

# Mathématiques – Centrale/Mines – DS<sub>4</sub>

*Les résultats doivent être justifiés et encadrés (ou soulignés).*

*Numérotez chaque page de votre devoir.*

*La calculatrice est interdite.*

## Exercice

Soit une matrice  $A \in \text{GL}_6(\mathbb{R})$  telle que  $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$  et  $\text{tr}(A) = 8$ .

- Q1.** Montrer que  $A$  est diagonalisable.
- Q2.** Déterminer une matrice  $D$  semblable à  $A$ .
- Q3.** Donner un polynôme annulateur de degré 2 de  $A$ .
- Q4.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Exprimer  $A^n$  en fonction de  $A$  et  $I_6$ .

## Problème 1 : Approximation uniforme des fonctions périodiques par des polynômes trigonométriques (Centrale 2025 PC)

### Notations

Si  $a$  et  $b$  sont deux entiers tels que  $a \leq b$  on note  $\llbracket a, b \rrbracket$  l'ensemble des entiers  $k$  tels que  $a \leq k \leq b$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on appelle polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à  $n$  toute fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  de la forme

$$x \longmapsto \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx},$$

où, pour tout  $k \in \llbracket -n, n \rrbracket$ ,  $c_k \in \mathbb{C}$ . On note  $\mathcal{T}_n$  l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à  $n$ . C'est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, ce qu'on ne demande pas de vérifier.

On note  $\mathcal{C}_{2\pi}^0$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des fonctions continues  $2\pi$ -périodiques de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  et  $\mathcal{C}_{2\pi}^1$  le sous-espace vectoriel des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$   $2\pi$ -périodiques. Pour  $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$  et  $h > 0$ , on pose :

$$\omega_g(h) = \sup_{|t-s| \leq h} |g(s) - g(t)|.$$

Pour toute fonction bornée  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ , on pose :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|.$$

### Partie A – Préliminaires

- Q5.** Montrer que si  $g$  est la fonction sinus, alors, pour tout  $h > 0$ ,  $\omega_g(h) \leq h$ .
- Q6.** Montrer que, pour tous  $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$  et  $h > 0$ ,  $\omega_g(h)$  est un réel bien défini.
- Q7.** On suppose que  $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^1$ . Montrer que, pour tout  $h > 0$ ,  $\omega_g(h) \leq h \|g'\|_\infty$ . En déduire que  $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_g(h) = 0$ .

On admet que  $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_g(h) = 0$  est vrai pour tout  $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$ .

Soit  $h$  et  $h'$  deux réels strictement positifs et soit  $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^1$ .

- Q8.** Montrer que, si  $h \leq h'$ , alors  $\omega_g(h) \leq \omega_g(h')$ .
- Q9.** Montrer que  $\omega_g(h + h') \leq \omega_g(h) + \omega_g(h')$ .

**Q10.** En déduire que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1 et pour tout réel  $\lambda$  strictement positif :

$$\omega_g(nh) \leq n \omega_g(h) \quad \text{et} \quad \omega_g(\lambda h) \leq (1 + \lambda) \omega_g(h).$$

**Q11.** Soit  $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$ . Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\int_{-\pi+x}^{\pi+x} g(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt.$$

**Q12.** Soit  $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $p \in \mathcal{T}_n$ , on note  $\Delta(p)$  la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Delta(p)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} p(x-t)g(t) dt.$$

Montrer que  $\Delta$  définit un endomorphisme de  $\mathcal{T}_n$ .

## Partie B –

### I – La fonction $J_n$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la fonction  $\varphi_n$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  en posant, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\varphi_n(t) = e^{-ni\frac{t}{2}} \sum_{k=0}^n e^{ikt} \quad \text{et} \quad f_n(t) = \varphi_n(t)^4.$$

Dans cette sous-partie, on fixe un entier  $n \in \mathbb{N}$ .

**Q13.** Montrer que pour tout réel  $t$  n'appartenant pas à  $2\pi\mathbb{Z}$ ,

$$\varphi_n(t) = \frac{\sin\left((n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \quad \text{et} \quad f_n(t) = \left( \frac{\sin\left((n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right)^4.$$

**Q14.** Montrer que  $\varphi_n^2$  appartient à  $\mathcal{T}_n$ , puis que  $f_n$  appartient à  $\mathcal{T}_{2n}$ .

**Q15.** Montrer qu'il existe un réel strictement positif  $c_n$  tel que  $\int_{-\pi}^{\pi} c_n f_n(t) dt = 1$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose désormais  $J_n = c_n f_n$ , de sorte que  $J_n$  est une fonction réelle positive vérifiant

$$J_n \in \mathcal{T}_{2n} \quad \text{et} \quad \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) dt = 1.$$

### II – Une majoration de $\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t) dt$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

**Q16.** Montrer que  $\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t) dt = \frac{\int_0^{\pi} t f_n(t) dt}{\int_0^{\pi} f_n(t) dt}$ .

**Q17.** Montrer que pour  $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\frac{2}{\pi} t \leq \sin t \leq t$ .

**Q18.** En déduire  $\int_0^{\pi} t f_n(t) dt \leq \pi^4 \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin(u))^4}{u^3} du$ .

**Q19.** En déduire également que  $\int_0^{\pi} f_n(t) dt \geq 2(n+1)^3 \int_0^{(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin(u))^4}{u^4} du$ .

**Q20.** Montrer qu'il existe  $a > 0$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t) dt \leq \frac{a}{n+1}$ .

### III – Approximation uniforme par des polynômes trigonométriques

Dans cette sous-partie, on fixe  $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la fonction  $T_n g$  en posant, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$T_n g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} J_n(x-t)g(t)dt.$$

L'objectif de cette sous-partie est de montrer que  $(T_n g)$  est une suite de polynômes trigonométriques qui converge uniformément vers  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Q21.** Pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$ , montrer que

$$T_n g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t)g(x-t)dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t)g(x)dt.$$

$$\text{En déduire que } |T_n g(x) - g(x)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t)|g(x-t) - g(x)|dt.$$

**Le cas  $\mathcal{C}^1$**

On suppose, seulement dans cette question, que  $g$  est  $\mathcal{C}^1$ .

**Q22.** Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\|T_n g - g\|_{\infty} \leq \frac{\alpha \|g'\|_{\infty}}{n+1},$$

où le réel  $\alpha$  a été défini à la question **Q20**.

**Q23.** Conclure que  $(T_n g)$  est une suite de polynômes trigonométriques qui converge uniformément vers  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Le cas  $\mathcal{C}^0$**

Dans cette question, on ne suppose plus que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

On rappelle le résultat admis à la question **Q7** :  $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_g(h) = 0$ .

**Q24.** Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tous réels  $t$  et  $x$ ,

$$|g(x-t) - g(x)| \leq (1+n|t|)\omega_g(1/n).$$

**Q25.** En déduire qu'il existe  $b > 0$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\|T_n g - g\|_{\infty} \leq b \omega_g(1/n).$$

**Q26.** Conclure que la suite  $(T_n)$  converge uniformément vers  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

## Problème 2 : Théorème de Perron-Frobenius (X-ENS 2017 PC)

Dans le problème,  $n$  est un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 et  $\llbracket 1, n \rrbracket$  désigne l'ensemble des nombres entiers compris entre 1 et  $n$ .

$\mathbb{C}$  désigne le corps des nombres complexes. Le module d'un nombre complexe  $z$  est noté  $|z|$ .

$\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$  (resp.  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ ) désigne l'espace des matrices à  $n$  lignes et  $m$  colonnes, à coefficients dans  $\mathbb{C}$  (resp. dans  $\mathbb{R}$ ).

La matrice transposée d'une matrice  $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$  est notée  $M^{\top}$ .

$\mathbb{C}^n$  est identifié à l'espace  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  des matrices colonnes à  $n$  lignes et à coefficients dans  $\mathbb{C}$ . Les coefficients d'un vecteur  $x \in \mathbb{C}^n$  sont notés  $x_1, \dots, x_n$ . Dans tout le problème,  $\mathbb{C}^n$  est muni de la norme  $\|\cdot\|_1$  définie par

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

Pour tous  $x \in \mathbb{C}^n$  et  $y \in \mathbb{C}^n$ , la matrice  $x^{\top} y \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$  est identifiée au nombre complexe  $\sum_{i=1}^n x_i y_i$ .

Le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{C}^n$  engendré par un vecteur  $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  est noté  $\mathbb{C}v$ .

Lorsque  $m = n$ , on utilisera la notation  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  (resp  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ) pour  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$  (resp  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ ).

La matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

sera notée  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . On note  $I_n = \text{diag}(1, \dots, 1)$  la matrice identité d'ordre  $n$ .

Pour  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on pose

$$\|M\| = \sup_{x \in \mathbb{C}^n, \|x\|_1=1} \|Mx\|_1 = \sup_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Mx\|_1}{\|x\|_1}. \quad (1)$$

Une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  sera en général identifiée à l'endomorphisme  $\varphi_M$  de  $\mathbb{C}^n$  représenté par  $M$  dans la base canonique de  $\mathbb{C}^n$  : pour  $x \in \mathbb{C}^n$ ,  $\varphi_M(x) = Mx$ . On appelle spectre d'une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , et on note  $\text{Sp}(M)$ , l'ensemble des valeurs propres de  $M$ . Le rayon spectral de  $M$ , noté  $\rho(M)$ , est défini comme le maximum des modules des valeurs propres de  $M$  :

$$\rho(M) = \max \{ |\lambda|; \lambda \in \text{Sp}(M) \}.$$

## Première partie

**Q27.** Pour toute matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et tout nombre réel  $C \geq 0$ , montrer l'équivalence

$$\|M\| \leq C \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{C}^n : \|Mx\|_1 \leq C\|x\|_1.$$

**Q28.** Montrer que l'application  $M \mapsto \|M\|$  est une norme sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

**Q29.** Montrer que pour  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ .

**Q30.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On note  $a_{i,j}$  le coefficient de  $A$  d'indice de ligne  $i$  et d'indice de colonne  $j$ . Montrer que

$$\|A\| = \max_{1 \leq j \leq n} \left( \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right).$$

**Q31.** On dit qu'une suite  $(A^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  de matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  converge vers une matrice  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  lorsque

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lim_{k \rightarrow +\infty} (a_{i,j})^{(k)} = b_{i,j}.$$

Montrer que la suite  $(A^{(k)})$  converge vers  $B$  si et seulement si  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|A^{(k)} - B\| = 0$ .

On considère dans cette question une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  triangulaire supérieure,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

On suppose que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_{i,i}| < 1.$$

Pour tout réel  $b > 0$ , on pose  $P_b = \text{diag}(1, b, b^2, \dots, b^{n-1}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Q32.** Calculer  $P_b^{-1}AP_b$ . Que se passe-t-il lorsqu'on fait tendre  $b$  vers 0?

**Q33.** Montrer qu'il existe  $b > 0$  tel que

$$\|P_b^{-1}AP_b\| < 1.$$

**Q34.** En déduire que la suite  $(A^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  converge vers 0.

## Deuxième partie

**Q35.** Déterminer le rayon spectral des matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Q36.** Dire, en justifiant brièvement la réponse, si les assertions suivantes sont exactes quels que soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,  $\mu \in \mathbb{C}$ .

- i)  $\rho(\mu A) = |\mu| \rho(A)$
- ii)  $\rho(A + B) \leq \rho(A) + \rho(B)$ .
- iii)  $\rho(AB) \leq \rho(A) \rho(B)$ .
- iv) Pour  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  inversible,  $\rho(P^{-1}AP) = \rho(A)$ .
- v)  $\rho(A^\top) = \rho(A)$ .

**Q37.** Montrer que pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,

$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

Dans les questions **Q38.** à **Q41.**, on considère une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

**Q38.** Montrer que si  $\rho(A) < 1$ , alors la suite  $(A^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  converge vers 0.

**Q39.** Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\|A^k\| \geq \rho(A)^k$ .

**Q40.** On définit la partie de  $\mathbb{R}_+$

$$E_A = \left\{ \alpha > 0 \mid \lim_{k \rightarrow +\infty} \left( \frac{A}{\alpha} \right)^k = 0 \right\}.$$

Montrer que  $E_A = ]\rho(A), +\infty[$ .

**Q41.** Montrer la formule

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}} = \rho(A).$$

**Q42.** Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  de coefficients  $a_{i,j}$ , on pose  $A_+ = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ , où  $b_{i,j} = |a_{i,j}|$ . Montrer l'inégalité

$$\rho(A) \leq \rho(A_+).$$

– Fin du sujet –