

TD M5 : Moment cinétique

Table des matières

1	Questions de cours	1
2	Ordres de grandeur des moments cinétiques	2
3	Serrage d'un écrou au couple	3
4	Mouvement d'une sphère attachée au bout d'un fil	3
5	Pendule simple	4
6	Moment cinétique d'une comète	6
7	Bille sur un cerceau immobile	7

1 Questions de cours

1.1. Que représente le point O de la notation $\vec{L}_O$ et $\vec{M}_O$? Pourquoi est-il important de le préciser ?

Réponse : L'indice O désigne le point par rapport auquel on calcule les deux moments :

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} \quad \text{et} \quad \vec{M}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

Il est indispensable de préciser O car ces moments dépendent du point choisi (changer le point de calcul change, en général, la valeur du moment).

1.2. Un point matériel est en mouvement circulaire de centre O et de rayon R dans le plan (xOy) . Dans quel sens (direct ou indirect) se dirige le point matériel si son moment cinétique par rapport à (Oz) est positif ? S'il est négatif ?

Réponse : Le mouvement est orienté dans le sens direct par rapport à $\vec{L}_O$. Si le point M se déplace dans le sens direct autour de (Oz) , alors $\vec{L}_O$ et $\vec{u}_z$ sont de même sens et

$$L_{(Oz)} = \vec{L}_O \cdot \vec{u}_z > 0$$

Inversement, si M se déplace dans le sens indirect autour de (Oz) , alors

$$L_{(Oz)} < 0$$

1.3. Dans la même situation que dans la question précédente : Que peut-on dire de sa vitesse angulaire si ce moment cinétique est positif et croît ?

Réponse : Dans ce cas,

$$L_{(Oz)} = mR^2\dot{\theta}$$

Si m et R sont constants, le fait que $L_{(Oz)}$ soit positif et croissant implique que $\dot{\theta}$ est positif et croissant : la vitesse angulaire augmente.

1.4. Une force s'appliquant sur un point M ne fait pas évoluer son moment cinétique en O . Que peut-on dire de cette force ?

Réponse : Ne pas faire évoluer le moment cinétique en O signifie que le moment de la force en O est nul :

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{0}$$

Donc soit la force est nulle, soit sa droite d'action passe par O à tout instant : c'est une force centrale de centre O .

1.5. Une force s'appliquant sur un point M ne fait pas évoluer son moment cinétique par rapport à (Oz) . Que peut-on dire de cette force ?

Réponse : Cela signifie que le moment de la force par rapport à l'axe (Oz) est nul :

$$\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{F}) = 0$$

Deux possibilités classiques :

- soit $\vec{F} \parallel (Oz)$
- soit le bras de levier par rapport à (Oz) est nul (la droite d'action de $\vec{F}$ rencontre l'axe (Oz)).

2 Ordres de grandeur des moments cinétiques

2.1. Lors de son mouvement révolution autour du Soleil, la Terre T parcourt une trajectoire quasi circulaire de centre confondu avec le centre du Soleil S et de rayon égal à la distance Terre–Soleil $D_{TS} = 150 \times 10^6$ km. Calculer la valeur du moment cinétique de la Terre par rapport à S dans le référentiel héliocentrique. La masse de la Terre vaut $m_T = 6,0 \times 10^{24}$ kg.

Réponse : Pour un mouvement circulaire uniforme, le moment cinétique de la Terre par rapport à S vaut

$$L_S = m_T D_{TS}^2 \dot{\theta}$$

La vitesse angulaire de révolution est

$$\dot{\theta} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{365 \times 86400} \simeq 1,992 \times 10^{-7} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Numériquement,

$$L_S \simeq 6,0 \times 10^{24} \text{ kg} \times (1,5 \times 10^{11} \text{ m})^2 \times 1,992 \times 10^{-7} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \simeq 2,7 \times 10^{40} \text{ J} \cdot \text{s}$$

2.2. Dans le modèle de Bohr, le mouvement de l'électron autour du noyau est assimilé à un mouvement circulaire et uniforme de centre O confondu avec le noyau. La trajectoire de rayon $r_0 = 53$ pm est parcourue à la fréquence $f = 6,6 \times 10^{15}$ Hz. Calculer le moment cinétique de l'électron. On rappelle que sa masse vaut $m_e = 9,1 \times 10^{-31}$ kg.

Réponse : Dans ce modèle, le moment cinétique de l'électron vaut

$$L = m_e r_0^2 \dot{\theta} \quad \text{avec} \quad \dot{\theta} = 2\pi f$$

On obtient donc

$$L = m_e r_0^2 2\pi f$$

Numériquement,

$$L \simeq 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg} \times (5,3 \times 10^{-11} \text{ m})^2 \times 2\pi \times 6,6 \times 10^{15} \text{ Hz} \simeq 1 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

3 Serrage d'un écrou au couple

Le constructeur d'un vélo recommande de serrer les pédales avec un couple $\Gamma = 35 \text{ N}\cdot\text{m}$. Vous disposez d'une clé de longueur $L = 20 \text{ cm}$.

3.1. Quelle force minimale faudra-t-il appliquer sur la clé pour atteindre le couple spécifié ?

Réponse : Le couple de serrage est égal au produit « force $\times$ bras de levier ». Le bras de levier ne peut pas être supérieur à L pour une clé de longueur L . Pour atteindre le couple de serrage recommandé, il est nécessaire d'appliquer une force de norme F avec un bras de levier L , de sorte que le moment de cette force soit :

$$\Gamma = F \times L \quad \Longrightarrow \quad F = \frac{\Gamma}{L} = \frac{35}{0,2} = 175 \text{ N}$$

3.2. À quel endroit et dans quelle direction faudra-t-il le faire ?

Réponse : Pour que le bras de levier soit bien égal à L , il faut que la droite d'application de la force soit distante de L de l'axe de rotation de l'écrou. Pour cela, il faut appliquer cette force à l'extrémité de la clé et perpendiculairement à la clé et à l'axe du pas de vis de la pédale.

4 Mouvement d'une sphère attachée au bout d'un fil

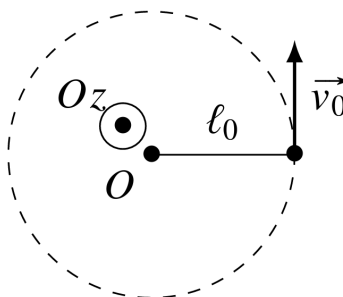


Figure 1 – Sphère attachée à un fil

Une sphère de petite taille et de masse $m = 0,10 \text{ kg}$ est attachée à l'extrémité d'un fil sans masse de longueur $\ell_0 = 1,0 \text{ m}$ dont l'autre extrémité est fixée en O . Elle se déplace sur un cercle horizontal de rayon ℓ_0 . Sa vitesse est $v_0 = 1,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

4.1. Déterminer son moment cinétique par rapport à O puis par rapport à (Oz) .

Réponse : Par définition,

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m \vec{v}$$

Ici, $\|\overrightarrow{OM}\| = \ell_0$ et $\|\vec{v}\| = v_0$, avec $\overrightarrow{OM} \perp \vec{v}$. Donc $\|\vec{L}_O\| = m\ell_0 v_0$ et $\vec{L}_O$ est porté par l'axe vertical (sens donné par la règle de la main droite), d'où

$$\vec{L}_O = m\ell_0 v_0 \vec{u}_z$$

Le moment cinétique par rapport à l'axe (Oz) vaut alors

$$L_{(Oz)} = \vec{L}_O \cdot \vec{u}_z = m\ell_0 v_0$$

4.2. On réduit brutalement la longueur du fil à $\ell_1 = 0,50 \text{ m}$. Que devient la vitesse de la sphère ?

Réponse : Les forces extérieures n'exercent pas de moment selon (Oz) (poids et réaction sont parallèles à (Oz) , et la tension est radiale), donc le moment cinétique par rapport à (Oz) se conserve :

$$m\ell_0 v_0 = m\ell_1 v_1$$

Ainsi,

$$v_1 = v_0 \frac{\ell_0}{\ell_1} = 1,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \times \frac{1,0 \text{ m}}{0,50 \text{ m}} = 2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

4.3. Comparer l'énergie cinétique avant et après la réduction de la longueur du fil.

Réponse :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Donc

$$E_{c0} = \frac{1}{2}mv_0^2, \quad E_{c1} = \frac{1}{2}mv_1^2$$

Comme $v_1 = 2v_0$, on obtient

$$E_{c1} = 4E_{c0}$$

Numériquement,

$$E_{c0} = \frac{1}{2} \times 0,10 \text{ kg} \times (1,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2 = 0,05 \text{ J}, \quad E_{c1} = \frac{1}{2} \times 0,10 \text{ kg} \times (2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2 = 0,20 \text{ J}$$

4.4. Quelle force provoque l'augmentation de l'énergie cinétique de la sphère ? Commenter.

Réponse : D'après le théorème de l'énergie cinétique,

$$\Delta E_c = E_{c1} - E_{c0} = W$$

où W est le travail des forces appliquées à la sphère. Le poids et la réaction du support sont perpendiculaires au mouvement horizontal : leur puissance est nulle. La variation d'énergie cinétique provient donc de la **tension du fil**.

Pendant le raccourcissement, la vitesse possède une composante radiale $\dot{r} \vec{u}_r$. En écrivant la tension sous la forme $\vec{T} = -T \vec{u}_r$ avec $T > 0$, sa puissance vaut

$$\mathcal{P} = \vec{T} \cdot \vec{v} = -T\dot{r}$$

Or $\dot{r} < 0$ (le rayon diminue), donc $\mathcal{P} > 0$: la tension fournit de l'énergie cinétique à la sphère.

5 Pendule simple

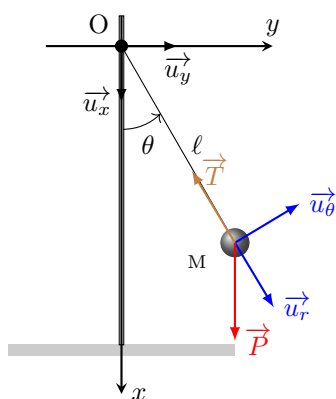


Figure 2 – Pendule simple

On considère un pendule simple de longueur $\ell = 80 \text{ cm}$ auquel on a accroché un mobile M de masse $m = 100 \text{ g}$. On donne le module du champ de pesanteur $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et les frottements sont négligés. On lâche M sans vitesse initiale avec un angle $\theta_0 = 10^\circ$. On note $T = \|\vec{T}\|$ la norme de la tension du fil.

5.1. Faire un bilan des forces s'exerçant sur le pendule.

Réponse : On néglige les frottements. Le mobile M est donc soumis à deux forces :

- le poids $\vec{P} = m\vec{g}$, vertical dirigé vers le bas ;
- la tension du fil $\vec{T}$, dirigée le long du fil vers le point d'attache O , de norme $T = \|\vec{T}\|$.

5.2. Quel est le bras de levier d du poids $\vec{P}$ de la bille par rapport à l'axe de rotation (Oz) ?

Réponse : Le bras de levier d est la distance entre l'axe (Oz) (passant par O , perpendiculaire au plan du mouvement) et la droite d'action du poids $\vec{P}$ (verticale passant par M). Géométriquement, cette distance vaut

$$d = \ell \sin \theta$$

On en déduit que le moment (scalaire) du poids par rapport à (Oz) vaut, au signe près (convention d'orientation),

$$\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{P}) = -mg\ell \sin \theta$$

5.3. Retrouver l'équation différentielle vérifiée par θ en utilisant la loi du moment cinétique, puis à l'aide d'un raisonnement énergétique.

Réponse :

1) Par la loi du moment cinétique.

Le moment cinétique de M par rapport à O (mouvement plan) vaut

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = m\ell^2\dot{\theta} \vec{u}_z$$

Donc

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = m\ell^2\ddot{\theta} \vec{u}_z$$

Le moment des forces extérieures en O :

- la tension $\vec{T}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OM} \Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) = \vec{0}$

- le poids donne

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = -mg\ell \sin \theta \vec{u}_z$$

La loi du moment cinétique donne alors

$$m\ell^2\ddot{\theta} \vec{u}_z = -mg\ell \sin \theta \vec{u}_z \quad \Longrightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0$$

2) Par un raisonnement énergétique.

La tension ne travaille pas (toujours perpendiculaire au déplacement), donc l'énergie mécanique se conserve :

$$E_m = E_c + E_p = \text{cste.}$$

Avec $v = \ell\dot{\theta}$, on a

$$E_c = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2.$$

En prenant l'origine de l'énergie potentielle en O ,

$$E_p = -mg\ell \cos \theta$$

Ainsi

$$\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell \cos \theta = \text{cste}$$

En dérivant :

$$m\ell^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mg\ell \sin \theta \dot{\theta} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0$$

(en supposant $\dot{\theta}$ pas identiquement nulle), ce qui retrouve la même équation différentielle.

6 Moment cinétique d'une comète

On repère une comète de masse m lors de son passage au point P_0 , point de sa trajectoire (figure 4) le plus proche du Soleil S , appelé périhélie. Cette trajectoire plane est repérée en coordonnées polaires de centre $O = S$. L'instant où la comète passe en P_0 est pris comme instant initial. La comète est alors animée d'une vitesse v_0 et sa distance au Soleil est r_0 .

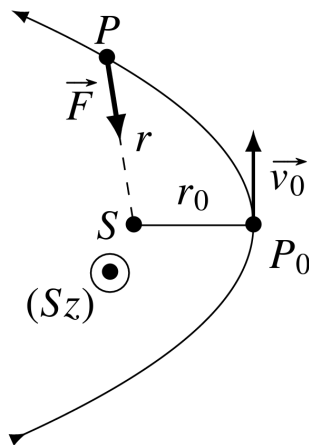


Figure 3 – Trajectoire de la comète

6.1. Justifier que la vitesse radiale est nulle en P_0 .

Réponse : On repère le mouvement en coordonnées polaires $P(r, \theta)$. En utilisant les notations usuelles,

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r\dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

La distance au Soleil est minimale en P_0 . Ainsi, $r(t)$ est extrémale en P_0 , donc

$$\dot{r}(P_0) = 0$$

La vitesse radiale $\dot{r} \vec{u}_r$ est donc nulle en P_0 .

6.2. Exprimer le moment cinétique initial de la comète par rapport à S .

Réponse : Par définition, le moment cinétique de la comète (assimilée à un point matériel) par rapport à S vaut

$$\vec{L}_S(t=0) = m \overrightarrow{SP_0} \wedge \vec{v}_0$$

Au point P_0 , on a $\|\overrightarrow{SP_0}\| = r_0$ et $\vec{v}_0 \perp \overrightarrow{SP_0}$ (vitesse orthoradiale au périhélie), donc

$$\vec{L}_S(t=0) = mr_0 v_0 \vec{u}_z$$

où $\vec{u}_z$ est le vecteur unitaire dirigé selon l'axe (Sz) , perpendiculaire à la fois à $\overrightarrow{SP_0}$ et à $\vec{v}_0$ (sens donné par la règle de la main droite).

6.3. La seule force qui s'exerce sur la comète est la force d'attraction gravitationnelle exercée par le Soleil. Montrer que son moment cinétique est une constante du mouvement.

Réponse : La force gravitationnelle exercée par le Soleil sur la comète est dirigée selon la droite SP :

$$\vec{F} // \overrightarrow{SP}$$

Le moment de cette force par rapport à S vaut alors

$$\vec{\mathcal{M}}_S = \overrightarrow{SP} \wedge \vec{F} = \vec{0} \quad \forall t.$$

D'après le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}_S}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_S = \vec{0} \implies \vec{L}_S = \text{constante}$$

En particulier, on conserve

$$\vec{L}_S = mr_0 v_0 \vec{u}_z$$

7 Bille sur un cerceau immobile

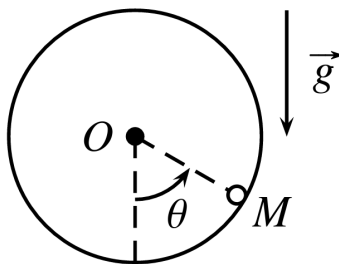


Figure 4 – Bille sur un cerceau

Une bille M , de masse m , glisse dans la rainure intérieure d'un cerceau de rayon R . M est soumise à des frottements fluides, opposés à la vitesse, de coefficient de proportionnalité α . M est initialement placée en $\theta_0 < \pi/2$ sans vitesse initiale.

7.1. Établir l'équation différentielle qui décrit l'évolution de la position $\theta(t)$ de M . On se placera ensuite dans le cas de petits angles.

Réponse : Deux méthodes existent :

- le principe fondamental de la dynamique
- le théorème du moment cinétique.

Méthode 1 : Principe fondamental de la dynamique.

Dans le repère $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, la position de M est décrite par

$$\overrightarrow{OM} = R \vec{u}_r,$$

sa vitesse par

$$\vec{v}(t) = R\dot{\theta}(t) \vec{u}_\theta,$$

et son accélération par

$$\vec{a}(t) = -R\dot{\theta}^2 \vec{u}_r + R\ddot{\theta} \vec{u}_\theta.$$

Dans le référentiel galiléen du laboratoire, M est soumis au poids $m\vec{g}$ et à l'action du cerceau, qui présente deux composantes : le frottement orthoradial

$$\vec{f}_f = -\alpha \vec{v}$$

et la réaction normale

$$\vec{N} = -N \vec{u}_r.$$

Le PFD donne $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{f}_f + \vec{N}$. En projetant sur $\vec{u}_\theta$ (pour éliminer N), on obtient :

$$mR\ddot{\theta}(t) = -\alpha R\dot{\theta}(t) - mg \sin \theta(t).$$

Dans le cas de petits angles $|\theta| \ll 1$, $\sin \theta = \theta + o(\theta)$ et, au premier ordre :

$$\frac{R}{g} \ddot{\theta}(t) + \frac{\alpha R}{mg} \dot{\theta}(t) + \theta(t) = 0.$$

Méthode 2 : théorème du moment cinétique.

Dans le repère $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, on a

$$\overrightarrow{OM} = R \vec{u}_r, \quad \vec{v}(t) = R\dot{\theta}(t) \vec{u}_\theta.$$

Le moment cinétique de M par rapport à O vaut alors

$$\vec{\sigma}_O(t) = \overrightarrow{OM} \wedge m \vec{v} = R \vec{u}_r \wedge m R \dot{\theta} \vec{u}_\theta = m R^2 \dot{\theta}(t) \vec{u}_z.$$

Donc

$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = m R^2 \ddot{\theta}(t) \vec{u}_z.$$

Calculons ensuite les moments des forces par rapport à O :

- Le poids : $\vec{\mathcal{M}}_O(m \vec{g}) = \overrightarrow{OM} \wedge m \vec{g}$. Sa norme vaut $mgR \sin \theta$ et il est dirigé suivant $\vec{u}_z$ avec le signe négatif (sens de retour vers $\theta = 0$), d'où

$$\vec{\mathcal{M}}_O(m \vec{g}) = -mgR \sin \theta \vec{u}_z.$$

- La réaction normale $\vec{N} = -N \vec{u}_r$ est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$, donc

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{N}) = \vec{0}.$$

- Le frottement fluide orthoradial $\vec{f}_f = -\alpha \vec{v} = -\alpha R \dot{\theta} \vec{u}_\theta$ donne

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_f) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}_f = R \vec{u}_r \wedge (-\alpha R \dot{\theta} \vec{u}_\theta) = -\alpha R^2 \dot{\theta} \vec{u}_z.$$

Le théorème du moment cinétique donne alors

$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) \implies m R^2 \ddot{\theta} \vec{u}_z = (-mgR \sin \theta - \alpha R^2 \dot{\theta}) \vec{u}_z.$$

Après simplification,

$$m R \ddot{\theta} = -\alpha R \dot{\theta} - mg \sin \theta.$$

Dans le cadre des petits angles $\sin \theta \simeq \theta$, on retrouve :

$$\frac{R}{g} \ddot{\theta}(t) + \frac{\alpha R}{mg} \dot{\theta}(t) + \theta(t) = 0.$$

7.2. Pour quelle valeur critique R_c du cerceau, M atteint-il le plus rapidement possible la position d'équilibre? Établir dans ce cas l'expression de la position $\theta(t)$ de M et en tracer l'allure.

Réponse : On considère l'équation réduite (petits angles) :

$$\frac{R}{g} \ddot{\theta} + \frac{\alpha R}{mg} \dot{\theta} + \theta = 0 \iff \ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m} \dot{\theta} + \frac{g}{R} \theta = 0.$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 + \frac{\alpha}{m} r + \frac{g}{R} = 0,$$

de discriminant

$$\Delta = \left(\frac{\alpha}{m}\right)^2 - 4\frac{g}{R}.$$

La position d'équilibre $\theta = 0$ est atteinte le plus rapidement dans le cas critique $\Delta = 0$, soit

$$\left(\frac{\alpha}{m}\right)^2 = 4\frac{g}{R_c} \quad \Rightarrow \quad R_c = \frac{4m^2g}{\alpha^2}.$$

Dans ce cas, la racine est double :

$$r = -\frac{\alpha}{2m}.$$

La solution s'écrit donc

$$\theta(t) = (at + b) \exp\left(-\frac{\alpha}{2m}t\right).$$

Les conditions initiales imposent $\theta(0) = \theta_0 \Rightarrow b = \theta_0$, et $\dot{\theta}(0) = 0 \Rightarrow a - \frac{\alpha}{2m}b = 0$, donc

$$a = \frac{\alpha}{2m}\theta_0.$$

Finalement,

$$\theta(t) = \theta_0 \left(1 + \frac{\alpha}{2m}t\right) \exp\left(-\frac{\alpha}{2m}t\right).$$

Valeurs des paramètres utilisés pour les tracés numériques Les courbes ont été obtenues en choisissant les valeurs numériques suivantes :

— masse de la particule :

$$m = 0,10 \text{ kg},$$

— coefficient de frottement fluide :

$$\alpha = 0,50 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1},$$

— accélération de la pesanteur :

$$g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2},$$

— angle initial (petits angles) :

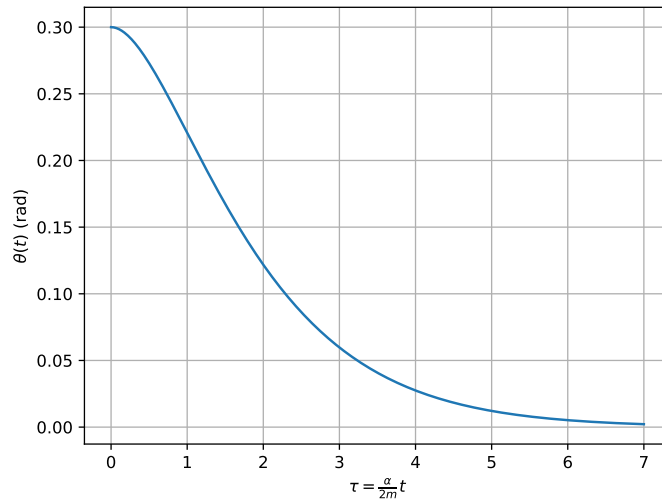
$$\theta_0 = 0,30 \text{ rad},$$

— rayon du cerceau choisi égal au rayon critique :

$$R = R_c = \frac{4m^2g}{\alpha^2} \simeq 1,57 \text{ m}.$$

On introduit l'échelle de temps adimensionnée utilisée pour les représentations graphiques :

$$\tau = \frac{\alpha}{2m} t.$$

Figure 5 – Évolution de $\theta(t)$ au cours du mouvement amorti critique

7.3. Établir l'expression de la vitesse de M et tracer l'allure temporelle de sa norme.

Réponse : On a

$$\vec{v}(t) = R\dot{\theta}(t) \vec{u}_\theta.$$

Avec

$$\theta(t) = \theta_0 \left(1 + \frac{\alpha}{2m}t \right) \exp\left(-\frac{\alpha}{2m}t\right),$$

on dérive :

$$\dot{\theta}(t) = \theta_0 \left(\frac{\alpha}{2m} \exp\left(-\frac{\alpha}{2m}t\right) - \frac{\alpha}{2m} \left(1 + \frac{\alpha}{2m}t \right) \exp\left(-\frac{\alpha}{2m}t\right) \right),$$

soit

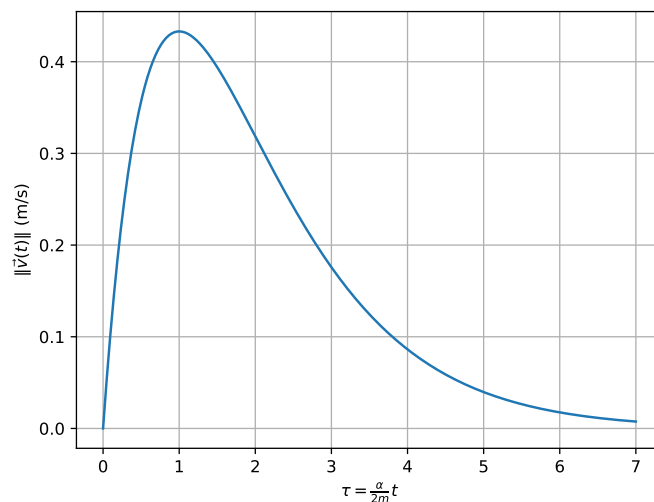
$$\dot{\theta}(t) = -\theta_0 \left(\frac{\alpha}{2m} \right)^2 t \exp\left(-\frac{\alpha}{2m}t\right).$$

Donc

$$\vec{v}(t) = -R\theta_0 \left(\frac{\alpha}{2m} \right)^2 t \exp\left(-\frac{\alpha}{2m}t\right) \vec{u}_\theta,$$

et la norme vaut

$$\|\vec{v}(t)\| = R\theta_0 \left(\frac{\alpha}{2m} \right)^2 t \exp\left(-\frac{\alpha}{2m}t\right).$$

Figure 6 – Évolution de $\|\vec{v}(t)\|$ au cours du mouvement amorti critique