

Devoir surveillé n°2 type ESSEC II

Nom :

Prénom :

Exercice 1 :	
Exercice 2 Parties A-B :	
Exercice 2 Parties C-D :	

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre. **Durée du devoir : 4h. Les téléphones portables doivent être éteints et mis dans votre sac. Le devoir est composé de 4 pages où se trouvent deux exercices, indépendants, qui peuvent être traités dans l'ordre que vous souhaitez.**



Leonhard Euler (1707-1783)

Leonhard Euler, né le 15 avril 1707 à Bâle (Suisse) et mort à 76 ans le 7 septembre 1783 (18 septembre 1783 dans le calendrier grégorien) à Saint-Petersbourg (Empire russe), est un mathématicien et physicien suisse, qui passa la plus grande partie de sa vie dans l'Empire russe et en Allemagne. Il était notamment membre de l'Académie royale des sciences de Prusse à Berlin.

Euler fit d'importantes découvertes dans des domaines aussi variés que le calcul infinitésimal et la théorie des graphes. Il introduisit également une grande partie de la terminologie et de la notation des mathématiques modernes, en particulier pour l'analyse mathématique, comme la notion de fonction mathématique. Il est aussi connu pour ses travaux en mécanique, en dynamique des fluides, en optique et en astronomie. Euler est considéré comme un éminent mathématicien du XVIII^e siècle et l'un des plus grands et des plus prolifiques de tous les temps. Une déclaration attribuée à Pierre-Simon de Laplace exprime l'influence d'Euler sur les mathématiques : « Lisez Euler, lisez Euler, c'est notre maître à tous ».

Exercice 1.

On étudie dans cet exercice une situation probabiliste décrite dans la question 4.

Les deux premières questions ont pour but d'étudier les puissances de la matrice carrée d'ordre 10 définie par :

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{pmatrix}$$

où a et b ($b \neq 0$) désignent des nombres réels.

1. Recherche des matrices $M(a, b)$ telles que $[M(a, b)]^2 = M(a, b)$

(a) Écrire une ligne de commande Python permettant d'obtenir $M(a, b)$ (a, b, n étant entrés par l'utilisateur) en utilisant les commandes

`np.ones` et `np.eye`

(b) Exprimer $[M(a, b)]^2$ comme combinaison linéaire de $M(a, b)$ et de I_{10} , où I_{10} désigne la matrice identité d'ordre 10.

Indication (On utilisera la matrice $K = M(1, 1)$ et on calculera K^2 .)

(c) Déterminer les couples (a, b) avec $b \neq 0$ tels que $[M(a, b)]^2 = M(a, b)$.

2. Calcul des puissances de $M(a, b)$.

On considère les matrices $P = M(1/10, 1/10)$ et $Q = I_{10} - P$.

(a) Calculer P^2 , Q^2 , PQ et QP . En déduire les puissances P^k et Q^k pour $k \geq 1$.

(b) Exprimer $M(a, b)$ comme combinaison linéaire de P et de Q et en déduire $[M(a, b)]^n$ comme combinaison linéaire des matrices P et Q . Expliciter enfin la matrice $[M(a, b)]^n$.

3. Limite des puissances de $M(1 - 9b, b)$ pour $0 \leq b \leq 1/9$

On suppose que a et b sont des nombres réels positifs tels que $a + 9b = 1$ (donc $a = 1 - 9b$).

On dit que la suite de matrice $[M(a, b)]^n$ converge vers une matrice L , lorsque tous les coefficients de $[M(a, b)]^n$ convergent vers les coefficients respectifs de L quand n tend vers $+\infty$.

(a) Déterminer la matrice limite L de la suite $[M(1 - 9b, b)]^n$ quand n tend vers $+\infty$.

(b) Exprimer la matrice L comme combinaison linéaire des matrices P et Q .

4. Etude des déplacements d'un pion sur un damier.

On considère un damier à 10 cases numérotées 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

On considère les déplacements d'un pion situé à l'instant 0 sur la case 0, et à l'instant n (où n désigne un entier naturel) sur une case dont le numéro est une variable aléatoire X_n .

On fait enfin les hypothèses suivantes concernant les déplacements du pion : si à l'instant n le pion est sur la case k ($0 \leq k \leq 9$), il se trouve encore sur la case k à l'instant $n + 1$ avec la probabilité $1/2$, et sinon, il se trouve de façon équiprobable sur l'une des autres cases.

- (a) Pour tout entier j compris entre 0 et 9, exprimer la probabilité $p(X_{n+1} = j)$ en fonction des probabilités $p(X_n = 0), p(X_n = 1), \dots, p(X_n = 9)$.

On note V_n le vecteur colonne dont les composantes sont, de haut en bas, les probabilités $p(X_n = 0), p(X_n = 1), \dots, p(X_n = 9)$. Déterminer une matrice carrée M d'ordre 10 telle que

$$V_{n+1} = M \cdot V_n$$

- (b) Compléter le programme Python afin qu'il affiche la valeur de $p(X_n = 0)$ pour n entré par l'utilisateur

```
import numpy as np

n=10

V=np.array([ .....])

M=.....

for i in range(1, n+1) :

    V=.....(M,V)

print( ..... )
```

- (c) Calculer en fonction de n les probabilités $p(X_n = 0), p(X_n = 1), \dots, p(X_n = 9)$, puis leurs limites quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2.

On désigne par n un entier naturel non nul et l'on se propose d'étudier les racines de l'équation

$$e^x = x^n \text{ désignée par } (E_n).$$

A cet effet on introduit la fonction f_n définie par $f_n(x) = 1 - x^n e^{-x}$.

ETUDE DES RACINES POSITIVES DE (E_n)

A) Etude des racines positives des équations (E_1) et (E_2) :

1. Etudier et représenter sur $[0, +\infty[$ les fonctions f_1 et f_2 .
2. Etudier l'existence de racines positives pour les équations (E_1) et (E_2) . On rappelle que $2 < e < 3$.

B) Etude des racines positives de l'équation (E_3) :

1. Etudier et représenter sur $[0, +\infty[$ la fonction f_3 . On donne les valeurs approchées $e^2 \simeq 7,4$; $e^3 \simeq 20,1$; $e^4 \simeq 54,6$; $e^5 \simeq 148,4$.
2. En déduire que l'équation (E_3) admet deux racines positives u et v telles que $1 < u < v$, et encadrer chacune d'elles par deux entiers consécutifs.
3. Soit la suite (y_n) définie par la relation $y_{n+1} = 3 \ln(y_n)$ et la condition initiale y_0 , où y_0 est un nombre réel strictement supérieur à u .
 - Montrer que si $u < y_0 \leq v$, alors pour tout entier naturel n , $u < y_n \leq v$.
 - Montrer que si $v \leq y_0$, alors pour tout entier naturel n , $v \leq y_n$.
 - Etudier le signe de $y_{n+1} - y_n$ en fonction du signe de $y_n - y_{n-1}$.
4. (a) En déduire selon la position de y_0 par rapport à v , le sens de variation de la suite (y_n) .
 (b) Etudier enfin la convergence et la limite de la suite (y_n) .
5. On choisit désormais $y_0 = 4$.
 - (a) Ecrire un programme **Python** permettant le calcul de y_n pour un entier n donné.
 - (b) Etablir pour tout entier naturel n que $0 \leq v - y_{n+1} \leq 0,75(v - y_n)$, puis que $0 \leq v - y_n \leq (0,75)^n$.
 - (c) Comment suffit-il de choisir n pour que y_n constitue une valeur approchée de v à 10^{-5} près?
 - (d) En déduire un programme **Python** permettant d'obtenir une valeur approchée de v à 10^{-5} près.
6. Soit la suite (x_n) définie par la relation $x_{n+1} = \exp(x_n/3)$ et la condition initiale x_0 , où x_0 est un nombre réel positif strictement inférieur à v .
 - Montrer que si $u \leq x_0 < v$ alors pour tout entier naturel n , $u \leq x_n \leq v$.
 - Montrer que, si $x_0 \leq u$, alors pour tout entier naturel n , $x_n \leq u$.
 - Etudier le signe de $x_{n+1} - x_n$ en fonction du signe de $x_n - x_{n-1}$.

7. (a) En déduire selon la position de x_0 par rapport à u , le sens de variation de la suite (x_n) .
(b) Etudier enfin la convergence et la limite de la suite (x_n) .
8. On choisit désormais $x_0 = 2$.
 - (a) Etablir pour tout entier naturel n que $0 \leq x_{n+1} - u \leq 0,65(x_n - u)$,
puis que $0 \leq x_n - u \leq (0,65)^n$.
 - (b) Ecrire un programme **Python** permettant le calcul de x_n pour un entier n donné.
 - (c) Comment suffit-il de choisir n pour que x_n constitue une valeur approchée de u à 10^{-5} près?

C) Etude des racines positives de l'équation (E_n) pour $n \geq 3$:

1. Etudier sur $[0, +\infty[$ la fonction f_n . En déduire que l'équation (E_n) admet deux racines positives u_n et v_n telles que $1 < u_n < v_n$.
2. (a) Déterminer pour $n \geq 4$, le signe de $f_n(u_{n-1})$.
(b) Déduire des variations de la fonction f_n , le sens de variation de la suite (u_n) puis prouver la convergence de celle-ci.
3. (a) Montrer que $u_n = \exp(u_n/n)$, et en déduire la limite ℓ de la suite (u_n) .
(b) Puis en déduire un équivalent simple de $u_n - \ell$ quand n tend vers $+\infty$.
4. (a) Déterminer, pour $n \geq 4$ le signe de $f_n(v_{n-1})$.
(b) Déduire des variations de la fonction f_n , le sens de variation de la suite (v_n) , puis étudier la limite de celle-ci.
5. On pose pour tout réel $x > 1$: $g(x) = x - \ln(x)$.
 - (a) Montrer (à l'aide d'un théorème dont on rappellera l'énoncé) que g réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]1, +\infty[$.
 - (b) Etablir que $g(v_n/n) = \ln(n)$.
 - (c) Montrer à l'aide de g^{-1} (bijection réciproque de g) que $\frac{v_n}{n}$ tend vers $+\infty$, puis en déduire un équivalent de v_n quand n tend vers $+\infty$.

ETUDE DES RACINES NEGATIVES DE (E_n)

D) Existence des racines négatives de (E_n) :

1. Etudier sur $]-\infty; 0]$ les fonctions f_{2k} et f_{2k+1} pour tout entier $k \geq 1$.
2. A quelle condition sur l'entier n l'équation (E_n) admet-elle des racines négatives?

E) Etude des racines négatives de l'équation (E_{2n}) :

1. Encadrer entre deux entiers consécutifs la racine négative w_n de l'équation (E_{2n}) et déterminer, pour $n \geq 2$, le signe de $f_{2n}(w_{n-1})$.
2. (a) En déduire le sens de variation, la convergence et la limite ℓ de la suite (w_n) .
(b) Puis un équivalent simple de $w_n - \ell$ quand n tend vers $+\infty$.