, $\mathbb{P}(X > n+1) = \mathbb{P}(X > 1) \times \mathbb{P}(X > n)$.

Or, $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Donc, $\mathbb{P}(X > 1) = 1 - \mathbb{P}(X=1) = 1-p$.

D'où, $\mathbb{P}(X > n+1) = (1-p) \times \mathbb{P}(X > n)$.

On en déduit que la suite $(\mathbb{P}(X > n))_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $(1-p)$ et de premier terme $\mathbb{P}(X > 0) = 1$.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X > n) = (1-p)^n$, puis, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k) = (1-p)^{k-1} - (1-p)^k = (1-p)^{k-1} \times (1-(1-p)) = p \times (1-p)^{k-1}.$$

Donc, $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Loi de Poisson



Définition 15.21 – Loi de Poisson

Soit $\lambda > 0$. On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi de Poisson de paramètres λ** lorsque :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^k}{k!}.$$

On note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Remarque 15.30 – Interprétation

On considère une suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs telle que $n \times p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda > 0$.

On considère, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, X_n une variable aléatoire binomiale de paramètres (n, p_n) .

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Déterminons la limite de $\mathbb{P}(X_n = k)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

On a :

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} \times p_n^k \times (1-p_n)^{n-k}.$$

De plus,

$$\binom{n}{k} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}{k!} \sim \frac{n^k}{k!} \quad \text{et} \quad p_n^k \sim \frac{\lambda^k}{n^k}.$$

D'autre part,

$$(1-p_n)^{n-k} = \exp((n-k) \times \ln(1-p_n)).$$

Or, $p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\ln(1-x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x$, donc,

$$(n-k) \times \ln(1-p_n) \sim n \times (-p_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\lambda.$$

Donc,

$$(1-p_n)^{n-k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\lambda}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(X_n = k) \sim \frac{n^k}{k!} \times \frac{\lambda^k}{n^k} \times e^{-\lambda} \sim e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Intuitivement, pour n assez grand, la loi de X_n est la loi de Poisson de paramètre λ .

Or, on sait que X_n représente le nombre de succès dans la répétition de n expériences de Bernoulli dont la probabilité de succès est p_n .

Comme $p_n \sim \frac{\lambda}{n}$ et n est grand, la probabilité de succès est faible.

La loi de Poisson est alors utilisée pour modéliser le nombre de fois où un événement de faible probabilité se produit. On parle d'**événements rares**.

III.4. Loi conditionnelle sachant un événement



Définition 15.22 – Loi conditionnelle sachant un événement

Soit A un événement de probabilité **non nulle**.

La **loi conditionnelle de X sachant A** est la probabilité :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(X(\Omega)) &\rightarrow [0, 1] \\ B &\mapsto \mathbb{P}(X \in B | A). \end{aligned}$$

Remarque 15.31

La loi conditionnelle de X sachant A est entièrement déterminée par la distribution de probabilité $(\mathbb{P}(X = x | A))_{x \in X(\Omega)}$.

Exemple 15.23

Soit $X \sim \mathcal{U}([1, 4n])$. Déterminons la loi de X sachant $(X \leq n)$.

On sait que X est à valeurs dans $[1, 4n]$, donc, on a :

$$(X \leq n) = \bigcup_{i=1}^n (X = i) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X \leq n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X = i).$$

D'où, par définition de la loi uniforme,

$$\mathbb{P}(X \leq n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4n} = \frac{1}{4}.$$

Remarque : la probabilité trouvée est non nulle, donc la loi conditionnelle de X sachant $(X \leq n)$ existe.

Soit $k \in [1, 4n]$.

- Cas 1 : $k \in [1, n]$. On a :

$$\mathbb{P}(X = k | X \leq n) = \frac{\mathbb{P}((X = k) \cap (X \leq n))}{\mathbb{P}(X \leq n)} = \frac{\mathbb{P}(X = k)}{\mathbb{P}(X \leq n)} = \frac{\frac{1}{4n}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{n}.$$

- Cas 2 : $k \in \llbracket n+1, 4n \rrbracket$. On a : $\mathbb{P}(X = k | X \leq n) = 0$.

Donc, la loi conditionnelle de X sachant $(X \leq n)$ est la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

III.5. Couple de variables aléatoires

Dans ce paragraphe, on considère $X : \Omega \rightarrow E$ et $Y : \Omega \rightarrow F$ deux variables aléatoires discrètes (où E et F sont deux ensembles quelconques).



Définition 15.23 – Couple de variable aléatoire

Le **couple de variables aléatoires** X et Y est la variable aléatoire

$$\begin{aligned} Z = (X, Y) : \Omega &\rightarrow E \times F \\ \omega &\mapsto (X(\omega), Y(\omega)). \end{aligned}$$

Lorsque $E \subset \mathbb{R}$ et $F \subset \mathbb{R}$, on dit que (X, Y) est un couple de variables aléatoires *réelles*.



Définition 15.24 – Loi d'un couple

La **loi conjointe** de X et Y est la loi de la variable aléatoire $Z = (X, Y)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(Z(\Omega)) &\rightarrow [0, 1] \\ C &\mapsto \mathbb{P}(Z \in C). \end{aligned}$$

C'est une probabilité sur $Z(\Omega)$.

Remarque 15.32 – Notation

Pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(X(\Omega)) \times \mathcal{P}(Y(\Omega))$, on note

$$\mathbb{P}((X, Y) \in A \times B) = \mathbb{P}((X \in A) \cap (Y \in B)) = \mathbb{P}(X \in A, Y \in B).$$

Pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, on note $\mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$.

Remarque 15.33

On a l'inclusion $Z(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$ et cette inclusion peut être stricte.

On en déduit que $\mathcal{P}(Z(\Omega)) \subset \mathcal{P}(X(\Omega) \times Y(\Omega))$. Pour déterminer la loi de Z , on cherche alors à calculer $\mathbb{P}((X, Y) \in A \times B)$ pour tout $A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$ et $B \in \mathcal{P}(Y(\Omega))$.

On a alors le résultat suivant.



Théorème 15.13

La loi d'un couple de variables aléatoires (X, Y) est déterminée de manière unique par la donnée des $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$, pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$. De plus, on a :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(X(\Omega)) \times \mathcal{P}(Y(\Omega)), \quad \mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \sum_{(x, y) \in A \times B} \mathbb{P}(X = x, Y = y).$$

Démonstration

Pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(X(\Omega)) \times \mathcal{P}(Y(\Omega))$, on montre par double inclusion que :

$$((X, Y) \in A \times B) = \bigcup_{(x, y) \in A \times B} (X = x) \cap (Y = y)$$

De plus, comme les événements de l'union sont deux à deux disjoints et en nombre au plus dénombrable (en effet A et B sont des parties d'ensembles au plus dénombrables car les variables aléatoires X et Y sont discrètes), on a :

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}((X, Y) \in A \times B) = \sum_{(x, y) \in A \times B} \mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)) = \sum_{(x, y) \in A \times B} \mathbb{P}(X = x, Y = y).$$

□

Méthode 15.4 – Déterminer la loi conjointe de deux variables aléatoires

Soient $X : \Omega \rightarrow E$ et $Y : \Omega \rightarrow F$ deux variables aléatoires. Déterminer la loi conjointe de X et Y revient à :

1. déterminer $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$;
2. pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, déterminer $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$.

Exemple 15.24

On considère la situation suivante : n urnes numérotées de 1 à n . L'urne k contient k boules numérotées de 1 à k . Les boules sont supposées indiscernables au toucher.

On choisit au hasard une urne et on tire une boule dans cette urne. On note X le numéro de l'urne choisie et Y le numéro de la boule tirée.

Déterminons la loi du couple de variable aléatoires $Z = (X, Y)$.

1. Les variables X et Y sont à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.
2. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$.

On a $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = 0$ si $i < j$.

Dans la suite, on suppose $i \geq j$. On a :

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \mathbb{P}(Y = j | X = i) \times \mathbb{P}(X = i).$$

Or, l'urne est choisie au hasard, donc, $\mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{n}$.

De plus, sachant l'urne i est choisie, la probabilité de tirer la boule j est $\frac{1}{i}$. En effet, les boules sont supposées indiscernables au toucher, donc on se place dans le cadre de l'équiprobabilité. Donc, $\mathbb{P}(Y = j | X = i) = \frac{1}{i}$.

Ainsi,

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{1}{n \times i}.$$

On peut alors déterminer la probabilité que le numéro de la boule tirée soit égal au numéro de l'urne choisie. Autrement dit, on peut calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

La famille $(\{X = i\})_{1 \leq i \leq n}$ est un système complet d'événements (on choisit une urne et une seule). Donc,

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X = Y, X = i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X = i, Y = i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n \times i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}.$$

Remarque 15.34 – Généralisation à des n -uplets de variables aléatoires

Soient $(X_1, \dots, X_n)$ des variables aléatoires.

L'application $\omega \mapsto (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$ est une variable aléatoire dont la loi est entièrement déterminée par la donnée de

$$\mathbb{P}((X_1 = x_1) \cap \dots \cap (X_n = x_n)) = \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$$

avec $x_1 \in X_1(\Omega), \dots, x_n \in X_n(\Omega)$.

Plus généralement, on note $\mathbb{P}((X_1 \in A_1) \cap (X_2 \in A_2) \cap \dots \cap (X_p \in A_p)) = \mathbb{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \dots, X_p \in A_p)$ où A_1 est une partie de $X_1(\Omega), \dots, A_p$ est une partie de $X_p(\Omega)$.



Définition 15.25 – Lois marginales

La loi de X et la loi de Y sont appelées les **lois marginales du couple** (X, Y) .

Théorème 15.14

Les lois marginales sont entièrement déterminées par la loi du couple (X, Y) :

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y),$$

et

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y).$$

Démonstration

Utiliser les systèmes complets d'événements $((X = x))_{x \in X(\Omega)}$ et $((Y = y))_{y \in Y(\Omega)}$.

□



Attention

La loi conjointe d'un couple détermine ses lois marginales. La réciproque est fausse !



Exemple 15.25 – Suite de l'exemple 15.24 page 31

Déterminons les lois marginales du couple $Z = (X, Y)$.

- La loi de X est donnée par l'énoncé : X est à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ et, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{n}$.
- Loi de Y .

1. La variable aléatoire Y est à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.
2. Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. La famille $((X = i))_{1 \leq i \leq n}$ est un système complet d'événements (on choisit une urne et une seule).
Donc,

$$\mathbb{P}(Y = j) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n \times i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}.$$

Remarque : on peut retrouver la loi de X à partir de la loi du couple de la même manière. La famille $((Y = j))_{1 \leq j \leq n}$ est un système complet d'événements. Donc,

$$\mathbb{P}(X = i) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \sum_{j=1}^i \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \sum_{j=1}^i \frac{1}{n \times i} = \frac{1}{n \times i} \sum_{j=1}^i 1 = \frac{1}{n}.$$

Remarque 15.36 – Généralisation à des n -uplets de variables aléatoires

Soient $(X_1, \dots, X_n)$ des variables aléatoires.

Pour tout $x_1 \in X_1(\Omega)$, on a :

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1) = \sum_{x_2 \in X_2(\Omega), \dots, x_n \in X_n(\Omega)} \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n).$$

On généralise la formule précédente aux autres variables aléatoires.

 Définition 15.26 – Loi conditionnelle

1. Pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X = x) > 0$, la **loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$** est la loi de Y pour la probabilité $\mathbb{P}_{(X=x)}$. Cette loi est entièrement déterminée par la donnée de :

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(Y = y | X = x) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(X = x)}.$$

2. Pour tout $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(Y = y) > 0$, la **loi conditionnelle de X sachant $(Y = y)$** est la loi de X pour la probabilité $\mathbb{P}_{(Y=y)}$. Cette loi est entièrement déterminée par :

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = x | Y = y) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)}.$$

 Exemple 15.26 – Suite de l'exemple 15.25 page 32

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. La loi de Y sachant $(X = i)$ est donnée par :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(Y = j | X = i) = \frac{1}{i}.$$

La connaissance des lois conditionnelles et des lois marginales permettent de retrouver la loi du couple.

 Proposition 15.5

1. La loi de X et les lois conditionnelles de Y sachant $(X = x)$, pour tout $x \in X(\Omega)$ vérifiant $\mathbb{P}(X = x) > 0$, déterminent entièrement la loi conjointe de X de Y et donc la loi de Y . En effet, on a :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \begin{cases} \mathbb{P}(Y = y | X = x) \times \mathbb{P}(X = x) & \text{si } \mathbb{P}(X = x) > 0 \\ 0 & \text{si } \mathbb{P}(X = x) = 0, \end{cases}$$

et

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \text{tel que } \mathbb{P}(X=x) > 0}} \mathbb{P}(Y = y | X = x) \times \mathbb{P}(X = x).$$

2. La loi de Y et les lois conditionnelles de X sachant $(Y = y)$, pour tout $y \in Y(\Omega)$ vérifiant $\mathbb{P}(Y = y) > 0$, déterminent entièrement la loi conjointe de X de Y et donc la loi de X . En effet, on a :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \begin{cases} \mathbb{P}(X = x | Y = y) \times \mathbb{P}(Y = y) & \text{si } \mathbb{P}(Y = y) > 0 \\ 0 & \text{si } \mathbb{P}(Y = y) = 0, \end{cases}$$

et

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \sum_{\substack{y \in Y(\Omega) \\ \text{tel que } \mathbb{P}(Y=y) > 0}} \mathbb{P}(X = x | Y = y) \times \mathbb{P}(Y = y).$$

Démonstration

1. Utiliser le système complet d'événements $((X = x))_{x \in X(\Omega)}$.
2. Utiliser le système complet d'événements $((Y = y))_{y \in Y(\Omega)}$.

□

IV. Indépendance

Dans toute cette partie, on considère $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

IV.1. Événements indépendants

Remarque 15.37

On considère deux événements A et B . Intuitivement, dire que A et B sont indépendants signifie que la probabilité de voir A se réaliser n'est pas influencée par le fait de savoir si B est réalisé ou non. Avec les notations précédentes, ceci signifie que $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$, ou encore que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.



Définition 15.27 – Événements indépendants

On dit que deux événements A et B sont indépendants lorsque :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

Théorème 15.15

Soient A et B deux événements. On suppose que $\mathbb{P}(B) > 0$.

Les événements A et B sont indépendants si, et seulement si, $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.

Démonstration

Conséquence immédiate de la définition de probabilité conditionnelle : $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$. □

Exemple 15.27

► On lance un dé équilibré à 6 faces. L'univers choisi est $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket$ muni de la probabilité uniforme.

On considère les événements A « obtenir un nombre pair » et B « obtenir un multiple de 3 ».

On a : $\text{Card}(\Omega) = 6$, $\text{Card}(A) = 3$, $\text{Card}(B) = 2$, $\text{Card}(A \cap B) = 1$. D'où,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

Les événements A et B sont indépendants.

► On lance de deux dés équilibrés à 6 faces. Un dé est rouge et un dé noir. Les dés sont discernables, l'univers choisi est donc $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$ muni de la probabilité uniforme.

On considère les événements A « la somme des numéros fait 6 », B « sur le dé rouge, on obtient un nombre pair ».

On a : $\text{Card}(\Omega) = 36$, $\text{Card}(A) = 5$, $\text{Card}(B) = 18$, $\text{Card}(A \cap B) = 2$. D'où,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{5}{36}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{18}{36} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{2}{36} \neq \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

Les événements A et B ne sont pas indépendants

Théorème 15.16

Soient A et B deux événements.

Si A et B sont indépendants, alors

1. A et $\bar{B}$ sont indépendants ;
2. $\bar{A}$ et B sont indépendants ;
3. $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.

Démonstration

► Montrons que A et $\bar{B}$ sont indépendants.

On sait que : $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$ et les événements $A \cap B$ et $A \cap \bar{B}$ sont disjoints. Donc,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B}).$$

Or, A et B sont indépendants, donc,

$$\mathbb{P}(A \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) \times (1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(\bar{B}).$$

- En échangeant les rôles de A et B , on a directement l'indépendance de $\bar{A}$ et B .
 ► Puis, en remplaçant B par $\bar{B}$, on obtient l'indépendance de $\bar{A}$ et $\bar{B}$. □



Définition 15.28 – Indépendance de n événements

Soient $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements.

On dit que les événements $(A_i)_{i \in I}$ sont **indépendants** lorsque, pour tout ensemble $J \subset I$ fini, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j).$$



Définition 15.29 – Indépendance deux à deux

Soient $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements.

On dit que les événements $(A_i)_{i \in I}$ sont **deux à deux indépendants** lorsque, pour tout $i \neq j$, les événements A_i et A_j sont indépendants.



Proposition 15.6

L'indépendance mutuelle entraîne l'indépendance deux à deux.

La réciproque est fausse (**Le contre-exemple est à connaître**).

Démonstration

► Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements mutuellement indépendants.

Soient $(i, j) \in I^2$ avec $i \neq j$. On applique la définition avec $J = \{i, j\}$. Il vient,

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k \in \{i, j\}} A_k\right) = \prod_{k \in \{i, j\}} \mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}(A_j).$$

Donc, les événements A_i et A_j sont indépendantes.

► On lance deux fois une pièce équilibrée. Les lancers étant successifs, l'univers choisi est $\Omega = \{P, F\}^2$ muni de la probabilité uniforme. On considère les événements A « obtenir pile au premier lancer », B « obtenir face au deuxième lancer » et C « on obtient deux fois la même résultat lors des deux lancers ».

On a :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0.$$

On a :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B), \quad \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(C), \quad \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \neq \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C).$$

Les événements A , B et C sont deux à deux indépendants mais ne sont pas mutuellement indépendants. □

IV.2. Variables aléatoires indépendantes

Cas de deux variables



Définition 15.30 – Variables aléatoires indépendantes

Soient $X : \Omega \rightarrow E$ et $Y : \Omega \rightarrow F$ deux variables aléatoires, où E et F sont deux ensembles quelconques.

On dit que les variables aléatoires X et Y sont **indépendantes** et on note $X \perp\!\!\!\perp Y$ lorsque :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y).$$



Théorème 15.17

Soient $X : \Omega \rightarrow E$ et $Y : \Omega \rightarrow F$ deux variables aléatoires, où E et F sont deux ensembles quelconques.

Les variables aléatoires $X : \Omega \rightarrow E$ et $Y : \Omega \rightarrow F$ sont indépendantes si, et seulement si, pour tout $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, on a :

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B).$$

Démonstration

($\Leftarrow$) Clair en prenant $A = \{x\}$ et $B = \{y\}$.

($\Rightarrow$) On a : $(X \in A, Y \in B) = \bigcup_{(x,y) \in A \times B} (X = x, Y = y)$. Les événements de cette union sont deux à deux disjoints et il y en a un nombre au plus dénombrable. Donc, $\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \sum_{(x,y) \in A \times B} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$.

Par indépendance de X et Y , puis par opération sur les sommes, on a alors,

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \sum_{(x,y) \in A \times B} \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y) = \left(\sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x) \right) \times \left(\sum_{y \in B} \mathbb{P}(Y = y) \right) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B).$$

□

Remarque 15.38

Soient A et B deux événements. Les variables aléatoires 1_A et 1_B sont indépendantes si, et seulement si, les événements A et B sont indépendants.



Théorème 15.18

Soient $X : \Omega \rightarrow E$ et $Y : \Omega \rightarrow F$ deux variables aléatoires, où E et F sont deux ensembles quelconques.

Si X et Y sont indépendantes, alors, pour toutes fonctions f définie sur $X(\Omega)$ et g définie sur $Y(\Omega)$, les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Démonstration

Soit $x \in (f(X))(\Omega)$ et $y \in (g(Y))(\Omega)$. On a :

$$(f(X) = x, g(Y) = y) = (X \in f^{-1}(\{x\}), Y \in g^{-1}(\{y\})) = (X \in f^{-1}(\{x\})) \cap (Y \in g^{-1}(\{y\})).$$

Par indépendance de X et Y , on a :

$$\mathbb{P}(f(X) = x, g(Y) = y) = \mathbb{P}(X \in f^{-1}(\{x\})) \times \mathbb{P}(Y \in g^{-1}(\{y\})) = \mathbb{P}(f(X) = x) \times \mathbb{P}(g(Y) = y).$$

D'où l'indépendance de $f(X)$ et $g(Y)$.

□

Famille finie de variables aléatoires indépendantes



Définition 15.31 – Variables aléatoires indépendantes

Soient $X_1 : \Omega \rightarrow E_1, X_2 : \Omega \rightarrow E_2, \dots, X_p : \Omega \rightarrow E_p$ des variables aléatoires, où $E_1, E_2, \dots, E_p$ sont des ensembles quelconques.

On dit que les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_p$ sont **indépendantes** lorsque : pour tout $x_1 \in X_1(\Omega), x_2 \in X_2(\Omega), \dots, x_p \in X_p(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_p = x_p) = \prod_{k=1}^p \mathbb{P}(X_k = x_k).$$



Théorème 15.19

Soient $X_1 : \Omega \rightarrow E_1, X_2 : \Omega \rightarrow E_2, \dots, X_p : \Omega \rightarrow E_p$ des variables aléatoires, où $E_1, E_2, \dots, E_p$ sont des ensembles quelconques.

Les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_p$ sont mutuellement indépendantes si, et seulement si, pour tout $A_1 \subset X_1(\Omega), A_2 \subset X_2(\Omega), \dots, A_p \subset X_p(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \dots, X_p \in A_p) = \prod_{k=1}^p \mathbb{P}(X_k \in A_k).$$

Démonstration

Généraliser la démonstration donnée dans le cas de deux variables aléatoires. □

Remarque 15.39

Toute sous-famille d'une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes est formée de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Exemple 15.28 – Modélisation de n expériences aléatoires

Pour modéliser n expériences aléatoires indépendantes, on utilise n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ indépendantes. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, X_k représente le résultat de la k -ème expérience.

Suite de variables aléatoires indépendantes



Définition 15.32 – Variables aléatoires indépendantes

Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires.

On dit que les variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont **indépendantes** lorsque : pour tout $I \subset \mathbb{N}$ fini, la famille $(X_i)_{i \in I}$ est indépendante.

On dit que les variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont **indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.)** lorsque les variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont :

- indépendantes ;
- de même loi.

Attention

Des variables aléatoires indépendantes sont indépendantes deux à deux. La réciproque est fausse !

IV.3. Lemme des coalitions

Théorème 15.20 – Lemme des coalitions

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $X_1, \dots, X_p$ des variables aléatoires et $m \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

Si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_p$ sont indépendantes, alors, pour toutes fonctions f et g , les variables aléatoires $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_p)$ sont indépendantes.

Démonstration

Admis

Remarque 15.41

On dit que $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_p)$ sont deux coalitions.

Ce théorème se généralise à l'utilisation de plus de deux **coalitions**.

Théorème 15.21

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires et $p \in [0, 1]$. On suppose que

- ▶ les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes ;
- ▶ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, X_k suit la loi de Bernoulli de paramètre p .

Alors, la variable aléatoire $X_1 + \dots + X_n$ suit la loi binomiale de paramètres n et p .

Démonstration

On procède par récurrence sur n . On note $\mathcal{H}_n$: « la somme de n variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$. »

Initialisation. $n = 1$. Il n'y a rien à faire : $\mathcal{B}(p) = \mathcal{B}(1, p)$.

Hérédité. soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{H}_n$ et on montre $\mathcal{H}_{n+1}$.

Soit $X_1, \dots, X_{n+1}$ des variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$.

Par hypothèse de récurrence, $Y = X_1 + \dots + X_n$ suit la loi binomiale de paramètres n et p .

De plus, $Y + X_{n+1}$ est à valeurs dans $\llbracket 0, n+1 \rrbracket$.

Soit $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$. En utilisant le système complet d'événements $((X_{n+1} = 0), (X_{n+1} = 1))$, il vient :

$$\mathbb{P}(Y + X_{n+1} = k) = \mathbb{P}(Y = k, X_{n+1} = 0) + \mathbb{P}(Y = k - 1, X_{n+1} = 1).$$

Par indépendance (le lemme des coalitions assure que Y et X_{n+1} sont indépendantes),

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y + X_{n+1} = k) &= \mathbb{P}(Y = k) \times \mathbb{P}(X_{n+1} = 0) + \mathbb{P}(Y = k - 1) \times \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) \\ &= \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} \times (1-p) + \binom{n}{k-1} \times p^{k-1} \times (1-p)^{n-k+1} \times p \\ &= \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) \times p^k \times (1-p)^{n+1-k} \\ &= \binom{n+1}{k} \times p^k \times (1-p)^{n+1-k}. \end{aligned}$$

Il reste à traiter le cas $k = 0$: $\mathbb{P}(Y + X_{n+1} = 0) = \mathbb{P}(Y = 0, X_{n+1} = 0) = \mathbb{P}(Y = 0) \times \mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = (1-p)^{n+1}$.

Donc, $Y + X_{n+1} \sim \mathcal{B}(n+1, p)$. Ce qui achève la récurrence. □

Remarque 15.42 – Interprétation

Le nombre de succès lors de la répétition de $n \in \mathbb{N}^*$ épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre $p \in [0, 1]$ suit la loi binomial $\mathcal{B}(n, p)$.

En effet, par indépendance, la probabilité de réussir k épreuves de Bernoulli de paramètre p dans un ordre donné

est $p^k \times (1-p)^{n-k}$.

Il y a $\binom{n}{k}$ façons de ranger les k succès parmi les n épreuves de Bernoulli.

La probabilité de réussir k épreuves de Bernoulli de paramètre p est alors $\binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$.

💡 Exemple 15.29 – Pile ou face

Pour modéliser un jeu de pile ou face, fini ou infini, avec indépendance des différents lancers, on utilise une suite $(X_n)_{n \in I}$ (où I est un ensemble fini ou dénombrable) de variables aléatoires de Bernoulli mutuellement indépendantes de même paramètre p (probabilité d'obtenir pile).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n représente le résultat du n -ème lancer.

1. La variable aléatoire $X_1 + \dots + X_n$ représente le nombre de piles obtenus et est de loi $\mathcal{B}(n, p)$.
2. La variable aléatoire $\inf\{n \in \mathbb{N}^* | X_n = 1\}$ représente l'instant du premier pile obtenu et « est de loi $\mathcal{G}(p)$ ».



Exercice 15.4

Reprenons l'exemple du pile ou face infini. On note X_n le résultat au lancer n et $Y = \min\{k \in \mathbb{N}^* | X_k = 1\}$. On suppose alors la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ i.i.d. avec $X_n \sim \mathcal{B}(p)$ où $p \in]0, 1[$ est la probabilité d'obtenir pile.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $(Y = k)$ à l'aide des événements $(X_n = 1)$ et $(X_n = 0)$ où $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire $\mathbb{P}(Y = k)$.

A priori le cas de figure consistant à obtenir uniquement des faces n'est pas à exclure et cela conduit à étudier la probabilité de l'événement $(Y = +\infty)$.

2. Exprimer $(Y = +\infty)$ à l'aide des événements $(X_n = 1)$ et $(X_n = 0)$ où $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que $\mathbb{P}(Y = +\infty) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(B_n)$, où $B_n = \bigcap_{k=1}^n (X_k = 1)$.
4. En déduire que $\mathbb{P}(Y = +\infty) = 0$.

Résolution

1. On a : $(Y = k) = \left(\bigcap_{n=0}^{k-1} (X_n = 0) \right) \cap (X_k = 1)$.

Par indépendance des variables aléatoires X_n ,

$$\mathbb{P}(Y = k) = \left(\prod_{n=1}^{k-1} \mathbb{P}(X_n = 0) \right) \cap \mathbb{P}(X_k = 1) = (1-p)^{k-1} \times p.$$

2. On a : $(Y = +\infty) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} (X_n = 0)$.

3. On remarque que $(Y = +\infty) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$,

et la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante pour l'inclusion $(B_{n+1} \subset B_n)$.

Par continuité décroissante de $\mathbb{P}$, on a :

$$\mathbb{P}(Y = +\infty) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(B_n).$$

4. Les variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont indépendantes et $p \in]0, 1[$, donc,

$$\mathbb{P}(B_n) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k = 0) = (1-p)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On a alors,

$$\mathbb{P}(Y = +\infty) = 0.$$