

Mathématiques – CCINP/E3A – DS₅

Les résultats doivent être justifiés et encadrés (ou soulignés).

Numérotez chaque page de votre devoir.

La calculatrice est interdite.

Exercice 1 : Série de fonctions

Pour tout entier naturel n , on définit sur l'intervalle $J = [1, +\infty[$, la fonction f_n par :

$$\forall x \in J, \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}.$$

Q1. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur J .

On note alors pour tout x de J , $\varphi(x)$ sa somme.

Q2. Montrer que cette série de fonctions ne converge pas normalement sur J .

Q3. Étudier alors sa convergence uniforme sur J .

Q4. Déterminer $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Q5. Justifier la convergence de la série de terme général u_n . On note $a = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ sa somme.

Q6. Montrer que l'on a au voisinage de l'infini : $\varphi(x) - \ell \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a}{\sqrt{x}}$.

Réponse

Q1. Soit $x \in [1, +\infty[$. Montrons que la série $\sum_{n \geq 0} f_n(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$ converge.

On note $u_n = \frac{1}{\sqrt{1+nx}} \geq 0$.

Comme $x \geq 1$, on a : $1 + (n+1)x \geq 1 + nx$.

La fonction $\sqrt{\cdot}$ est croissante, donc, $\sqrt{1 + (n+1)x} \geq \sqrt{1 + nx} > 0$.

D'où, par passage à l'inverse. $u_{n+1} \leq u_n$.

Donc, la suite (u_n) est décroissante.

De plus, comme $x \geq 1 > 0$, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc, par le théorème spécial des séries alternées, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$ converge.

Donc,

$$\sum f_n \text{ converge simplement sur } J.$$

Q2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \geq 1$. On a : $|f_n(x)| = \frac{1}{\sqrt{1+nx}}$.

De plus, la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+nx}}$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et

$$\forall x \geq 1, \varphi'(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{n}{\sqrt{1+nx}} \leq 0.$$

Donc, φ est décroissante sur $[1, +\infty[$; Comme φ est positive sur $[1, +\infty[$,

$$\|f_n\|_\infty = \varphi(1) = \frac{1}{\sqrt{1+n}}.$$

On en déduit que :

$$\|f_n\|_\infty \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \geq 0.$$

On reconnaît une série de Riemann divergente (car $\frac{1}{2} \leq 1$), donc, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \|f_n\|_\infty$ diverge.

Donc,

la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur J .

Q3. Pour tout $x \geq 1$ et $N \in \mathbb{N}$, on note $R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$ le reste de la série $\sum \frac{1}{\sqrt{1+nx}}$.

Comme il s'agit d'une série alternée,

$$|R_N(x)| \leq \left| \frac{(-1)^{N+1}}{\sqrt{1+(N+1)x}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{1+(N+1)x}}.$$

Comme $x \geq 1$, on a $1+(N+1)x \geq 2+x > 0$. Donc, en prenant la racine carrée (croissante) et en passant à l'inverse,

$$|R_N(x)| \leq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{N+2}}}_{\text{ne dépend pas de } x}.$$

Donc,

$$0 \leq \|R_N\|_\infty \leq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{N+2}}}_{\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0}.$$

Donc, par théorème d'encadrement, $\|R_N\|_\infty \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi,

la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur J .

Q4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

De plus, la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur J et $+\infty$ est une borne de J .

Ainsi, d'après le théorème de la double limite :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 + 0 + \dots = 1.$$

Q5. On note $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 0$. La suite (v_n) est positive décroissante de limite nulle, donc, par le critère spécial des séries alternées,

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.

Q6. Soit $x \geq 1$. On a :

$$\sqrt{x} \times (\varphi(x) - \ell) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sqrt{\frac{x}{1+nx}} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{x} + n}}.$$

On note $g_n(x) = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{x} + n}}$.

A x fixé, la suite est $(g_n(x))_n$ est positive décroissante de limite nulle, donc, par le critère spéciale des séries alternées, on a :

$$\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{x} + n}} \right| \leq \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{x} + N + 1}} \leq \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Donc, en notant $T_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{x} + n}}$, on a :

$$0 \leq \|T_N\|_{\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Par théorème d'encadrement, $\|T_N\|_{\infty} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$.

On en déduit que la série de fonction $\sum g_n$ converge uniformément sur $[1, +\infty[$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$g_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Ainsi, par le théorème de la limite double,

$$\sqrt{x}(\varphi(x) - \ell) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Ainsi, comme $a \neq 0$,

$$\varphi(x) - \ell \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a}{\sqrt{x}}.$$

Exercice 2 : Probabilités

Un sauteur tente de franchir des hauteurs successives numérotées $1, 2, \dots, n, \dots$.

Il ne peut tenter de passer la hauteur $n + 1$ que s'il a réussi les sauts de hauteurs $1, 2, \dots, n$.

En supposant que le sauteur a réussi tous les sauts précédents, la probabilité de succès au n -ième saut est $p_n = \frac{1}{n}$.

Ainsi le premier saut est toujours réussi.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note S_k l'événement : «le sauteur a réussi son k -ième saut» et on note X la variable aléatoire égale au numéro du dernier saut réussi.

Q7. Rappeler sans démonstration la formule des probabilités composées.

Q8. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X .

Q9. Déterminer $\mathbb{P}(X = 1)$.

Q10. Justifier que $(X = 2) = S_1 \cap S_2 \cap \overline{S_3}$. En déduire $\mathbb{P}(X = 2)$.

Q11. Pour tout entier $n \geq 2$, exprimer l'évènement $(X = n)$ en fonction d'évènements du type S_k .

Q12. Déterminer la loi de X .

Q13. Vérifier par le calcul que : $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1$.

Réponse

Q1. Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$.

Alors,

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}(A_2 | A_1) \dots \mathbb{P}(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Q2. Le sauteur effectue au moins un saut, donc,

$$X \text{ est à valeurs dans } \mathbb{N}^*.$$

Q3. On remarque que $(X = 1) = S_1 \cap \overline{S_2}$, donc,

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(S_1 \cap \overline{S_2}) = \mathbb{P}(S_1)\mathbb{P}(\overline{S_2}|S_1).$$

Or,

- le premier saut est toujours réussi : $\mathbb{P}(S_1) = 1$.
- la probabilité de réussir le deuxième saut est $\mathbb{P}(S_2|S_1) = \frac{1}{2}$.

Donc, la probabilité de le rater est : $\mathbb{P}(\overline{S_2}|S_1) = 1 - \mathbb{P}(S_2|S_1) = \frac{1}{2}$.

Donc,

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}.$$

Q4. L'évènement $(X = 2)$ est réalisé si et seulement si les deux premiers sauts ont été réussis, mais le troisième a été raté.

Donc,

$$(X = 2) = S_1 \cap S_2 \cap \overline{S_3}.$$

Par la formule des probabilités composées,

$$\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(S_1)\mathbb{P}(S_2|S_1)\mathbb{P}(\overline{S_3}|S_1 \cap S_2) = 1 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

Q5. On a :

$$(X = n) = S_1 \cap \dots \cap S_n \cap \overline{S_{n+1}}.$$

Q6. Par la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = n) &= \mathbb{P}(S_1)\mathbb{P}(S_2|S_1)\dots\mathbb{P}(S_n|S_1 \cap \dots \cap S_{n-1})\mathbb{P}(\overline{S_{n+1}}|S_1 \cap \dots \cap S_n) \\ &= 1 \times \frac{1}{2} \times \dots \times \frac{1}{n} \times \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{n}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{n}{(n+1)!}.$$

Q7. On a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)-1}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right).$$

Or, la série $\sum \frac{1}{n!}$ et $\sum \frac{1}{(n+1)!}$ convergent, donc,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1.$$

Ainsi,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1.$$

Remarque : on pouvait aussi observer un télescopage.

Problème : Factorisation QR

Présentation

Ce problème s'intéresse dans la **partie I** à des propriétés des matrices de rang 1. Certaines de ces matrices sont ensuite utilisées dans la **partie II** pour construire des matrices orthogonales permettant dans la **partie III** de prouver l'existence d'une factorisation QR pour une matrice carrée quelconque.

Notations

Pour tous $n, p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des matrices réelles carrées de taille n est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: on note également A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui à X associe AX .

Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, A^T désigne la matrice transposée de A .

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite nilpotente s'il existe un entier $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que : $A^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

L'ensemble $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\| \cdot \|$. En identifiant $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$, on a pour tous $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\langle X, Y \rangle = X^T Y \quad \text{et} \quad \|X\|^2 = \langle X, X \rangle.$$

On suppose dans tout ce problème que $n \in \mathbb{N}$ est un entier naturel vérifiant $n \geq 2$.

Partie I – Matrices de rang 1

I.1 – Une expression des matrices de rang 1

Q14. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. Montrer qu'il existe $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$ tels que : $A = XY^T$.

Q15. Réciproquement, soient $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$. Montrer que la matrice XY^T est de rang 1.

I.2 – Quelques propriétés

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

Q16. Montrer que $A^2 = \text{tr}(A)A$.

Q17. En déduire, par récurrence sur k , une expression de A^k en fonction de A pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Q18. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la trace de A pour que A soit nilpotente.

Q19. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la trace de A pour que A soit diagonalisable.

Partie II – Matrices de Householder

II.1 – Un exemple

On définit :

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Q20. Calculer A^2 . En déduire un polynôme annulateur de A .

Q21. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A .

Q22. Montrer que les sous-espaces propres de A sont orthogonaux.

Q23. Déterminer une matrice $P \in O_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, telles que : $P^T A P = D$.

Q24. Interpréter géométriquement l'endomorphisme A de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

II.2 – Matrices de Householder

Soit $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$. On définit $P_V, Q_V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$P_V = \frac{1}{\|V\|^2} VV^T, \quad \text{et :} \quad Q_V = I_n - 2 \frac{1}{\|V\|^2} VV^T. \quad (.1)$$

Q25. Montrer que $\text{Im}(P_V) = \text{Vect}(V)$ et que $\text{Ker}(P_V) = \text{Vect}(V)^\perp$.

Q26. Montrer que P_V est la projection orthogonale sur la droite $\text{Vect}(V)$.

Préciser le rang et la trace de la matrice P_V .

Q27. Montrer que Q_V est symétrique et orthogonale.

Q28. Montrer que Q_V est la symétrie orthogonale par rapport à $\text{Vect}(V)^\perp$.

Partie III – Factorisation QR

III.1 – Un résultat préliminaire

Soient $U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, tels que : $\|U\| = \|V\|$. On note : $D = \text{Vect}(U - V)$.

Q29. Montrer que $D^\perp$ est l'ensemble des $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, tels que : $\|X - U\| = \|X - V\|$.

Q30. Donner la décomposition de U sur la somme directe $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = D \oplus D^\perp$.

Q31. On suppose U et V non colinéaires. Calculer $Q_{U-V}U$ où Q_{U-V} est définie en (.1).

Q32. En déduire que pour tous $\tilde{U}, \tilde{V} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe une matrice orthogonale Q , telle que $Q\tilde{U}$ soit colinéaire à $\tilde{V}$.

III.2 – Factorisation QR

Q33. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale Q_1 , telle que Q_1A soit de la forme :

$$Q_1A = \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } C_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}).$$

Q34. En raisonnant par récurrence sur n , montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice Q orthogonale, telle que QA soit triangulaire supérieure.

Réponse

Q14. On sait que A est de rang 1, donc, $\text{Im}(A) = \text{Vect}(X)$ où $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

De plus, on sait que les colonnes $C_1, \dots, C_n$ de A appartiennent à $\text{Im}(A)$, donc, sont proportionnelles à X .

Donc, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe $y_i \in \mathbb{R}$ tel que $C_i = y_i X$.

On a :

$$A = (C_1 | \dots | C_n) = (y_1 X | \dots | y_n X).$$

En notant $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$A = XY^T.$$

De plus, comme A n'est pas la matrice nulle (son rang est non nul),

X et Y sont non nuls.

Q15. On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. On a :

$$XY^T = \begin{pmatrix} y_1x_1 & y_2x_1 & \cdots & y_nx_1 \\ y_1x_2 & y_2x_2 & \cdots & y_nx_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1x_n & y_2x_n & \cdots & y_nx_n \end{pmatrix}.$$

Donc, $\text{Im}(XY^T) = \text{Vect}(y_1X, \dots, y_nX)$.

Comme Y n'est pas nul, il existe $y_i \neq 0$.

Donc, pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $y_jX = \frac{y_i}{y_i} \cdot y_iX$, donc, $\text{Im}(XY^T) = \text{Vect}(y_iX) = \text{Vect}(X)$.

Comme $X \neq 0$, $\text{Vect}(X)$ est une droite vectorielle. Donc,

$$\text{rg}(XY^T) = 1.$$

Q16. Par **Q14**, comme A est de rang 1, il existe $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nuls tels que $A = XY^T$.

On a :

$$A^2 = XY^TXY^T.$$

Or, $\text{tr}(A) = \text{tr}(XY^T) = \text{tr}(Y^TX)$. Comme Y^TX est un réel, $\text{tr}(A) = Y^TX$.

Ainsi,

$$A^2 = XY^TXY^T = \text{tr}(A) \cdot XY^T = \text{tr}(A) \cdot A.$$

Q17. Par récurrence, on montre $\mathcal{H}_k : \ll A^k = (\text{tr}(A))^{k-1}A \gg$.

Initialisation. $k = 1$. Il n'y a rien à faire.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{H}_k$ et on montre $\mathcal{H}_{k+1}$.

Par hypothèse de récurrence, on a : $A^k = (\text{tr}(A))^{k-1}A$.

En multipliant par A , on a

$$A^{k+1} = (\text{tr}(A))^{k-1}A^2.$$

Par la question précédente,

$$A^{k+1} = (\text{tr}(A))^{k-1} \times \text{tr}(A) \cdot A = (\text{tr}(A))^k \cdot A.$$

Donc, $\mathcal{H}_{k+1}$.

Ce qui achève la récurrence

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad A^k = (\text{tr}(A))^{k-1}A.$$

Q18. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

($\Rightarrow$) On suppose A nilpotente.

Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$.

Par la question précédente, on a : $(\text{tr}(A))^{k-1}A = 0$.

Comme A est de rang 1, A n'est pas la matrice nulle.

Donc, le réel $(\text{tr}(A))^{k-1}$ est nul.

Donc, $\text{tr}(A) = 0$.

($\Leftarrow$) On suppose que $\text{tr}(A) = 0$.

Par **Q16**, $A^2 = 0$.

Donc, A est nilpotente.

Ainsi,

$$A \text{ est nilpotente si et seulement si } \text{tr}(A) = 0.$$

Q19. Par **Q16**, $X^2 - \text{tr}(A)X = X(X - \text{tr}(A))$ est un polynôme annulateur de A .

Cas 1 : On suppose que $\text{tr}(A) \neq 0$.

Dans ce cas, $X(X - \text{tr}(A))$ est scindé à racines simples, donc, A est diagonalisable.

Cas 2 : On suppose que $\text{tr}(A) = 0$.

Comme A est de rang 1, par le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(A)) = n - \text{rg}(A) = n - 1$.

Donc, 0 est valeur propre de A de multiplicité au moins $n - 1$.

Comme χ_A est unitaire et de degré n , on a : $\chi_A = X^{n-1} \times (X - \lambda) = X^n - \lambda.X^{n-1}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Or, on sait que le coefficient de X^{n-1} est $-\text{tr}(A)$. Donc, $\lambda = \text{tr}(A)$.

Donc, $\chi_A = X^n$ et $\text{Sp}(A) = \{0\}$.

Donc, 0 est de multiplicité $n \neq \dim(E_0(A))$.

Donc, A n'est pas diagonalisable.

Ainsi,

A est diagonalisable si et seulement si $\text{tr}(A) \neq 0$.

Q20. Le calcul donne

$$A^2 = I_3.$$

Donc,

$X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ est un polynôme annulateur de A .

Q21. Par la question précédente, $\text{Sp}(A) \subset \{-1, 1\}$.

Étude de 1 :

On a :

$$A - I_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

On remarque que $C_2 = C_1$ et $C_3 = -C_1$.

Donc, $\text{Im}(A - I_3) = \text{Vect}(C_1, C_2, C_3) = \text{Vect}(C_1)$.

Comme $C_1 \neq 0$, $\text{rg}(A - I_3) = 1$ et, par le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(A - I_3)) = 3 - 1 = 2$.

On a remarque que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiennent à $\text{Ker}(A - I_3)$ et sont colinéaires, donc,

$$\text{Ker}(A - I_3) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Étude de -1 :

On a :

$$A + I_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

On remarque que $C_1 + C_2 - C_3 = 0$.

Donc, $\text{Im}(A + I_3) = \text{Vect}(C_1, C_2)$.

Comme C_1 et C_2 sont non colinéaires, $\text{rg}(A + I_3) = 2$ et, par le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(A + I_3)) = 3 - 2 = 1$.

On a remarque que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartient à $\text{Ker}(A + I_3)$ et est non nul, donc,

$$\text{Ker}(A + I_3) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Ainsi,

$$\text{Sp}(A) = \{-1, 1\}, \text{Ker}(A - I_3) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ et } \text{Ker}(A + I_3) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Q22. La matrice A est symétrique réelle, donc par le théorème spectral,

les sous-espaces propres de A sont orthogonaux.

Q23. Déterminons une base orthonormée de vecteurs propres de A . Pour cela, on détermine des base orthonormées des sous-espaces propres de A .

Valeur propre 1 : on sait que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\text{Ker}(A - I_3)$.

On l'orthonormalise par l'algorithme de Gram Schmidt.

On note $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On note $W_1 = \frac{1}{\|U_1\|} \cdot U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et

$$V_2 = U_2 - \langle U_2, W_1 \rangle \cdot W_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On pose $W_2 = \frac{1}{\|V_2\|} \cdot V_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On sait alors que (W_1, W_2) est une base orthonormée de $\text{Ker}(A - I_3)$.

On sait que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\text{Ker}(A + I_3)$, donc, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est une base orthonormée de $\text{Ker}(A + I_3)$.

Comme A est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont orthogonaux, $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(A - I_3) \oplus \text{Ker}(A + I_3)$, donc, la concaténation des bases des sous-espaces propres $\mathcal{B}' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A .

On note $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}'$.

Comme ces bases sont orthonormées, $P \in O_3(\mathbb{R})$.

De plus,

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^T.$$

Q24. On a montré que $A^2 = I_3$, donc, A est la matrice de la symétrie vectorielle par rapport à $\text{Ker}(A - I_3)$ parallèlement à $\text{Ker}(A + I_3)$.

De plus, $\text{Ker}(A - I_3) \perp \text{Ker}(A + I_3)$, donc,

A est la matrice de la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à $\text{Ker}(A - I_3)$.

Remarque : $\text{Ker}(A - I_3)$ est dimension 2 et est donc un hyperplan de $\mathbb{R}^3$, donc, A est la matrice de la réflexion par rapport à $\text{Ker}(A - I_3)$.

Q25. On applique **Q15** avec $X = Y = \frac{1}{\|V\|} V$.

Donc,

$$P_V \text{ est une matrice de rang 1 et } \text{Im}(P_V) = \text{Vect}\left(\frac{1}{\|V\|} V\right) = \text{Vect}(V).$$

Soit $X \in \mathbb{R}^n$. On a

$$P_V X = 0 \iff VV^T X = 0.$$

Comme $V \neq 0$ et $V^T X \in \mathbb{R}$,

$$P_V X = 0 \iff V^T X = 0 \iff \langle V, X \rangle = 0 \iff X \perp V = 0.$$

Donc, comme V engendre $\text{Vect}(V)$, $P_V X = 0$ si, et seulement si, $X \in (\text{Vect}(V))^\perp$.

Ainsi,

$$\text{Ker}(P_V) = (\text{Vect}(V))^\perp$$

Q26. On a :

$$P_V^2 = \frac{1}{\|V\|^4} VV^T VV^T.$$

Or, $V^T V = \|V\|^2$, donc,

$$P_V^2 = \frac{1}{\|V\|^4} \times \|V\|^2 \times VV^T = \frac{1}{\|V\|^2} VV^T = P_V.$$

Donc,

$$P_V \text{ est la projection sur } \text{Im}(P_V) = \text{Vect}(V) \text{ parallèlement à } \text{Ker}(P_V) = (\text{Vect}(V))^\perp.$$

Comme $\text{Im}(P_V) \perp \text{Ker}(P_V)$,

$$P_V \text{ est la projection orthogonale sur } \text{Im}(P_V) = \text{Vect}(V).$$

Dans **Q25**, on a justifié que

$$\text{rg}(p_V) = 1.$$

De plus,

$$\text{tr}(p_V) = \text{tr}\left(\frac{1}{\|V\|^2} VV^T\right) = \frac{1}{\|V\|^2} \times \text{tr}(VV^T) = \frac{1}{\|V\|^2} \times \text{tr}(V^T V).$$

Or, $V^T V = \|V\|^2 \in \mathbb{R}$, donc,

$$\text{tr}(p_V) = \frac{1}{\|V\|^2} \times \|V\|^2 = 1.$$

Q27. On a :

$$Q_V^T = \left(I_n - 2\frac{1}{\|V\|^2} VV^T\right)^T = I_n^T - 2\frac{1}{\|V\|^2} (V^T)^T V^T = I_n - 2\frac{1}{\|V\|^2} VV^T = Q_V.$$

Donc,

$$Q_V \text{ est symétrique.}$$

De plus,

$$Q_V^T Q_V = Q_V^2 = (I_n - 2P_V)^2.$$

Comme I_n et P_V commutent, on en déduit que :

$$Q_V^T Q_V = I_n - 4P_V + 4P_V^2.$$

Or, d'après **Q26**, $P_V^2 = P_V$, donc,

$$Q_V^T Q_V = I_n - 4P_V + 4P_V = I_n.$$

Ainsi,

Q_V est orthogonale.

Q28. D'après **Q27**, $Q_V^2 = Q_V^T Q_V = I_n$, donc, Q_V est la symétrie par rapport à $\text{Ker}(Q_V - I_n)$ parallèlement à $\text{Ker}(Q_V + I_n)$. De plus, Q_V est symétrique réelle, donc, par le théorème spectral, ses sous-espaces propres sont orthogonaux, donc, $\text{Ker}(Q_V - I_n) \perp \text{Ker}(Q_V + I_n)$.

Donc,

Q_V est la symétrie orthogonale par rapport à $\text{Ker}(Q_V - I_n)$.

De plus, $\text{Ker}(Q_V - I_n) = \text{Ker}(-2P_V) = \text{Ker}(P_V) = (\text{Vect}(V))^\perp$.

Ainsi,

Q_V est la symétrie orthogonale par rapport à $(\text{Vect}(V))^\perp$.

Q29. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} \|X - U\| = \|X - V\| &\iff \|X - U\|^2 = \|X - V\|^2 \\ &\iff \|X\|^2 - 2\langle X, U \rangle + \|U\|^2 = \|X\|^2 - 2\langle X, V \rangle + \|V\|^2 \quad (\text{bilinéarité du produit scalaire}) \\ &\iff \langle X, U \rangle = \langle X, V \rangle \quad (\|U\| = \|V\|) \\ &\iff \langle X, U - V \rangle = 0 \\ &\iff X \perp U - V \\ &\iff X \in D^\perp \quad D \text{ est engendrée par } U - V. \end{aligned}$$

Q30. On a

$$U = \frac{1}{2} \cdot (U - V) + \frac{1}{2} \cdot (U + V).$$

Or,

$$\left\| \frac{1}{2} \cdot (U + V) - U \right\| = \frac{1}{2} \cdot \|V - U\| \quad \text{et} \quad \left\| \frac{1}{2} \cdot (U + V) - V \right\| = \frac{1}{2} \cdot \|U - V\| = \frac{1}{2} \cdot \|V - U\|.$$

Donc, par **Q29**, $\frac{1}{2} \cdot (U + V) \in D^\perp$. De plus, $\frac{1}{2} \cdot (U - V) \in D$.

Q31. Comme U et V sont non colinéaires, $U - V$ est non nul.

Par **Q28** (avec V remplacé par $U - V$), Q_{U-V} est la symétrie orthogonale par rapport à $(\text{Vect}(U - V))^\perp$.

Donc, comme $\frac{1}{2}(U - V) \in \text{Vect}(U - V)$ et $\frac{1}{2}(U + V) \in (\text{Vect}(U - V))^\perp$ et

$$Q_{U-V} \left(\frac{1}{2}(U - V) \right) = -\frac{1}{2}(U - V) \quad \text{et} \quad Q_{U-V} \left(\frac{1}{2}(U + V) \right) = \frac{1}{2}(U + V).$$

Donc, comme $U = \frac{1}{2}(U - V) + \frac{1}{2}(U + V)$, on a :

$$Q_{U-V} U = V.$$

Q32. Il y avait une erreur dans le sujet : il fallait supposer $\tilde{U}$ et $\tilde{V}$ non nuls.

Cas 1 : $\tilde{U}$ et $\tilde{V}$ colinéaires.

Dans ce cas, $\tilde{U} = \lambda \tilde{V}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

En prenant $Q = I_n \in O_n(\mathbb{R})$, on a : $Q\tilde{U} = \lambda \tilde{V}$.

Donc, $Q\tilde{U}$ et $\tilde{V}$ sont colinéaires.

Cas 2 : $\tilde{U}$ et $\tilde{V}$ non colinéaires.

On note $U = \frac{1}{\|\tilde{U}\|} \tilde{U}$ et $V = \frac{1}{\|\tilde{V}\|} \tilde{V}$.

On a alors $\|U\| = 1 = \|V\|$ et U et V ne sont pas colinéaires. En particulier, $U - V \neq 0$.

Donc, par **Q31** et **Q27**, $Q_{U-V}U = V$ et $Q_{U-V} \in O_n(\mathbb{R})$.

De plus,

$$Q_{U-V}\tilde{U} = \|\tilde{U}\|Q_{U-V}U = \|\tilde{U}\|V = \frac{\|\tilde{U}\|}{\|\tilde{V}\|} \tilde{V}.$$

Donc, $Q_{U-V}\tilde{U}$ et $\tilde{V}$ sont colinéaires.

Dans les deux cas,

Il existe une matrice orthogonale Q telle que $Q\tilde{U}$ soit colinéaire à $\tilde{V}$.

Q33. Soit $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On note $U = AE_1$ et $V = E_1$. On remarque que U est la première colonne de A .

Cas 1 : $U = 0$. Dans ce cas, la première colonne de A est nulle et donc, $Q = I_n \in O_n(\mathbb{R})$ et $\alpha = 1$ conviennent.

Cas 2 : $U \neq 0$. Dans ce cas, la première colonne de A est non nulle. De plus, $V \neq 0$ (vecteur d'une base).

Par **Q32**, il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ telle que QU est colinéaire à V .

Comme V est non nul, cela signifie que $QU = \alpha V$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Donc, la première colonne de QA est $QA E_1 = QU = \alpha E_1$.

Autrement dit,

$$Q_1 A = \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } C_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}).$$

Q34. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{H}_n$: « pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice Q orthogonale, telle que QA soit triangulaire supérieure. »

Initialisation. $n = 1$. On a $A = (\alpha) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

On a $I_1 \times A = I_1$. Donc, avec $Q = I_1 \in O_1(\mathbb{R})$, on a : QA est triangulaire supérieure.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{H}_n$ et on montre $\mathcal{H}_{n+1}$.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Par **Q23**, il existe une matrice orthogonale Q_1 , telle que $Q_1 A$ soit de la forme :

$$Q_1 A = \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } C_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Par hypothèse de récurrence appliquée à C_1 , il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $T_1 = QC_1$ est triangulaire supérieure.

Comme Q est orthogonale, $C_1 = Q^{-1}T_1 = Q^T T_1$.

Donc,

$$Q_1 A = \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q^T T_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q^T & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & T_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

D'où, comme Q est orthogonale,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \times Q_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & QQ^T & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & T_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & I_n & \\ 0 & & & \end{pmatrix}}_{=I_{n+1}} \times \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & T_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & T_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

On pose

$$Q' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \times Q_1.$$

On a :

$$Q' \times (Q')^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & Q & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \times \underbrace{Q_1 \times Q_1^T}_{=I_n} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & Q^T & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & QQ^T & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & I_n & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = I_{n+1}.$$

Donc, $Q' \in O_n(\mathbb{R})$ et $Q'A = \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & T_1 & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure.

Donc, $\mathcal{H}_{n+1}$.

Ce qui achève la récurrence.