

Variables aléatoires réelles Chapitre 12

Preuve des résultats importants du cours

0.1 Fonction affine d'une variable à densité

• **Preuve fonction affine d'une var à densité**

Soit X une variable aléatoire à densité (notée f_X) définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et deux réels a et b .

Si $a \neq 0$, alors $aX + b$ est une variable aléatoire à densité.

On sait que $Y = aX + b$ est une variable aléatoire (Y est la transformée affine de la variable aléatoire X).

Montrons que Y est une variable aléatoire à densité.

Notons F_X et F_Y les fonctions de répartition de X et Y .

Pour tout réel x , on a : $F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(aX + b \leq x) = P(aX \leq x - b)$.

Il nous faut alors distinguer les cas où $a < 0$ et $a > 0$.

- Si $a > 0$, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}, F_Y(x) = P(X \leq \frac{x-b}{a}) = F_X(\frac{x-b}{a})$.

Or X est une variable aléatoire à densité, sa fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en qqs points (en nombre fini) et la fonction $x \mapsto \frac{x-b}{a}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc par composition F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en un nombre fini de points.

Ce qui prouve dans ce cas ($a > 0$) que Y est une variable aléatoire à densité.

- Si $a < 0$, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}, F_Y(x) = P(X \geq \frac{x-b}{a}) = 1 - F_X(\frac{x-b}{a})$.

Les mêmes arguments que dans le cas où $a > 0$ permettent de dire que F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en un nombre fini de points.

Ce qui prouve dans ce cas ($a < 0$) que Y est une variable aléatoire à densité.

- **Preuve qu'une densité f_Y de Y est :** $\forall x \in \mathbb{R}, f_Y(x) = \frac{1}{|a|} f_X(\frac{x-b}{a})$.

Pour déterminer une densité de Y il suffit de dériver partout où cela est possible la fonction de répartition de Y . Ainsi

- Si $a > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}, F'_Y(x) = \frac{1}{a} F'_X(\frac{x-b}{a}) = \frac{1}{a} f_X(\frac{x-b}{a})$.
- Si $a < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}, F'_Y(x) = -(\frac{1}{a} F'_X(\frac{x-b}{a})) = -\frac{1}{a} f_X(\frac{x-b}{a})$.

Conclusion :

une densité f_Y de Y est : $\forall x \in \mathbb{R}, f_Y(x) = \frac{1}{|a|} f_X(\frac{x-b}{a})$.

0.2 Lois uniformes

0.2.1 Loi uniforme sur $[a, b]$

Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $\mathcal{U}([a, b])$:

si X a pour densité la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{b-a}$, si $x \in [a, b]$ et 0 sinon.

- **Preuve que f est bien une densité pour X :**

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ et positive : en effet $f(x) = \frac{1}{b-a} > 0$ car $a < b$, si $x \in [a, b]$ et 0 sinon
2. f est continue sur $[a, b]$ en tant que fonction constante et f est continue sur $] -\infty, a[$ et sur $] b, +\infty[$ en tant que fonction nulle. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en a et b .
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_a^b \frac{1}{b-a} dt$.
Cette intégrale n'a aucun problème de convergence.
 $\int_a^b \frac{1}{b-a} dt = [\frac{t}{b-a}]_a^b = \frac{b-a}{b-a} = 1$.
Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$.

Conclusion : f est une densité de X .

- Preuve que La fonction de répartition d'une variable aléatoire X qui suit la loi $\mathcal{U}([a, b])$, est la fonction F

définie pour tout réel x , par :
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

Déterminons la fonction de répartition F de X .

D'après le cours, on sait que $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

$X(\Omega) = [a, b]$ (car la densité f de X ne s'annule pas sur $[a, b]$.)

Si $x < a$: $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$

Si $x \in [a, b]$: $F(x) = \int_{-\infty}^a 0 dt + \int_a^x f(t) dt = \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \left[\frac{t}{b-a} \right]_a^x = \frac{x-a}{b-a}$.

Si $x > b$: $F(x) = \int_{-\infty}^a 0 dt + \int_a^b \frac{1}{b-a} dt + \int_b^x 0 dt = \int_a^b \frac{1}{b-a} dt = \left[\frac{t}{b-a} \right]_a^b = \frac{b-a}{b-a} = 1$.

Bilan : la fonction de répartition F de X est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

- Preuve que si X est une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{U}([a, b])$ alors X possède une espérance donnée par

$$E(X) = \frac{a+b}{2}.$$

On s'intéresse à la convergence absolue de $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt = \int_a^b t \frac{1}{b-a} dt$.

Cette intégrale n'a aucun problème de convergence.

Et, $\int_a^b t \frac{1}{b-a} dt = \left[\frac{t^2}{2(b-a)} \right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$.

- Preuve que si X est une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{U}([a, b])$ alors X possède une variance donnée par

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

On s'intéresse à la convergence absolue de $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t) dt = \int_a^b t^2 \frac{1}{b-a} dt$.

Cette intégrale n'a aucun problème de convergence.

Et, $\int_a^b t^2 \frac{1}{b-a} dt = \left[\frac{t^3}{3(b-a)} \right]_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{(b-a)(b^2 + ab + a^2)}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}$.

Par la formule de $K-H$:

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{(b^2 - 2ab + a^2)}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

0.2.2 Loi uniforme sur $[0, 1]$

Il s'agit de prendre $a = 0$ et $b = 1$ dans les preuves ci-dessus.

- Preuve de la transformation affine de var uniformes

Pour tout couple de réels (a, b) tel que $a < b$, on a : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1]) \Leftrightarrow (b-a)X + a \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$

$X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$, posons $Y = (b-a)X + a$.

$X(\Omega) = [0, 1]$ alors $Y(\Omega) = [a, b]$.

$\forall x \in \mathbb{R}, P(Y \leq x) = P((b-a)X + a \leq x) = P(X \leq \frac{x-a}{b-a})$ car $a < b = F_X(\frac{x-a}{b-a})$.

D'où

si $x < a$ alors $\frac{x-a}{b-a} < 0$ donc $P(Y \leq x) = F_X(\frac{x-a}{b-a}) = 0$

si $x \in [a, b]$ alors $\frac{x-a}{b-a} \in [0, 1]$, donc $P(Y \leq x) = F_X(\frac{x-a}{b-a}) = \frac{x-a}{b-a}$.

si $x > b$ alors $\frac{x-a}{b-a} > 1$, donc $P(Y \leq x) = F_X(\frac{x-a}{b-a}) = 1$.

$$\text{Bilan} \\ F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases} \quad \text{On reconnaît la fonction de répartition d'une variable qui suit la loi uniforme sur } [a, b].$$

Inversement si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$ alors posons : $Y = \frac{X-a}{b-a}$.
 $X(\Omega) = [a, b]$ alors $Y(\Omega) = [0, 1]$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(Y \leq x) = P\left(\frac{X-a}{b-a} \leq x\right) = P(X \leq (b-a)x + a) \text{ car } a < b = F_X((b-a)x + a).$$

D'où

si $x < 0$ alors $(b-a)x + a < 0$ donc $P(Y \leq x) = F_X((b-a)x + a) = 0$

si $x \in [0, 1]$ alors $(b-a)x + a \in [a, b]$, donc $P(Y \leq x) = F_X((b-a)x + a) = x$.

si $x > 1$ alors $(b-a)x + a > b$, donc $P(Y \leq x) = F_X((b-a)x + a) = 1$.

$$\text{Bilan} \\ F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{On reconnaît la fonction de répartition d'une variable qui suit la loi uniforme sur } [0, 1].$$

0.3 Lois exponentielles

0.3.1 Loi exponentielle de paramètre λ , avec $\lambda > 0$

Une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ , noté $\varepsilon(\lambda)$, si une densité de X est la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

• **Preuve que une densité de X est la fonction f définie par :**

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ et positive : en effet $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} > 0$ si $x \geq 0$ et 0 si $x < 0$.
2. f est continue sur $\mathbb{R}_+$ en tant que fonction usuelle et f est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ en tant que fonction nulle. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0.
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt$.
 Cette intégrale est impropre en $+\infty$.
 Soit $M > 0$ alors $\int_0^M \lambda e^{-\lambda t} dt = [-e^{-\lambda t}]_0^M = 1 - e^{-\lambda M} \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 1$.
 Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$.

Conclusion : f est une densité de X .

• **Preuve que**

La fonction de répartition d'une variable aléatoire X qui suit la loi $\varepsilon(\lambda)$, est la fonction F définie pour tout réel x ,

$$\text{par : } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

D'après le cours, on sait que $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

$X(\Omega) = \mathbb{R}^+$ (car la densité f de X ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^+$.)

$$\text{Si } x < 0 : F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$$

$$\text{Si } x \geq 0 : F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Bilan : la fonction de répartition F de X est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- **Preuve que si X est une variable aléatoire qui suit la loi $\varepsilon(\lambda)$ alors X possède une espérance donnée par**

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

On s'intéresse à la convergence absolue : $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt = \int_0^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt$.

Cette intégrale est impropre en $+\infty$ (car $t \mapsto \lambda t e^{-\lambda t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$).

La convergence absolue de cette intégrale se résume à la convergence simple car $\forall t \geq 0, \lambda t e^{-\lambda t} \geq 0$.

Soit $M > 0$, on va effectuer une IPP.

On pose $u'(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $u(t) = -e^{-\lambda t}$, $v(t) = t$, $v'(t) = 1$ avec u et v de classe C^1 sur $[0, +\infty[$.

Alors, $\int_0^M \lambda t e^{-\lambda t} dt = [-t e^{-\lambda t}]_0^M + \int_0^M e^{-\lambda t} dt = -M e^{-\lambda M} + \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda M} \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} = 1$ car par CC $M e^{-\lambda M} \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 0$ et $e^{-\lambda M} \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 0$.
Donc $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

- **Preuve que si X est une variable aléatoire qui suit la loi $\varepsilon(\lambda)$ alors X possède une variance donnée par**

$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

On s'intéresse à la convergence absolue : $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t) dt = \int_0^{+\infty} \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt$.

Cette intégrale est impropre en $+\infty$ (car $t \mapsto \lambda t^2 e^{-\lambda t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$).

La convergence absolue de cette intégrale se résume à la convergence simple car $\forall t \geq 0, \lambda t^2 e^{-\lambda t} \geq 0$.

Soit $M > 0$, on va effectuer une IPP.

On pose $u'(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $u(t) = -e^{-\lambda t}$, $v(t) = t^2$, $v'(t) = 2t$ avec u et v de classe C^1 sur $[0, +\infty[$.

Alors, $\int_0^M \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt = [-t^2 e^{-\lambda t}]_0^M + 2 \int_0^M t e^{-\lambda t} dt = -M^2 e^{-\lambda M} + 2 \int_0^M t e^{-\lambda t} dt$.

Or d'après le résultat sur $E(X)$ on a vu que $\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda^2}$.

Puis par CC $M^2 e^{-\lambda M} \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 0$

Donc $E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$.

Puis par $K-H$:

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

- **Preuve de la transformation affine de var exponentielles :**

$$\forall \lambda > 0, X \mapsto \varepsilon(1) \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} X \mapsto \varepsilon(\lambda).$$

Soit $X \mapsto \varepsilon(1)$ et posons $Y = \frac{1}{\lambda} X$ alors

$$X(\Omega) = \mathbb{R}_+ = Y(\Omega).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(Y \leq x) = P\left(\frac{1}{\lambda} X \leq x\right) = P(X \leq \lambda x) \text{ car } \lambda > 0 = F_X(\lambda x).$$

Donc

si $x < 0$ alors $P(Y \leq x) = F_X(\lambda x) = 0$

si $x \geq 0$ alors $P(Y \leq x) = F_X(\lambda x) = 1 - e^{-\lambda x}$.

On a reconnu la fonction de répartition d'une variable qui suit la loi exponentielle de paramètre λ .

Inversement

Si $X \mapsto \varepsilon(\lambda)$ alors posons $Y = \lambda X$.

$$X(\Omega) = \mathbb{R}_+ = Y(\Omega).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(Y \leq x) = P(\lambda X \leq x) = P\left(X \leq \frac{1}{\lambda} x\right) \text{ car } \lambda > 0 = F_X\left(\frac{1}{\lambda} x\right).$$

Donc

si $x < 0$ alors $P(Y \leq x) = F_X\left(\frac{1}{\lambda} x\right) = 0$

si $x \geq 0$ alors $P(Y \leq x) = F_X\left(\frac{1}{\lambda} x\right) = 1 - e^{-x}$.

On a reconnu la fonction de répartition d'une variable qui suit la loi exponentielle de paramètre 1.

• **Preuve de la transformation affine de var exponentielles en lien avec variables uniformes :** $\forall \lambda > 0$, si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$ alors $\frac{-1}{\lambda} \ln(1 - X) \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)$.

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$ et posons $Y = \frac{-1}{\lambda} \ln(1 - X)$ alors
 $X(\Omega) = [0, 1[$ et $(1 - X)(\Omega) =]0, 1]$, $\ln(1 - X)(\Omega) =]-\infty, 0]$.
 Enfin $Y(\Omega) = [0, +\infty[$ car $\lambda > 0$.

Soit $x < 0$, alors $P(Y \leq x) = 0$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$, $P(Y \leq x) = P(\frac{-1}{\lambda} \ln(1 - X) \leq x) = P(\ln(1 - X) \geq -\lambda x)$ car $\lambda > 0 = P((1 - X) \geq e^{-\lambda x}) = P(X \leq 1 - e^{-\lambda x}) = F_X(1 - e^{-\lambda x})$.

Or, si $x \in \mathbb{R}_+$ alors $1 - e^{-\lambda x} \in [0, 1]$ donc $P(Y \leq x) = F_X(1 - e^{-\lambda x}) = 1 - e^{-\lambda x}$.

Bilan : la fonction de répartition de Y est :

$\begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ On a reconnu la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre λ .

0.4 Lois normales

0.4.1 Loi Normale centrée réduite : $\mathcal{N}(0, 1)$

Une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, si une densité de X est la fonction φ définie pour tout réel x

par : $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

En effet pour tout réel x , $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et positive. Elle est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

Et on admet que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$

On admet aussi que :

La fonction de répartition d'une variable aléatoire X qui suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, est la fonction notée Φ définie pour tout réel x , par :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

• **Preuve que pour tout réel x , on a : $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.**

En particulier : $\Phi(0) = \frac{1}{2}$.

Pour tout réel x , on a : $\Phi(-x) + \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

On va effectuer un changement de variable dans la première intégrale : on pose $u = -t$ donc $du = -dt$, les bornes deviennent : $-\infty \rightarrow +\infty$ et $-x \rightarrow x$ d'où en utilisant la parité de φ :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{+\infty}^x e^{-\frac{(-u)^2}{2}} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{(u)^2}{2}} du$$

Ainsi par Chasles :

$$\Phi(-x) + \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{(u)^2}{2}} du + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1.$$

D'où : pour tout réel x , on a : $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

De là, pour $x = 0$, on a $\Phi(-0) = 1 - \Phi(0)$ donc $\Phi(0) = \frac{1}{2}$.

• **Preuve que si X est une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ alors X possède une espérance donnée par $E(X) = 0$ et une variance donnée par $V(X) = 1$.**

On s'intéresse à la convergence absolue de $\int_{-\infty}^{+\infty} t\varphi(t)dt$.

Cette intégrale est doublement impropre en $-\infty$ et $+\infty$, car $t \mapsto t\varphi(t)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Mais cette fonction est aussi impaire (car φ est paire).

Donc si l'on prouve que $\int_0^{+\infty} t\varphi(t)dt$ est convergente alors par changement de variable $u = -t$, on aura par théorème d'imparité, que $\int_{-\infty}^{+\infty} t\varphi(t)dt$ converge et en plus : $\int_{-\infty}^{+\infty} t\varphi(t)dt = 0$ donc que $E(X) = 0$.

$\int_0^{+\infty} t\varphi(t)dt$ est impropre en $+\infty$.

$$\text{Soit } M > 0, \int_0^M t\varphi(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-\frac{t^2}{2}} \right]_0^M = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (1 - e^{-\frac{M^2}{2}}) \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Donc $\int_0^{+\infty} t\varphi(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, elle converge et on a bien le résultat énoncé par théorème d'imparité.

Pour la variance, d'après la formule de $K - H$, et comme $E(X) = 0$, on aura $V(X) = E(X^2)$.

On s'intéresse donc à la convergence absolue de $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\varphi(t)dt$.

Cette intégrale est doublement impropre en $-\infty$ et $+\infty$, car $t \mapsto t^2\varphi(t)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Mais cette fonction est aussi paire (car φ est paire et fonction carré aussi).

Donc si l'on prouve que $\int_0^{+\infty} t^2\varphi(t)dt$ est convergente alors par changement de variable $u = -t$, on aura par théorème de parité que $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\varphi(t)dt$ converge et en plus : $\int_{-\infty}^{+\infty} t\varphi(t)dt = 2 \int_0^{+\infty} t^2\varphi(t)dt$.

$\int_0^{+\infty} t^2\varphi(t)dt$ est impropre en $+\infty$.

$$\text{Soit } M > 0, \int_0^M t^2\varphi(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \text{ on va faire une IPP :}$$

on pose $u'(t) = t \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}, u(t) = -e^{-\frac{t^2}{2}}, v(t) = t, v'(t) = 1$, avec u et v de classe C^1 sur $[0, M]$.

$$\text{Donc } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-te^{-\frac{t^2}{2}} \right]_0^M + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^M e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-Me^{-\frac{M^2}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^M e^{-\frac{t^2}{2}} dt).$$

Avec :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-Me^{-\frac{M^2}{2}}) \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 0 \text{ car en posant } T = M^2 \text{ on a } -\sqrt{T}e^{-\frac{T}{2}} \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0 \text{ par C.C.}$$

$$\text{Et de plus } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^M e^{-\frac{t^2}{2}} dt \text{ cette intégrale converge quand } M \rightarrow +\infty \text{ car } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Finalement : } \int_0^{+\infty} t^2\varphi(t)dt = \frac{1}{2} \text{ et donc d'après ce qui a été dit précédemment : } \int_{-\infty}^{+\infty} t\varphi(t)dt = 2 \int_0^{+\infty} t^2\varphi(t)dt = 2 \times \frac{1}{2} = 1.$$

Conclusion : $V(X) = E(X^2) = 1$.

• **Preuve du changements de variables normales :**

Pour tout réel m et pour tout réel $\sigma > 0$, on a :

$$X \text{ suit la loi } \mathcal{N}(m, \sigma^2) \Leftrightarrow \frac{X-m}{\sigma} \text{ suit la loi } \mathcal{N}(0, 1).$$

On va utiliser le résultat vu au début du chapitre sur les transformées affine de variable à densité.

On pose $X^* = \frac{X-m}{\sigma}$, X^* apparaît comme transformée affine de la v.a.r. X .

En effet : $X^* = \frac{1}{\sigma}X - \frac{m}{\sigma}$ ($X^* = aX + b$ avec $a = \frac{1}{\sigma}, b = -\frac{m}{\sigma}$.)

On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la densité de probabilité f_{X^*} vérifie :

$$f_{X^*}(x) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{x-b}{a}\right) = \frac{1}{\frac{1}{\sigma}} f_X\left(\frac{x+\frac{m}{\sigma}}{\frac{1}{\sigma}}\right) = \sigma \cdot f_X(\sigma x + m) = \sigma \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sigma x + m - m)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

On reconnaît la densité de probabilité de la loi normale centrée réduite.

Ainsi : $X^* \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

Pour la réciproque :

On se sert ici du fait que X apparaît comme transformée affine de la v.a.r. X^* .

En effet : $X = \sigma X^* + m$ ($X = aX^* + b$ avec $a = \sigma, b = m$). On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la densité de probabilité f_X vérifie :

$$f_X(x) = \frac{1}{|a|} f_X^*\left(\frac{x-b}{a}\right) = \frac{1}{\sigma} f_X^*\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

On reconnaît la densité de probabilité de la loi normale de paramètre (m, σ^2) .

Ainsi : $X^* \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

• **Preuve que si X est une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors X possède une espérance donnée par $E(X) = m$ et une variance donnée par $V(X) = \sigma^2$.**

D'après la transformée affine de X , en posant $X^* = \frac{X-m}{\sigma}$ on a alors : $X = \sigma X^* + m$ et $X^* \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

Par linéarité de l'espérance, la v.a.r. X^* admet une espérance donnée par : $E(X) = \sigma E(X^*) + m = \sigma \times 0 + m = m$.

On a aussi : $V(X) = \sigma^2 V(X^*) = \sigma^2 \times 1 = \sigma^2$.

• Transformée affine de lois normales

Toute transformation affine de X est encore une loi normale. Plus précisément, si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors $aX + b$ suit la loi $\mathcal{N}(am + b, a^2\sigma^2)$, $a \neq 0$.

On va utiliser le résultat vu au début du chapitre sur les transformées affines de variable à densité.

$X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors sa transformée affine $Y = aX + b$ est aussi à densité et a pour densité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_Y(x) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{x-b}{a}\right) \text{ (avec } a \neq 0\text{)}.$$

Or $f_X = \varphi_{m, \sigma}$ d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_Y(x) = \frac{1}{|a|} \times \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\frac{x-b}{a} - m)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-b-am)^2}{2a^2\sigma^2}}.$$

On reconnaît alors la densité d'une variable qui suit la loi $\mathcal{N}(am + b, a^2\sigma^2)$.