

Dans toute cette partie, on supposera données deux variables aléatoires discrètes X et Y , où on notera $Supp(X) \subset \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$ et $Supp(Y) \subset \{y_j, j \in \mathbb{N}\}$, avec les x_i deux à deux distincts ou de probabilité nulle, de même que les y_j .

I Loi

I-1 Loi conjointe

Définition

On appelle *vecteur aléatoire discret* toute n -liste $(X_1, \dots, X_n)$ de v.a.d. $X_1, \dots, X_n$ définies sur un même espace probabilisé.
En particulier, si $n = 2$, on appelle (X_1, X_2) un *couple* de v.a.d..

■ Exemple 1 :

On lance un dé une infinité de fois et on note respectivement X et Y les première et deuxième apparitions de 4, avec $X = 0$ si 6 n'apparaît jamais et $Y = 0$ si 6 n'apparaît qu'une fois maximum. Alors (X, Y) est un couple de var. al. discrètes.

Définition

Soit (X, Y) un couple de v.a.d. sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$. On appelle *support* du couple (X, Y) et on note $Supp((X, Y))$ tout ensemble $S \subset (X, Y)(\Omega)$ tel que $P((X, Y) \in S) = 1$.



Remarque :

Trivialement, on a

$$Supp((X, Y)) = \{(X(w), Y(w)) \mid w \in \Omega\} \subset Supp(X) \times Supp(Y)$$

ou, de manière équivalente (en loi) **pour les variables discrètes**

$$Supp((X, Y)) = \{(x, y) \in Supp(X) \times Supp(Y) \mid P(X = x, Y = y) \neq 0\}$$

■ Exemple 2 :

On reprend l'exemple de X et Y resp. les première et deuxième apparitions de 4. Alors

$$Supp((X, Y)) \subset \{(x, y) \in \mathbb{N}^* \mid y > x\} \cup \underbrace{\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{N}\}}_{\text{le 4 apparaît au plus une fois}}$$



Définition

Soit (X, Y) un couple de v.a.d.. On appelle *loi du couple* (X, Y) , ou *loi conjointe des variables X et Y* l'application

$$\begin{aligned} P_{(X, Y)} : Supp((X, Y)) &\rightarrow [0; 1] \\ (x, y) &\mapsto p((X = x) \cap (Y = y)) \end{aligned}$$

■ Exemple 3 :

Commençons à chercher la loi conjointe dans le cas de l'exemple précédent. (1^{ère} et 2^{ème} apparitions de 4.)

- $Supp((X, Y)) = \{(n, k) \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n < k\} \cup \mathbb{N} \times \{0\}$.
- Soient $n, k \in Supp((X, Y))$. On cherche $p(X = n, Y = k)$:
★ Si $n = 0$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p(X = n, Y = k) = 0$:

En effet, on sait que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(\frac{1}{6})$ et donc $p(X = 0) = 0$, d'où, comme $(X = n, Y = k) \subset (X = n)$, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$0 \leq p(X = 0, Y = k) \leq p(X = 0) = 0, \quad \text{d'où} \quad p(X = n, Y = k) = 0$$

- ★ Si $1 \leq n < k$, alors $p(X = n, Y = k) = q^{k-2}p^2$, où $p = 1/6$ et $q = 1 - p$:

En effet, posons $A_i =$ "le 6 apparaît au rang i ." Alors

$$p(X = n, Y = k) = p(\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n \cap \overline{A_{n+1}} \cap \dots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k)$$

puis par indépendance des A_i et parce que $p(A_i) = \frac{1}{6}$, on a bien

$$p(X = n, Y = k) = \underbrace{q \dots q}_{n-1 \text{ fois}} p \underbrace{q \dots q}_{\text{de } n+1 \text{ à } k-1} p = q^{n-1} p q^{k-1-n} p = q^{k-2} p^2$$

- ★ Si $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n, Y = 0) = 0$:

C'est l'événement "6 n'apparaît qu'une seule fois et c'est au rang n ". Avec le système complet $\{(Y = 0)\} \cup \{(Y = n)\}_{k \geq 2}$, on peut écrire

$$\begin{aligned} P(X = n) &= P(X = n, Y = 0) + \sum_{k=2}^{+\infty} P(X = n, Y = k) \\ &= P(X = n, Y = 0) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^{k-2} p^2 \\ &= P(X = n, Y = 0) + p q^{n-1} \quad (\text{après calcul, laissé en exercice}) \end{aligned}$$

D'où $P(X = n) = P(X = n, Y = 0) + P(X = n, Y > 0)$ et donc $P(X = n, Y = 0) = 0$
(Ce résultat peut se redémontrer un peu plus rapidement à l'aide des loi conditionnelles.)

- Conclusion :

$$\begin{aligned} Supp((X, Y)) &= \{(n, k) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq n < k\} \\ P(X = n, Y = k) &= p^2 q^{k-2} \quad \text{si } 1 \leq n < k \end{aligned}$$



Remarque :

La **Loi d'un couple de variables discrètes** est donc donnée par :

- $Supp(X, Y)$ (domaine de définition de $P_{(X, Y)}$)
- les différentes valeurs de $P(X = x, Y = y)$ pour $x, y \in Supp(X, Y)$.

Commentaires :

La loi d'un couple de variables peut par exemple servir à calculer des probabilités concernant les deux variables "mélangées". (cf ex. ci-dessous)

■ Exemple 4 :

Avec les variables de l'exemple précédent, calculons $P("X + Y \text{ impair}")$:

Par la décomposition en parité différente, on a

$$P("X + Y \text{ impair}") = P(\underbrace{"X \text{ pair et } Y \text{ impair}"}_A) + P("X \text{ impair et } Y \text{ pair}")$$

Or, comme $P(Y = 1) = 0$, on a $\{(Y = 2j + 1)\}_{j \in \mathbb{N}^*}$ sys. compl. de "Y imp.", d'où

$$\begin{aligned} P(A) &= P\left(X \text{ pair} \cap \left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} Y = 2j + 1\right)\right) = \sum_{j=1}^{+\infty} P\left(\underbrace{X \text{ pair}, Y = 2j + 1}_{A_j}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^j P(X = 2i, Y = 2j + 1)\right) \quad \text{car } \{(X = 2i)\}_{i=1 \dots j} \text{ sys. q-c. de } A_j. \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^j p^2 q^{2j+1-2}\right) = p^2 q \sum_{j=1}^{+\infty} j(q^2)^{j-1} \\ &= p^2 q \frac{1}{(1 - q^2)^2} = p^2 q \frac{1}{(1 - q)^2(1 + q)^2} \\ &= \frac{q}{(1 + q)^2} \quad \text{car } 1 - q = p \end{aligned}$$

et de même (laissé en exercice), on a

$$P("X \text{ impair}, Y \text{ pair}") = \frac{1}{(1 + q)^2}$$

D'où la probabilité finale :

$$P("X + Y \text{ impair}") = \frac{q + 1}{(1 + q)^2} = \frac{1}{1 + q}$$

I-2 Loi marginale



Définition

Soit (X, Y) un couple de v.a.d.. La loi de X est appelée *première loi marginale* de (X, Y) et la loi de Y est appelée *deuxième loi marginale* de (X, Y) .

■ Exemple 5 :

Si X et Y sont les 1^{ère} et 2^{ème} apparitions de 4,

- la première loi marginale est la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$ (déjà vu) ;
- La deuxième loi marginale n'est pas évidente à calculer à première vue MAIS :

Commentaires :

Si on ne peut pas déterminer directement une loi marginale, on peut l'obtenir de manière certaine à partir de la loi conjointe si celle-ci est connue :

Théorème 1

Soit (X, Y) un couple de v.a.d. de loi $p_{(X, Y)}$. Alors

$$\begin{aligned} \forall x \in Supp(X), \quad p(X = x) &= \sum_{j=0}^{+\infty} p((X = x) \cap (Y = y_j)) \\ \forall y \in Supp(Y), \quad p(Y = y) &= \sum_{i=0}^{+\infty} p((X = x_i) \cap (Y = y)) \end{aligned}$$

Démonstration :

On démontre ceci pour $p(X = x)$ (le cas de $p(Y = y)$ étant similaire.)

Par définition de X , la famille $\{(Y = y_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ est un système complet de l'univers Ω . Alors

$$\begin{aligned} p(X = x) &= p((X = x) \cap \Omega) \\ &= p\left((X = x) \cap \bigsqcup_{j=0}^{+\infty} (Y = y_j)\right) \\ &= p\left(\bigsqcup_{j=0}^{+\infty} ((X = x) \cap (Y = y_j))\right) \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} p((X = x) \cap (Y = y_j)) \end{aligned}$$

□

? Exercice 1

On pose X et Y les premières et deuxième apparition de 4 dans une infinité de lancers. Déterminer la loi marginale de Y .

Solution

Tout d'abord, on note que $Supp(Y) = \mathbb{N} - \{0, 1\}$ car $Supp((X, Y)) \subset \mathbb{N}^* \times \llbracket 2, +\infty \rrbracket$.

Ainsi, si $k \geq 2$,

$$\begin{aligned} p(Y = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} p((Y = k) \cap (X = n)) \\ &= \sum_{n=1}^{k-1} q^{k-2} p^2 = (k-1)q^{k-2}p^2 \end{aligned}$$



Définition

Soit (X, Y) un couple de v.a.d.

- Pour tout $y \in \text{Supp}(Y)$ tel que $p(Y = y) \neq 0$, on appelle *loi conditionnelle de X par-rapport à $[Y = y]$* , l'application

$$\begin{aligned} \text{Supp}(X) &\rightarrow [0; 1] \\ x &\mapsto p_{[Y=y]}(X = x) = \frac{p((X=x) \cap (Y=y))}{p(Y=y)} \end{aligned}$$

- Pour tout $x \in \text{Supp}(X)$ tel que $p(X = x) \neq 0$, on appelle *loi conditionnelle de Y par-rapport à $[X = x]$* , l'application

$$\begin{aligned} \text{Supp}(Y) &\rightarrow [0; 1] \\ y &\mapsto p_{[X=x]}(Y = y) = \frac{p((X=x) \cap (Y=y))}{p(X=x)} \end{aligned}$$

■ Exemple 6 :

Reprenons l'exemple traité jusqu'ici.

- Soit $k \geq 2$. *Loi conditionnelle de X par-rapport à $[Y = k]$* :

Si $k \geq 2$, on a $p(X = n) \neq 0$. La loi conditionnelle sachant $[Y = k]$ est bien définie. Tout d'abord, si k fixé, alors $\text{Supp}(X_{/(Y=k)}) = \llbracket 1; k-1 \rrbracket$. Ensuite, si $n \in \llbracket 1; k-1 \rrbracket$, on a

$$p_{[Y=k]}(X = n) = \frac{p(Y = k, X = n)}{p(Y = k)} = \frac{q^{k-2}p^2}{(k-1)q^{k-2}p^2} = \frac{1}{k-1}$$

On a

$$X_{/(Y=k)} \hookrightarrow \mathcal{U}_{\llbracket 1; k-1 \rrbracket} \quad (\text{intuitif ?})$$

- Soit $n \geq 1$ *loi conditionnelle de Y par-rapport à $[X = n]$* :

Si $n \geq 1$, on a $p(X = n) \neq 0$. La loi conditionnelle sachant $[X = n]$ est bien définie. De plus,

$$\text{Supp}(Y_{/(X=n)}) = \llbracket n+1; +\infty \rrbracket$$

et, pour tout $k \in \llbracket n+1; +\infty \rrbracket$, on a

$$p_{[X=n]}(Y = k) = \frac{p(Y = k, X = n)}{p(X = n)} = \frac{q^{k-2}p^2}{q^{n-1}p} = pq^{k-n-1}$$

On se rend ainsi compte que

$$(Y - n)_{/(X=n)} \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$$



Remarque :

Dans l'exemple précédent, tout se passe comme si on recommençait à zéro à partir de $X = n$ (phénomène "sans mémoire" !)



CALCUL INUTILE

On note que dans beaucoup de cas, on n'a pas à calculer la loi conditionnelle, mais l'expérience amène à la trouver directement, comme dans l'exemple suivant :

■ Exemple 7 :

On tire une boule au hasard dans une urne contenant n boules identiques numérotées de 1 à n . On note X le résultat. On tire ensuite X fois de manière indépendante sur une cible avec une probabilité p de succès : "atteindre la cible". On note Y le nombre de succès.

Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $(X = i)$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

Pour i fixé, sachant que l'événement $(X = i)$ est réalisé, on observe que $Y_{/X=i}$ compte le nombre de succès dans une série d'épreuves de Bernoulli indépendantes de succès "atteindre son objectif" de probabilité p . Ainsi :

$$Y_{/X=i} \hookrightarrow \mathcal{B}(i, p)$$

II Corrélation

II-1 Espérances

Dans cette section, on se donnera un couple de v.a. discrètes (X, Y) . Dans le cadre de l'étude de la corrélation, on aura à étudier l'existence et la valeur de $\mathbb{E}[XY]$. Il existe pour nous deux façons d'aborder cette question :

- ★ La première consiste à considérer la variable $Z = XY$ comme une variable habituelle, en cherchant

$$\text{Supp}(Z) = \{z_k \mid k \in \mathbb{N}\} \quad \text{et} \quad P(Z = z) \text{ pour tout } z \in \text{Supp}(Z)$$

puis valider l'existence et calculer $\mathbb{E}[Z]$ de la manière habituelle.

- ★ La deuxième consiste à utiliser un résultat calculable directement à partir de la loi conjointe :

Théorème 2 de transfert

Soient

- X, Y deux variables finies de support indexé resp. par $\llbracket 0, N \rrbracket$ et $\llbracket 0, M \rrbracket$
- D un sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ contenant $\text{Supp}(X, Y)$,
- $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction

alors

$$\mathbb{E}(g(X, Y)) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M g(x_i, y_j) P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{j=0}^M \sum_{i=0}^N g(x_i, y_j) P(X = x_i, Y = y_j)$$

■ Exemple 8 :

On tire une boule au hasard dans une urne contenant n boules identiques numérotées de 1 à n . On note X le résultat. On tire ensuite X fois de manière indépendante sur une cible avec une probabilité p d'atteindre la cible. On note Y le nombre de succès.

Calculons $\mathbb{E}[XY^2]$ (On admettra que $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{(n(n+1))^2}{4}$) :

D'après le théorème de transfert, on sait que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[XY^2] &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^n ij^2 P(X=i, Y=j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^n ij^2 P(X=i) P(Y=j|X=i) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^n ij^2 P(X=i) P_{X=i}(Y=j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i \underbrace{\left(\sum_{j=0}^n j^2 P_{X=i}(Y=j) \right)}_{\mathbb{E}[(Y|X=i)^2]}\end{aligned}$$

Or, on a $T = Y_{|X=i} \hookrightarrow \mathcal{B}(i, p)$, et donc $\mathbb{E}[T^2] = V(T) + \mathbb{E}[T]^2 = ip(1-p) + i^2 p^2$, d'où

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[XY^2] &= \frac{p(1-p)}{n} \sum_{i=1}^n i^2 + \frac{p^2}{n} \sum_{i=0}^n i^3 \\ &= p(1-p) \frac{(n+1)(2n+1)}{6} + p^2 \frac{n(n+1)^2}{4}\end{aligned}$$

et donc

$$\mathbb{E}[XY^2] = p(n+1) \left(\frac{(1-p)(2n+1)}{6} + \frac{pn(n+1)}{4} \right)$$

? Exercice 2

En utilisant le théorème de transfert, montrer que dans l'exemple précédent,

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{n+1}{2}p \quad \text{ainsi que} \quad \mathbb{E}[Y^2] = \frac{p(n+1)}{6} (3 + 2pn - 2p).$$

(On pourra remarquer que $Y = X^0 Y$.) En déduire $V(Y)$.

II-2 Covariance

■ Définition

Soit (X, Y) un couple de v.a.d. Si la variable aléatoire $(X - E(X))(Y - E(Y))$ admet une espérance, on appelle *covariance du couple (X, Y)* la valeur

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

En général, on n'utilise pas cette formule pour trouver la covariance en pratique. En effet, la formule peut nettement se simplifier (et peut même faire office de définition)

Théorème 3 (Formule de Huyghens-Koenig)

Soit (X, Y) un couple de v.a.d. Si $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$ et $\mathbb{E}[XY]$ existent, alors le couple (X, Y) admet une covariance qui peut être calculée grâce à la formule

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Démonstration :

★ Existence de $\text{Cov}(X, Y)$:

Il s'agit de montrer que $\mathbb{E}[(X - E(X))(Y - E(Y))]$ existe :

$$\begin{aligned}|(X - E(X))(Y - E(Y))| &= |XY + \mathbb{E}[XY] - X\mathbb{E}[X] - Y\mathbb{E}[Y]| \\ &\leq |XY| + \mathbb{E}[|XY|] + |X|\mathbb{E}[|X|] + |Y|\mathbb{E}[|Y|]\end{aligned}$$

Or, par hypothèse, l'espérance de $|XY|$, X et Y existent, ce qui signifie que l'espérance de $(X - E(X))(Y - E(Y))$ existe.

★ Valeur de $\text{Cov}(X, Y)$:

Il suffit de développer l'espérance par linéarité de l'espérance. $\square$

On peut même encore un peu simplifier les hypothèses de la formule de H-K dans certains cas :

Propriété 4

Soit (X, Y) un couple de v.a.d. Si les variables X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors l'espérance $\mathbb{E}[XY]$ existe.

Démonstration :

XY est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X et Y . Or, On rappelle que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$x^2 + y^2 - 2xy = \underbrace{(x - y)^2}_{\geq 0}$$

ce qui donne

$$xy \leq \frac{1}{2} (x^2 + y^2)$$

Appliqué à $|X|$ et $|Y|$, on obtient

$$|XY| \leq \frac{1}{2} (X^2 + Y^2)$$

Par hypothèse, X et Y admettent un moment d'ordre 2, ainsi, $\mathbb{E}[X^2]$ et $\mathbb{E}[Y^2]$ existent, d'où $\mathbb{E}[X^2 + Y^2]$ existe.

Par comparaison de variables, l'espérance de XY existe. $\square$

■ Exemple 9 :

On effectue une série infinie de lancers indépendants d'un dé équilibré et on note A le rang d'apparition du premier 1, et B le rang d'apparition du premier 2. Montrons que $\mathbb{E}[AB]$ existe.

On sait que $A, B \hookrightarrow \mathcal{G}(\frac{1}{6})$. On en déduit que A et B admettent des moments d'ordre 2, ainsi on peut dire que $\mathbb{E}[AB]$ existe.

(Mais on n'a pas la valeur pour autant... Le calcul est HP mais pour information, on a $\mathbb{E}[AB] = \frac{6-2p}{p^2}$)

Corollaire

Soit (X, Y) un couple de v.a.d. Si les variables X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors le couple (X, Y) admet une covariance et

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Démonstration :

Les hypothèses permettent d'appliquer le théorème qui précise que l'espérance de XY existe. Ensuite, le théorème de Koenig Huyghens permet de conclure. $\square$

■ Exemple 10 :

Si A et B sont les moments de première apparition respectivement de 1 et de 2 dans une série infinie de lancers, cherchons $\text{Cov}(A, B)$ en admettant que l'on connaît $\mathbb{E}[AB]$:

D'après le début de l'exemple déjà traité précédemment, on sait que $A, B \hookrightarrow \mathcal{G}(\frac{1}{6})$ et admettent chacune un moment d'ordre 2. Ainsi, $\mathbb{E}[AB]$, $\text{Cov}(A, B)$, $\mathbb{E}[A]$ et $\mathbb{E}[B]$ existent, avec comme formule

$$\text{Cov}(A, B) = \mathbb{E}[AB] - \mathbb{E}[A]\mathbb{E}[B]$$

Après calcul de $\mathbb{E}[AB]$ (admis) on trouverait (avec $p = \frac{1}{6}$)

$$\mathbb{E}[XY] = \frac{6-2p}{p^2}$$

De plus, on sait que $\mathbb{E}[A] = \mathbb{E}[B] = \frac{1}{p} = 6$. D'où

$$\text{Cov}(A, B) = \frac{6-2p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{5-2p}{p^2} = 132$$



Remarque :

Si les variables sont finies, alors la covariance existe toujours.

? Exercice 3

On tire une boule au hasard dans une urne contenant n boules identiques numérotées de 1 à n . On note X le résultat. On tire ensuite X fois de manière indépendante sur une cible avec une probabilité d'atteindre son objectif de p . On note Y le nombre de succès. Déterminer $\text{Cov}(X, Y)$.

Solution

On sait d'après la formule de H-K, que

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

D'après le théorème de transfert, on sait que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[XY] &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^n ijP(X=i, Y=j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^i ijP(X=i, Y=j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^n ijP(X=i)P_{X=i}(Y=j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i \underbrace{\left(\sum_{j=0}^i j \binom{i}{j} p^j (1-p)^{i-j} \right)}_{\mathbb{E}[Y_{/X=i}]} \end{aligned}$$

Or,

$$\mathbb{E}[Y_{/X=i}] = ip$$

d'où

$$\mathbb{E}[XY] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i^2 p = \frac{p}{n} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = p \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= p \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n+1}{2} \mathbb{E}[Y] = p \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - p \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 \\ &= p \frac{(n+1)}{12} (2(2n+1) - 3(n+1)) \end{aligned}$$

i.e.

$$\text{Cov}(X, Y) = p \frac{(n+1)(n-1)}{12}$$

Propriété 5

Soient X, Y des v.a.d. définies sur un même espace probabilisé admettant chacune un moment d'ordre 2. On a

- $\text{Cov}(X, X) = V(X)$
- $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$

Propriété 6 (bilinéarité de la covariance)

Soient X, Y des v.a.d définies sur un même espace probabilisé admettant chacune un moment d'ordre 2. On a

- $Cov(\cdot, Y) : X \mapsto Cov(X, Y)$ est linéaire au sens suivant :
Si X, X' sont deux v.a.d. telles que $\mathbb{E}[XY]$ et $\mathbb{E}[X'Y]$ existent, alors
 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, Cov(\alpha X + \beta X', Y) = \alpha Cov(X, Y) + \beta Cov(X', Y)$
- $Cov(X, \cdot) : Y \mapsto Cov(X, Y)$ est linéaire au sens suivant :
Si Y, Y' sont deux v.a.d. telles que $\mathbb{E}[XY]$ et $\mathbb{E}[XY']$ existent, alors
 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, Cov(X, \alpha Y + \beta Y') = \alpha Cov(X, Y) + \beta Cov(X, Y')$

■ Exemple 11 :

Soient X, Y deux variables discrètes admettant la même variance. Montrons que $Cov(X + Y, X - Y) = 0$:

Par bilinéarité de la covariance, on a

$$\begin{aligned} Cov(X + Y, X - Y) &= Cov(X, X - Y) + Cov(Y, X - Y) \\ &= \underbrace{Cov(X, X)}_{V(X)} - Cov(X, Y) + Cov(Y, X) - \underbrace{Cov(Y, Y)}_{V(Y)} \\ &= V(X) - V(Y) \quad \text{par symétrie de la covariance} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Théorème 7

Soient X, Y des v.a.d. définies sur un même espace probabilisé admettant chacune un moment d'ordre 2. On a

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y)$$

Démonstration :

On applique les définitions et la linéarité de l'espérance. $\square$



Remarque :

Ce théorème permet aussi dans certains cas de calculer $Cov(X, Y)$ avec la formule :

$$Cov(X, Y) = \frac{1}{2} (V(X + Y) - V(X) - V(Y))$$

■ Exemple 12 :

On effectue n lancers indépendants d'une même dé équilibré. On note X le nombre de fois où on obtient 1 et Y le nombre de fois où on obtient 2. On cherche à trouver $Cov(X, Y)$.

Tout d'abord, on remarque que X et Y sont deux variables finies telles que

$$X, Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p), \quad \text{avec } p = \frac{1}{6}$$

Ceci garantit l'existence des moments d'ordre 2 de X, Y et valide donc la formule

$$Cov(X, Y) = \frac{1}{2} (V(X + Y) - V(X) - V(Y))$$

De plus, la variable $X + Y$ correspond au nombre total de fois où on rencontre 1 ou 2. Or, comme on ne peut pas avoir en même temps 1 et 2, ceci est en réalité, le nombre de réalisation du succès "obtenir 1 ou 2" dans une série de n tentatives indépendantes. Ainsi, on sait que

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \alpha) \quad \text{avec } \alpha = \frac{1}{3} = 2p$$

D'où

$$Cov(X, Y) = \frac{1}{2} (n\alpha(1 - \alpha) - np(1 - p)) = -np^2 = -\frac{n}{36}$$

Corollaire

Soient X, Y des v.a.d. définies sur un même espace probabilisé admettant chacune un moment d'ordre 2. On a

$$|Cov(X, Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$$

Démonstration :

Observons le polynôme en λ : $V(Y + \lambda X) = V(Y) + \lambda^2 V(X) + 2\lambda Cov(X, Y)$. La variance étant toujours positive, c'est un polynôme n'admettant qu'au maximum une racine, c'est-à-dire de discriminant négatif. Ainsi, $0 \geq \Delta = 4Cov(X, Y)^2 - 4V(X)V(Y)$, D'où

$$Cov(X, Y)^2 \leq V(X)V(Y)$$

ce qui donne le résultat annoncé. $\square$

II-3 Coefficient de corrélation linéaire

Définition

Soient X, Y des v.a.d. sur un même espace probabilisé, admettant chacune un moment d'ordre 2 **non nul**. On appelle *coefficient de corrélation linéaire* de X et Y la valeur

$$r(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Exemple 13 :

Revenons à l'exemple des tirs sur une cible. (On admettra que $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.) On a alors, grâce aux calculs effectués (dans les exemples et exercices précédents)

$$r(X, Y) = \frac{p \frac{(n+1)(n-1)}{12}}{\sqrt{\frac{n^2-1}{12}} \sqrt{\frac{p(n+1)}{12} (6 + pn - 7p)}} = \sqrt{\frac{p(n-1)}{pn + 6 - 7p}}$$

Propriété 8

Soient X, Y des v.a.d.

- sur un même espace probabilisé,
- admettant chacune un moment d'ordre 2 **non nul**,

$$-1 \leq r(X, Y) \leq 1$$

Propriété 9

Soient X, Y des v.a.d.

- sur un même espace probabilisé,
- admettant chacune un moment d'ordre 2 **non nul**,

alors

$$|r(X, Y)| = 1 \Leftrightarrow \text{il existe } a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R} \text{ tels que } P(Y = aX + b) = 1$$

Démonstration :

En reprenant la démonstration du corollaire précédent (partie 2a), on constate que

$$|r(X, Y)| = 1 \Leftrightarrow Cov(X, Y)^2 \leq V(X)V(Y) \Leftrightarrow \Delta = 0$$

Or, $\Delta = 0$ équivaut exactement à dire que le polynôme en λ : $V(X + \lambda Y) = V(X) + \lambda^2 V(Y) + 2\lambda Cov(X, Y)$ admet une racine (double). On note λ_0 cette racine. Ainsi,

$$|r(X, Y)| = 1 \Leftrightarrow V(Y + \lambda_0 X) = 0$$

Or, une variable admet une variance nulle ssi elle est constante presque sûrement, c'est-à-dire s'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que

$$P(Y + \lambda_0 X = b) = 1$$

On note que $\lambda_0 \neq 0$ car sinon on aurait $V(Y) = 0$ ce qui est contraire à l'énoncé. En conclusion, avec les notations précédentes

$$|r(X, Y)| = 1 \Leftrightarrow P(Y = \underbrace{-\lambda_0}_a X + b) = 1$$

□

II-4 Indépendance

Définition

Étant donné un couple de variables aléatoires discrètes (X, Y) sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$, on dit que X et Y sont *indépendantes* si

$$p((X = x) \cap (Y = y)) = p(X = x) p(Y = y) \quad \forall x \in \text{Supp}(X), y \in \text{Supp}(Y)$$

Contre-Exemple(s) :

On lance un dé une infinité de fois. On reprend les variables aléatoires X et Y donnant le rang de première et deuxième apparition de 6. Alors

$$P(X = 5 \cap Y = 3) = 0 \neq \underbrace{P(X = 5)}_{\neq 0} \underbrace{P(Y = 3)}_{\neq 0}$$

Les deux variables aléatoires ne peuvent donc pas être indépendantes.

? Exercice 4

On lance une infinité de fois deux dés de manière indépendante. On note X le rang de première apparition de 4 sur le premier dé et Y le rang de première apparition d'un double. (Y vaut 0 s'il n'y a jamais de double.) Montrer que X et Y sont indépendantes.

Solution

X et Y suivent une loi géométrique, avec

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{6}\right) \quad \text{et} \quad Y \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{6}{36}\right) = \mathcal{G}\left(\frac{1}{6}\right)$$

Vérifions que

$$P(X = i \cap Y = j) = P(X = i)P(Y = j) \quad \forall i, j \in \mathbb{N}^* :$$

il y a 25 couples qui ne contiennent ni un 6 sur le premier dé, ni un double. Ainsi,

• Si $0 < i < j$:

$$P(X = i \cap Y = j) = \underbrace{\left(\frac{25}{36}\right)^{i-1}}_{\text{ni 6 ni double jusqu'à } i / 6 \text{ à } i \text{ non double}} \underbrace{\frac{5}{36}}_{\text{pas de double jusqu'à } j-1} \underbrace{\left(\frac{5}{6}\right)^{j-i-1}}_{\text{double à } j} \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{double à } j}$$

réorganisé autrement, on trouve bien

$$P(X = i \cap Y = j) = \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} \frac{1}{6} \frac{5}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{j-i-1} \frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{j-1} \frac{1}{6} = P(X = i)P(X = j)$$

• Si $0 < j < i$:

$$P(X = i \cap Y = j) = \underbrace{\left(\frac{25}{36}\right)^{j-1}}_{\text{ni 6 ni double jusqu'à } j / \text{double à } j, \text{ distinct de 6}} \underbrace{\frac{5}{36}}_{\text{pas de 6 jusqu'à } j-1} \underbrace{\left(\frac{5}{6}\right)^{j-i-1}}_{\text{6 à } j} \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{6 à } j}$$

De même qu'avant, on trouve $P(X = i \cap Y = j) = P(X = i)P(X = j)$.

• Si $0 < i = j$:

$$P(X = i \cap Y = j) = \underbrace{\left(\frac{25}{36}\right)^{j-1}}_{\text{ni 6 ni double jusqu'à } j / \text{double 6 à } j} \underbrace{\frac{1}{36}}_{\text{double 6 à } j} = \left(\frac{5}{6}\right)^{j-1} \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{j-1} \frac{1}{6}$$

Or, $i = j$, on retrouve donc bien

$$P(X = i \cap Y = j) = P(X = i)P(X = j)$$

Conclusion, X et Y sont bien indépendantes.

Propriété 10

X et Y sont indépendantes ssi l'une des assertions suivantes est vérifiée

- $X_{/Y=y}$ a même loi que X pour tout $y \in \text{Supp}(Y)$ de probabilité non nulle.
- la loi de $X_{/Y=y}$ est indépendante de y .

Démonstration :

• Première assertion :

pour tout $x \in \text{Supp}(X)$, on a

$$P(X = x \cap Y = y) = P_{Y=y}(X = x)P(Y = y)$$

Ainsi, si les variables $X_{/Y=y}$ et X ont même loi, on obtient

$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$, donc X et Y sont indépendantes

et si les variables X et Y sont indépendantes, alors par simplification de

$$P(X = x)P(Y = y) = P_{Y=y}(X = x)P(Y = y)$$

on obtient

$$P(X = x) = P_{Y=y}(X = x) \text{ donc } X_{/Y=y} \text{ et } X \text{ ont même loi.}$$

• Deuxième assertion :

Si X et Y sont indépendantes, alors clairement $P_{Y=y}(X = x) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P(Y=y)} = P(X = x)$ est indépendante de la valeur y de Y .

Si $P_{Y=y}(X = x)$ est indépendant de y , notons $u_i = P_{Y=y}(X = x_i)$ pour tout i et $y \in \text{Supp}(Y)$. Alors, pour tout i , on a

$$P(X = x_i, Y = y_j) = u_i P(Y = y_j)$$

En sommant sur $j \in \mathbb{N}$, on obtient par formule des probas totales :

$$P(X = x_i) = u_i$$

et donc finalement

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j) \quad \text{i.e.} \quad X \text{ et } Y \text{ ind.}$$

□

■ Exemple 14 :

Dans l'exemple de X et Y resp. les 1^{ères} et 2^{èmes} apparition du 6 dans une série infinie de lancers indépendants, on a vu que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$X_{/(Y=n)} \hookrightarrow \mathcal{U}_{\{1, \dots, n\}}$$

La loi de $X_{/(Y=n)}$ dépend donc de la valeur de Y , ce qui signifie que les variables X et Y ne sont pas indépendantes. (On s'en doutait un peu!!).

■ Exemple 15 :

Si on a des variables X, Y telles que pour tout $n \in \text{Supp}(Y)$,

$$X_{/(Y=n)} \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$$

Alors X et Y sont indépendantes et de surcroît, $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$.



Remarque :

| Le résultat précédent est évidemment également vrai en échangeant X et Y .

Lemme 11

Soit (X, Y) un couple de v.a.d. indépendantes, alors,

- pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $X - a$ et $Y - b$ sont indépendantes.
- mieux, pour toutes fonctions réelles g, h , les v.a.d. $g(X)$ et $h(Y)$ sont indépendantes.

Démonstration :

- la première est conséquence de la deuxième.
- On note $Supp(X) = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ et $Supp(Y) = \{y_j \mid j \in \mathbb{N}\}$. Alors

$$Supp(g(X)) = \{g(x_i) \mid i \in \mathbb{N}\} \quad Supp(h(Y)) = \{h(y_j) \mid j \in \mathbb{N}\}$$

Ainsi, pour tout $k \in Supp(g(X)), l \in Supp(h(Y))$, on a

$$\begin{aligned} P(g(X) = k \cap h(Y) = l) &= P(X \in g^{-1}(k) \cap Y \in h^{-1}(l)) \\ &= P(X \in g^{-1}(k))P(Y \in h^{-1}(l)) \\ &= P(g(X) = k)P(h(Y) = l) \end{aligned}$$

□

Théorème 12

Soit (X, Y) un couple de v.a.d.

- Si $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[Y]$ existent
- Si X et Y sont indépendantes,

alors $\mathbb{E}[XY]$ existe et

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

Démonstration : admise. □



LA RÉCIPROQUE DE L'INDÉPENDANCE EST FAUSSE !

Exemple : Soit X la variable aléatoire de loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$.

$$p(X = -1) = p(X = 0) = p(X = 1) = \frac{1}{3}.$$

On pose $Y = X^2$, d'où

$$Supp(Y) = \{0, 1\}, \quad p(Y = 0) = \frac{1}{3}, \quad p(Y = 1) = \frac{2}{3}$$

Y et X sont clairement non indépendants ! (pour preuve, on peut par exemple vérifier que $p(X = 0 \cap Y = 0) \neq p(X = 0)p(Y = 0)$).

Or, notons que $XY = X$, ainsi,

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] = 0 = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$

Corollaire

Soit (X, Y) un couple de v.a.d.

- Si $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[Y]$ existent
 - Si X et Y sont indépendantes,
- alors $Cov(X, Y)$ existe et

$$Cov(X, Y) = 0$$

Démonstration :

Comme $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[Y]$ existent, alors $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])]$ et $\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])]$ existent.

De plus, comme X et Y sont indépendantes, alors $X - \mathbb{E}[X]$ et $Y - \mathbb{E}[Y]$ sont également indépendantes. (lemme).

D'après le théorème précédent, on sait donc que $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$ existe, ce qui assure l'existence de la covariance.

Par simple calcul, on obtient encore une fois

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

ce qui vaut 0 par indépendance de X et Y . □

Corollaire

Soit (X, Y) un couple de v.a.d.

- Si X et Y admettent un moment d'ordre 2,
- Si X et Y sont indépendantes,

alors $V(X + Y)$ existe et

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

Démonstration :

On utilise la décomposition de $V(X + Y)$ grâce à la covariance :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y)$$

puis $Cov(X, Y) = 0$ par le corollaire précédent. □



Définition

| On dit que les variables X et Y sont *non corrélées* si $Cov(X, Y) = 0$.

CONFUSION
 Nous avons vu dans le corollaire précédent que “**indépendant**” $\Rightarrow$ “**non corrélé**” mais la réciproque n’est donc pas nécessairement vraie.

Corollaire

Soient X, Y des v.a.d.

- sur un même espace probabilisé,
- admettant chacune un moment d’ordre 2 non nul,
- **indépendantes, ou plus généralement, non corrélées,**

alors $r(X, Y) = 0$.

Démonstration :
 Si X et Y sont non corrélées, alors la covariance est nulle ! $\square$

III Convolution

III-1 Généralités

Dans cette section, on se donne toujours X et Y deux variables aléatoires discrètes et on note

$$Supp(X) = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} \quad \text{et} \quad Supp(Y) = \{y_j \mid j \in \mathbb{N}\}$$

où les x_i (puis les y_j) sont deux à deux distincts de probabilité nulle.

But : Le but de ce paragraphe est de pouvoir déterminer la loi de la v.a.d. $X + Y$.

Stratégie : Utiliser la partition d’événements $\{(Y = y_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ ou $\{(X = x_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$

En effet, si $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} P(X + Y = x) &= P\left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} (X + Y = x) \cap (X = x_i)\right) = P\left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} (x_i + Y = x) \cap (X = x_i)\right) \\ &= P\left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} (Y = x - x_i) \cap (X = x_i)\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} P\left((Y = x - x_i) \cap (X = x_i)\right) \end{aligned}$$

Par exemple, si X et Y sont indépendantes, alors

$$P(X + Y = x) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(Y = x - x_i)P(X = x_i)$$

Définition et Proposition
 Soit (X, Y) un couple de v.a.d. de loi respectives $\mathcal{L}(X)$ et $\mathcal{L}(Y)$. On appelle *convolution* des lois de X et Y on note $\mathcal{L}(X) \star \mathcal{L}(Y) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l’application définie par

$$\mathcal{L}(X) \star \mathcal{L}(Y)(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(X = x_i)P(Y = x - x_i)$$

où la série $\sum_{i \in \mathbb{N}} P(X = x_i)P(Y = x - x_i)$ est convergente

Démonstration :
 La série $\sum_{i \in \mathbb{N}} P(X = x_i)P(Y = x - x_i)$ est à termes positifs et on a

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq P(X = x_i)P(Y = x - x_i) \leq P(X = x_i)$$

où $P(X = x_i)$ est le terme général d’une série convergente. Ainsi, par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on a la convergence de $\sum_{i \in \mathbb{N}} P(X = x_i)P(Y = x - x_i)$

(et même, de plus $0 \leq \sum_{i=0}^{+\infty} P(X = x_i)P(Y = x - x_i) \leq \sum_{i=0}^{+\infty} P(X = x_i) = 1$.) $\square$

Théorème 13

Soit (X, Y) un couple de v.a.d. **indépendantes**, alors la loi de $X + Y$ est définie par

$$\mathcal{L}(X) \star \mathcal{L}(Y).$$

Démonstration :
 La démonstration est le raisonnement effectué juste avant le théorème. $\square$

Cas particuliers :

- Si X, Y sont des variables aléatoires discrètes indépendantes prenant des valeurs dans $\mathbb{Z}$ Alors :

- ★ $Supp(X + Y) \subset \mathbb{Z}$, d’où, si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, on a $P(X + Y = x) = 0$.
- ★ Si $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$P(X + Y = k) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} P(X = k - j)P(Y = j)$$

- Si X, Y sont des variables aléatoires discrètes indépendantes prenant des valeurs dans $\mathbb{N}$ Alors :
- ★ $Supp(X + Y) \subset \mathbb{Z}$, d’où, si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$, on a $P(X + Y = k) = 0$

★ Si $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} P(X + Y = k) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \underbrace{P(X = k - j)}_{=0 \text{ si } k-j < 0} P(Y = j) \\ &= \sum_{j=0}^k P(X = x - j) P(Y = j) \end{aligned}$$

III-2 Exemples

III.2-a) Convolution de Loïs binomiales

Théorème 14

Soient $n, m \in \mathbb{N}$ et $p \in [0; 1]$. Alors $\mathcal{B}(n, p) \star \mathcal{B}(m, p) = \mathcal{B}(n + m, p)$.

Ou autrement dit

Théorème 15

Soient $n, m \in \mathbb{N}$ et $p \in [0; 1]$. Si X et Y sont deux v.a.d. indépendantes telles que

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p) \quad \text{et} \quad Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$$

alors

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n + m, p)$$

Démonstration :

• Par le calcul : On se donne $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$ deux v.a.d. indépendantes $\text{Supp}(X + Y) = \{0, 1, \dots, n + m\}$. Ainsi,

★ Si $x \notin \text{Supp}(X + Y)$, on a $P(X + Y = x) = 0$

★ Si $x \in \text{Supp}(X + Y)$, on a
$$\begin{aligned} P(X + Y = x) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \underbrace{P(X = x - j)}_{=0 \text{ si } x-j < 0} P(Y = j) \\ &= \sum_{j=0}^x P(X = x - j) P(Y = j) \end{aligned}$$

On rappelle que si on n'a pas $0 \leq K \leq N$, la quantité $\binom{N}{K}$ est nulle. En utilisant cette convention, on peut écrire

$$\begin{aligned} P(X + Y = x) &= \sum_{j=0}^x \binom{n}{x-j} p^{x-j} (1-p)^{n-x+j} \binom{m}{j} p^j (1-p)^{m-j} \\ &= \sum_{j=0}^x \binom{n}{x-j} \binom{m}{j} p^x (1-p)^{n+m-x} = p^x (1-p)^{n+m-x} \underbrace{\sum_{j=0}^x \binom{n}{x-j} \binom{m}{j}}_{=\binom{n+m}{x} \text{ (Vandermonde)}} \\ &= \binom{n+m}{x} p^x (1-p)^{n+m-x} \end{aligned}$$

• On aurait également pu établir ce résultat de manière en expliquant que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ modélise par exemple n expériences de Bernoulli indépendantes, dont le succès a comme probabilité p . De même, $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$ indépendante de X modélise les mêmes expériences de Bernoulli, mais m fois.

Ainsi, "en tout", $X + Y$ modélise $n + m$ expériences de Bernoulli de probabilité de succès p . $\square$

III.2-b) Convolution de loïs de Poisson

Théorème 16

Soient $\lambda, \mu > 0$. Alors $\mathcal{P}(\lambda) \star \mathcal{P}(\mu) = \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

autrement dit

Corollaire

Soient $\lambda, \mu > 0$. Si X et Y sont deux v.a.d. indépendantes telles que

$$X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) \quad \text{et} \quad Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$$

alors

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$$

Démonstration :

On se donne X et Y sont deux v.a.d. indépendantes telles que

$$X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) \quad \text{et} \quad Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$$

alors

• $\text{Supp}(X + Y) = \mathbb{N}$.

★ Si $x \notin \text{Supp}(X + Y) = \mathbb{N}$, on a

$$P(X + Y = x) = 0$$

★ Si $x \in \text{Supp}(X + Y) = \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} P(X + Y = x) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \underbrace{P(X = x - j)}_{=0 \text{ si } x-j < 0} P(Y = j) \\ &= \sum_{j=0}^x P(X = x - j) P(Y = j) \\ &= \sum_{j=0}^x e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x-j}}{(x-j)!} e^{-\mu} \frac{\mu^j}{j!} \\ &= e^{-\lambda-\mu} \sum_{j=0}^x \frac{\lambda^{x-j}}{(x-j)!} \frac{\mu^j}{j!} \\ &= \frac{e^{-\lambda-\mu}}{x!} \sum_{j=0}^x \binom{x}{j} \lambda^{x-j} \mu^j \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{x!} (\lambda + \mu)^x \end{aligned}$$

On a donc bien $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$ $\square$