

Les matrices

1 Notion de matrice

Définitions

Soient n et m deux entiers naturels non nul.

On appelle **matrice** de taille $m \times n$ un tableau de nombres réels formé de m lignes et de n colonnes. On la représente sous la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Les a_{ij} sont des nombres réels appelés les **coefficients** de la matrice.

Le coefficient a_{ij} est le nombre réel situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j .

Exemples

La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ \sqrt{2} & 42 \\ -0,2 & 6,8 \end{pmatrix}$ est une matrice de taille 3×2 (3 lignes et 2 colonnes).

La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & -7 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice de taille 2×3 (2 lignes et 3 colonnes).

Définition : matrice ligne

Soit n un entier naturel non nul.

On appelle **matrice ligne** une matrice de taille $1 \times n$.

Exemple

La matrice $C = (2 \quad -1 \quad 4)$ est une matrice ligne. Elle représente les coordonnées d'un point de l'espace.

Définition : matrice colonne

Soit n un entier naturel non nul.

On appelle **matrice colonne** une matrice de taille $n \times 1$.

Exemple

La matrice $D = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne.

Définition : matrice carrée

Soit n un entier naturel non nul.

On appelle **matrice carrée** une matrice de taille $n \times n$, qui a donc le même nombre de colonnes et de lignes.

On parle aussi de matrice carrée d'ordre n .

Exemple

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2.

2 Opérations sur les matrices**Définition : somme de matrice**

Soient A et B deux matrices de même taille.

La **somme de A et B** est la matrice, notée $A + B$, dont le coefficient d'indice ij est la somme de a_{ij} et de b_{ij} .

Exemple

On considère les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+2 & 0+3 \\ 4+1 & 3+3 & -1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Propriétés

Soient A , B et C trois matrices de même taille.

- La somme de deux matrices est commutative : $A + B = B + A$.
- La somme de deux matrices est associative : $(A + B) + C = A + (B + C)$.

Définition : produit d'une matrice par un réel

Soit A une matrice et soit λ un nombre réel.

La **produit de A par λ** est la matrice notée λA dont le coefficient d'indice ij est le nombre $\lambda \times a_{ij}$.

Exemple

En reprenant l'exemple précédent : $-3A = \begin{pmatrix} -3 \times 1 & -3 \times 2 & -3 \times 0 \\ -3 \times 4 & -3 \times 3 & -3 \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 0 \\ -12 & -9 & 3 \end{pmatrix}$.

Définition : produit d'une matrice carrée par une matrice colonne

Soit A une matrice carrée d'ordre n et B une matrice colonne à n lignes telles que :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Le **produit de la matrice A par la colonne B** est la matrice colonne à n lignes telle que :

$$A \times B = \begin{pmatrix} a_{11} \times b_1 + a_{12} \times b_2 + \dots + a_{1n} \times b_n \\ a_{21} \times b_1 + a_{22} \times b_2 + \dots + a_{2n} \times b_n \\ \dots \\ a_{n1} \times b_1 + a_{n2} \times b_2 + \dots + a_{nn} \times b_n \end{pmatrix}$$

Exemple

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

$$A \times B = \begin{pmatrix} -1 \times 2 + 3 \times 5 \\ -2 \times 2 + 4 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Définition : produit de deux matrices

Soit A une matrice de taille $n \times p$ et soit B une matrice de taille $p \times q$.

Le **produit des matrices A et B** est la matrice C de taille $n \times q$ telle que le coefficient $c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}$.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 2 + 0 \times 3 & 1 \times 1 + 2 \times 3 + 0 \times 5 \\ 4 \times 5 + 3 \times 2 + (-1) \times 3 & 4 \times 1 + 3 \times 3 + (-1) \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 23 & 8 \end{pmatrix}$$

Propriétés

- Le produit matriciel est associatif : $A(BC) = (AB)C = ABC$
- Le produit matriciel est distributif par rapport à l'addition : $A(B+C) = AB + AC$
- Le produit matriciel n'est pas commutatif : $AB \neq BA$.

3 Inverse et puissance

Définition

Soit n un entier naturel non nul.

On appelle la **matrice unité** d'ordre n la matrice carrée notée I_n telle que :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Il s'agit de la matrice d'ordre n dont les coefficients sont nuls sauf sur la diagonale, où ils sont égaux à 1.

Propriété

Soit A une matrice carrée d'ordre n . On a :

$$A \times I_n = I_n \times A = A$$

Définitions

Soit n un entier naturel non nul.

Une matrice carrée A d'ordre n est dite **inversible** s'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que $A \times B = B \times A = I_n$.

La matrice B est alors appelée **matrice inverse** de A et est notée A^{-1} .

Remarque

Toutes les matrices n'admettent pas nécessairement d'inverse.

Définition

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où a, b, c et d sont des nombres réels.

Le nombre $ad - bc$ est appelé le **déterminant** de la matrice A . On note alors :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Exemple

Le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est $\det(A) = 4 \times 1 - 3 \times 2 = -2$.

Propriété

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où a, b, c et d sont des nombres réels. La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Définition

Soit n un entier naturel non nul. On considère une matrice carrée A .
On appelle **puissance n -ième de A** la matrice notée $A^n = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ fois}}$.

Exemple

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 21 & 6 \end{pmatrix}$$

Propriété

Soit D une matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf sur sa diagonale. Soit n un entier naturel non nul. La matrice D^n est la matrice dont tous ses coefficients sont nuls sauf sur la diagonale où ils sont égaux aux coefficients de D à la puissance n .

Exemple

$$\text{Soit } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$D^6 = \begin{pmatrix} 2^6 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^6 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{pmatrix}$$

Exemple : avec le numérique

Il est possible d'effectuer des calculs de puissances de matrice à l'aide de la calculatrice.

$$\text{On souhaite calculer } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \\ -1 & 5 & -5 \end{pmatrix}^2.$$

CASIO

Menu RUN.MAT puis choisir MAT à l'aide de la touche F1.

On rentre les coefficients de la matrice A .

On clique sur la touche QUIT puis sur la touche Mat et on saisit le calcul $\text{Mat } A^2$.

Exemple : avec le numérique (suite et fin)**Texas Instrument**

On rentre dans le mode MATRIX puis EDIT.

On rentre les dimensions de la matrice puis on donne ses coefficients.

On choisit QUIT puis à nouveau MATRIX.

On sélectionne la matrice A et on complète la formule pour obtenir $[A^2]$.

Les matrices : Applications

1 Ecriture matricielle d'un système linéaire

Propriété

On considère le système linéaire (S) à n inconnues ci-dessous :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

On pose $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$.

L'écriture matricielle du système linéaire (S) est donc $AX = B$.

Si A est inversible, alors le système (S) admet une unique solution $X = A^{-1}B$.

Exemple

On souhaite résoudre le système : $\begin{cases} 5x + 2y = 16 \\ 4x + 3y = 17 \end{cases}$

On pose $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 16 \\ 17 \end{pmatrix}$

$\det(A) = 5 \times 3 - 4 \times 2 = 7 \neq 0$. La matrice A est inversible ce qui signifie que le système admet une solution.

On calcule l'inverse de A et on trouve $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{-2}{7} \\ \frac{-4}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix}$.

Ainsi, $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{-2}{7} \\ \frac{-4}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Le système a donc pour solution $(x; y) = (2; 3)$.

2 Suite de matrices colonnes

Définition

Soit n un entier naturel.

On appelle **suite de matrices colonnes** une suite de matrices (U_n) dont les coefficients sont les termes d'une suite numérique.

Exemples

- La suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par $U_n = \begin{pmatrix} n-1 \\ n^2+6n \\ 6n-8 \end{pmatrix}$ est une suite de matrices colonnes.

Les coefficients de cette suite de matrices colonnes sont les termes des suites numériques (u_n) , (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par $u_n = n-1$, $v_n = n^2+6n$ et $w_n = 6n-8$.

- On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par $u_0 = 2$, $v_0 = 4$

$$\text{et } \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - 3v_n + 1 \\ v_{n+1} = -u_n + 5v_n - 4 \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n , on pose $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

On a alors $U_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a une relation matricielle de récurrence $U_{n+1} = AU_n + B$.

Propriété

Soit p un entier naturel non nul.

Soit (U_n) une suite de matrices colonnes de taille p et soit A une matrice carrée d'ordre p telles que pour tout entier naturel n , on a $U_{n+1} = AU_n$.

Pour tout entier naturel n , on a alors :

$$U_n = A^n U_0$$

Définition

Soit (U_n) une suite de matrices colonnes de taille p .

On dit que (U_n) est **convergente** si les p suites dont les termes sont les p coefficients de (U_n) sont convergentes.

Exemples

- La suite de matrices colonnes (U_n) définie pour tout entier naturel n par $U_n = \begin{pmatrix} n^2 - 1 \\ 6n + 2 \end{pmatrix}$ est divergente puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 1 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 6n + 2 = +\infty$.
- En revanche, la suite de matrices colonne (V_n) définie pour tout entier naturel n par $V_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n^2} \\ \frac{5n^2 - 3}{n^2 + 1} \end{pmatrix}$ est convergente et sa matrice limite est $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Propriété

On considère une suite de matrices colonnes (U_n) de taille p définie par $U_{n+1} = AU_n + B$ où A est une matrice carrée d'ordre p et B est une matrice colonne à p lignes.

Si la suite (U_n) est convergente alors sa limite U est une matrice colonne telle que $U = AU + B$.

3 Écriture matricielle d'un système linéaire

Définition

On appelle **transformation du plan** une application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui à tout point M du plan associe un point M' tel que $f(M) = M'$.

Exemples

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $M(x; y)$ un point du plan et $M'(x'; y')$ son image par la transformation du plan f .

- Si f est la translation de vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ alors $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
- Si f est la rotation de centre O et d'angle θ alors $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
- Si f est l'homothétie de centre O et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ alors $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Exercices sur les matrices (généralités)

> Opérations sur les matrices

Exercice n°1 On considère les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Calculer $10I - 7J$.

Exercice n°2 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A + B$.
2. Calculer $2A - 3B$.

Exercice n°3 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -5 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A + B$.
2. Calculer $2A - 3B$.

Exercice n°4 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Calculer AB .

Exercice n°5 Effectuer les calculs suivants :

a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

c. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice n°6 Effectuer les calculs suivants :

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

> Puissance de matrices

Exercice n°7 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 .
2. Calculer A^3 .

Exercice n°8 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 .
2. En déduire l'expression de A^{101} .

Exercice n°9 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 puis A^3 .
2. Que peut-on conjecturer quant à l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$?
3. Démontrer la précédente conjecture.

Exercice n°10 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 puis A^3 .
2. Que peut-on conjecturer quant à l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$?
3. Démontrer la précédente conjecture.

Exercice n°11

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul n on a $\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Montrer que pour tout entier naturel n on a $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 2^{n-1} & 1 \end{pmatrix}$.

> Inverse de matrices

Exercice n°12

1. Les matrices ci-dessous sont-elles inversibles ? $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

2. Montrer que $B = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ est l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$.

Exercice n°13

Montrer que l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ est la matrice $B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice n°14 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $A^2 + A$.
2. Exprimer la matrice inverse de A en fonction de A et de I_3 .
3. En déduire la matrice inverse de A .

Exercice n°15 Déterminer l'inverse de la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice n°16 Déterminer l'inverse des matrices ci-dessous :

a. $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

Correction des exercices sur les matrices (généralités)

> Opérations sur les matrices

Exercice n°1

$$10I - 7J = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 21 & 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -14 \\ -21 & -18 \end{pmatrix}$$

Exercice n°2

$$1. A + B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$2. 2A - 3B = \begin{pmatrix} -5 & -8 \\ 5 & -19 \end{pmatrix}.$$

Exercice n°3

$$1. A + B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$2. 2A - 3B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 9 \\ 8 & 6 & -14 \\ -3 & -5 & 19 \end{pmatrix}.$$

Exercice n°4

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \times 3 + 1 \times 1 + 0 \times (-2) \\ 1 \times 3 + 3 \times 1 - 1 \times (-2) \\ 0 \times 3 - 4 \times 1 + 2 \times (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Exercice n°5

$$\text{a. } \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{b. } \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{a. } \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 13 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice n°6

$$1. \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ -2 & -5 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

> Puissance de matrices

Exercice n°7

$$A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{pmatrix}$$

Exercice n°8

$$1. A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2. A^{101} = A^{2 \times 50 + 1} = A^{2 \times 50} \times A = (A^2)^{50} \times A = I_3^{50} \times A = A.$$

Exercice n°9

$$1. A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2A \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = 4A.$$

$$2. \text{ Il semblerait que pour tout entier naturel non nul } n, A^n = 2^{n-1}A.$$

3. Initialisation

$$\text{Pour } n = 1, 2^{n-1}A = 2^0A = A.$$

La proposition est donc vraie pour $n = 1$.

Hérédité

Supposons que pour un entier naturel n , on a $A^n = 2^{n-1}A$.

$$A^{n+1} = A^n \times A = 2^{n-1}A \times A = 2^{n-1} \times A^2 = 2^{n-1}2A = 2^nA$$

La proposition est donc héréditaire.

Conclusion

La proposition est vraie pour $n = 1$ et héréditaire. La proposition est donc vraie pour tout entier naturel n non nul.

Exercice n°10

$$1. A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -27 \end{pmatrix}.$$

$$2. \text{ Il semblerait que pour tout entier naturel } n \text{ non nul, on ait } A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix}.$$

3. Initialisation

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}. \text{ D'autre part, si } n = 1 \text{ on a } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

La proposition est donc vraie pour $n = 1$.

Hérédité

Supposons que pour un entier naturel n non nul, on ait $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix}$.

$$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^{n+1} \end{pmatrix}$$

La proposition est donc héréditaire.

Conclusion

La proposition est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire. La proposition est donc vraie pour tout entier naturel n non nul.

Exercice n°11**1. Initialisation**

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}^1 \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

La proposition est donc vraie pour $n = 1$.

Hérédité

Supposons que pour un entier naturel n non nul, la proposition soit vraie.

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 - 12 & -16 + 12 \\ 12 - 9 & -12 + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

La proposition est donc héréditaire.

Conclusion

La proposition est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire : elle est donc vraie pour tout entier naturel n non nul.

2. Initialisation

$$\text{Pour } n = 0 : \begin{pmatrix} 2^0 & 0 \\ 2^0 - 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A^0 = I_2.$$

La proposition est donc vraie pour $n = 0$.

Hérédité

Supposons que pour un entier naturel n , la proposition soit vraie.

$$A^{n+1} = A \times A^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 2^n - 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 2^n + 2^n - 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 2 \times 2^n - 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 2^{n+1} - 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La proposition est donc héréditaire.

Conclusion

La proposition est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire. Elle est donc vraie pour tout entier naturel n .

> Inverse de matrices

Exercice n°12

- $7 \times 2 - 3 \times 5 = -1 \neq 0$. Il s'agit donc d'une matrice inversible.
 $6 \times 2 - 3 \times 4 = 0$ Ce n'est donc pas une matrice inversible.
- $AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. B est donc la matrice inverse de A.

Exercice n°13

$$AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ B est donc la matrice inverse de A.}$$

Exercice n°14

- $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ puis $A^2 + A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.
- On a $A^2 + A = 6I_3$ soit encore $\frac{1}{6}(A^2 + A) = I_3$ ou bien $A \left(\frac{1}{6}A + \frac{1}{6}I_3 \right) = I_3$.
- La matrice inverse de A est donc la matrice définie par $\frac{1}{6}A + \frac{1}{6}I_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

Exercice n°15

On cherche quatre réels a, b, c et d tel que $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Cela revient à $\begin{pmatrix} 2c & 2d \\ a + 2c & b + 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On doit donc résoudre le système :

$$\begin{cases} 2c = 1 \\ 2d = 0 \\ a + 2c = 0 \\ b + 2d = 1 \end{cases}$$

On obtient ainsi

$$\begin{cases} c = \frac{1}{2} \\ d = 0 \\ a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$$

Finalement, $C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice n°16

On peut utiliser la propriété suivante : si $A \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice inversible alors $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

a. A l'aide de cette propriété, on trouve comme matrice inverse : $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

b. A l'aide de cette propriété, on trouve comme matrice inverse : $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

c. A l'aide de cette propriété, on trouve comme matrice inverse : $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$