

Correction Devoir surveillé n°2 type ESSEC II

Exercice 1. d'après ESSEC 95

On étudie dans cet exercice une situation probabiliste décrite dans la question 4.

Les deux premières questions ont pour but d'étudier les puissances de la matrice carrée d'ordre 10 définie par :

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{pmatrix}$$

où a et b ($b \neq 0$) désignent des nombres réels.

1. Recherche des matrices $M(a, b)$ telles que $[M(a, b)]^2 = M(a, b)$

- (a) Ligne de commande Python permettant d'obtenir $M(a, b)$ (a, b, n étant entrés par l'utilisateur) en utilisant les commandes `np.ones` et `np.eye`

```
import numpy as np
a=float(input('entrer a'))
b=float(input('entrer b'))
n=int(input('entrer n'))
M=b*np.ones((n,n)) + (a-b)*np.eye(n,n)
print(M)
```

- (b) Remarque ici $n = 10$.

On cherche à exprimer $[M(a, b)]^2$ comme combinaison linéaire de $M(a, b)$ et de I_{10} , où I_{10} désigne la matrice identité d'ordre 10.

On utilise l'indication en calculant K^2 où $K = M(1, 1)$.

On a $K^2 = 10K$ et $M(a, b) = bM(1, 1) + (a - b)I_{10} = bK + (a - b)I_{10}$.

Or b est non nul donc $K = 1/b[M(a, b) - (a - b)I_{10}]$.

D'autre part, bK et $(a - b)I_{10}$ commutent.

$$\begin{aligned} M(a, b)^2 &= (bK + (a - b)I_{10})^2 \\ &= b^2K^2 + 2b(a - b)K + (a - b)^2I_{10} \text{ car les matrices commutent} \\ &= (10b^2 + 2b(a - b))K + (a - b)^2I_{10} \\ &= (10b + 2(a - b))(M(a, b) - (a - b)I_{10}) + (a - b)^2I_{10} \\ &= (2a + 8b)(M(a, b) - (a - b)I_{10}) + (a - b)^2I_{10} \\ &= (2a + 8b)M(a, b) + (a - b)(-2a - 8b + a - b)I_{10} \\ &= (2a + 8b)M(a, b) + (9b^2 - a^2 - 8ab)I_{10} \end{aligned}$$

Finalement : $M(a, b)^2 = (2a + 8b)M(a, b) + (b - a)(a + 9b)I_{10}$

- (c) Déterminons les couples (a, b) avec $b \neq 0$ tels que $[M(a, b)]^2 = M(a, b)$.

D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} [M(a, b)]^2 &= M(a, b) \Leftrightarrow \\ (2a + 8b)M(a, b) + (b - a)(a + 9b)I_{10} &= M(a, b) \Leftrightarrow (2a + 8b - 1)M(a, b) + (b - a)(a + 9b)I_{10} = O_{10} \text{ (matrice nulle)} \end{aligned}$$

D'où le système :

$$\begin{cases} (2a + 8b - 1)a + (b - a)(a + 9b) = 0 \\ b(2a + 8b - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 8b - 1 = 0 & \text{car } b \neq 0 \\ a = b & \text{ou } a = -9b \end{cases}$$

Soient les couples : $(1/10; 1/10)$ ou $(9/10; -1/10)$.

2. Calcul des puissances de $M(a, b)$.

On considère les matrices $P = M(1/10, 1/10)$ et $Q = I_{10} - P$.

- (a) De la question précédente, on déduit immédiatement que $P^2 = P, Q^2 = Q$, donc

$$PQ = P(I_{10} - P) = P - P^2 = 0 \text{ et } QP = (I_{10} - P)P = P - P^2 = 0.$$

On montre alors par récurrence que pour tout entier naturel non nul k , $P^k = P$ et $Q^k = Q$.

Initialisation : triviale! $P^1 = P, Q^1 = Q$.

Hérédité : soit k non nul fixé, et supposons que $P^k = P, Q^k = Q$.

Alors $P^{k+1} = P \cdot P^k = P^2$ (par hypothèse de récurrence) et comme $P^2 = P$, on a bien $P^{k+1} = P$.

De même pour $Q^{k+1} = Q \cdot Q^k = Q^2 = Q$.

Donc l'hérédité est vérifiée.

Conclusion : pour tout entier naturel k non nul, $P^k = P$ et $Q^k = Q$.

- (b) On a $M(a, b) = bM(1; 1) + (a - b)I_{10} = 10bM(1/10; 1/10) + (a - b)I_{10} = 10bP + (a - b)(P + Q) = (a + 9b)P + (a - b)Q$

Les matrices $(a + 9b)P$ et $(a - b)Q$ commutent donc on a d'après la formule du binôme, pour tout entier naturel n :

$$[M(a, b)]^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a + 9b)^k P^k (a - b)^{n-k} Q^{n-k}$$

Or $PQ = 0$ donc il ne reste que les termes correspondant à $k = 0$ et $k = n$, soit :

$$[M(a, b)]^n = (a + 9b)^n P + (a - b)^n Q$$

C'est à dire : $[M(a, b)]^n = (a + 9b)^n / 10M(1; 1) + (a - b)^n / 10M(9; -1) = M(((a + 9b)^n + 9(a - b)^n) / 10; ((a + 9b)^n - (a - b)^n) / 10)$.

3. Limite des puissances de $M(1 - 9b, b)$ pour $0 \leq b \leq 1/9$

On suppose que a et b sont des nombres réels positifs tels que $a + 9b = 1$ (donc $a = 1 - 9b$).

On dit que la suite de matrice $[M(a, b)]^n$ converge vers une matrice L , lorsque tous les coefficients de $[M(a, b)]^n$ convergent vers les coefficients respectifs de L quand n tend vers $+\infty$.

- (a) Déterminons la matrice limite L de la suite $[M(1 - 9b, b)]^n$ quand n tend vers $+\infty$.

$$\text{On a } a + 9b = 1 \text{ et } a - b = 1 - 9b - b = 1 - 10b.$$

Distinguons les cas où $b = 0$ et $b \neq 0$.

$b \neq 0$:

Comme $b \in]0, 1/9]$, $-1 < 1 - 10b < 1$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - 10b)^n = 0$.

De l'expression précédente obtenue pour $[M(a, b)]^n$, on en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [M(a, b)]^n = P = L.$$

Si $b = 0$, alors $a = 1$ et $(a + 9b)^n = 1, (a - b)^n = 1$ donc de l'expression précédente obtenue pour $[M(a, b)]^n$, on en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [M(a, b)]^n = M(1, 0) = I = P + Q.$$

- (b) On a alors immédiatement la matrice $L = 1 \cdot P + 0 \cdot Q$ si $b \neq 0$ et $L = 1 \cdot P + 1 \cdot Q$ si $b = 0$.

4. Etude des déplacements d'un pion sur un damier.

On considère un damier à 10 cases numérotées 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

On considère les déplacements d'un pion situé à l'instant 0 sur la case 0, et à l'instant n (où n désigne un entier naturel) sur une case dont le numéro est une variable aléatoire X_n .

On fait enfin les hypothèses suivantes concernant les déplacements du pion : si à l'instant n le pion est sur la case k ($0 \leq k \leq 9$), il se trouve encore sur la case k à l'instant $n + 1$ avec la probabilité $1/2$, et sinon, il se trouve de façon équiprobable sur l'une des autres cases.

- (a) Pour tout entier j compris entre 0 et 9, on a d'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(X_n = i)_{i \in [0, n]}$: $p(X_{n+1} = j) = \sum_{i=0}^9 p(X_n = i) p_{X_n=j}(X_{n+1} = j)$

Or la règle du déplacement du jeton sur l'échiquier se traduit pour tout couple $(i, j) \in [0, n]^2$ par :

$$p_{X_n=j}(X_{n+1} = j) = 1/2 \text{ si } i = j \text{ ou } 1/18 \text{ si } i \neq j.$$

Par conséquent :

$$p(X_{n+1} = j) = 1/2 p(X_n = j) + 1/18 \sum_{i=0}^9 p(X_n = i).$$

On note V_n le vecteur colonne dont les composantes sont, de haut en bas, les probabilités $p(X_n = 0), p(X_n = 1), \dots, p(X_n = 9)$.

Il vient alors que la matrice carrée M d'ordre 10 telle que

$$V_{n+1} = M \cdot V_n$$

est : $M = M(1/2; 1/18)$

- (b) Programme Python complété afin qu'il affiche la valeur de $p(X_n = 0)$ pour $n = 10$

```
import numpy as np
n=10
V=np.array([1,0,0,0,0,0,0,0,0,0]) # le pion est initialement dans la case 0
M=1/18*np.ones((10,10))+(1/2-1/18)*np.eye(10,10) # matrice de la question précédente
for i in range(1,n+1):
    V=np.dot(M,V)
print(V[0]) # car on veut la premiere coordonnée
#on trouve 0.1002706557938395
```

- (c) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n : V_n = M^n V_0$.

Initialisation : pour $n = 0$, on a $M^0 V_0 = V_0$ donc l'initialisation est vérifiée.

Hérédité :

Soit n un entier naturel fixé et supposons que $V_n = M^n V_0$.

Alors comme $V_{n+1} = M V_n$ et en utilisant l'hypothèse de récurrence, on a bien :

$$V_{n+1} = M^{n+1} V_0$$

L'hérédité est vérifiée.

Conclusion : pour tout entier naturel n , $V_n = M^n V_0$. Pour $a = 1/2$ et $b = 1/18$ avec $b \in]0; 1/9]$, on a $a + 9b = 1$ et $a - b = 4/9$.

D'où, d'après les questions précédentes, en utilisant le calcul de $[M(a, b)]^n$, on obtient :

$$V^n = M((1 + 9(4/9)^n)/10; (1 - (4/9)^n)/10) V_0.$$

Puis que :

$$p(X_n = 0) = (1 + 9(4/9)^n)/10 \text{ et pour tout } j \in]1, 9[, p(X_n = j) = (1 - (4/9)^n)/10.$$

Enfin, comme $4/9 \in]-1, 1[, \lim_{n \rightarrow +\infty} (4/9)^n = 0$ et donc

$$\text{pour tout } j \in]0, 9[, \lim_{n \rightarrow +\infty} p(X_n = j) = 1/10.$$

Exercice 2. d'après ESSEC 95

On désigne par n un entier naturel non nul et l'on se propose d'étudier les racines positives de l'équation $e^x = x^n$ que l'on note (E_n) . A cet effet on introduit la fonction f_n définie par

$$f_n(x) = 1 - x^n e^{-x}.$$

On a donc pour tout entier n , $(E_n) \Leftrightarrow f_n(x) = 0$

A) Etude des racines positives des équations (E_1) et (E_2) :

1. On étudie les variations :

- On a $f_1(x) = 1 - x e^{-x}$. f_1 est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$ comme somme, produit et composée de fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$.

$$\text{En } +\infty : f_1(x) = 1 - x e^{-x} = 1 - x/e^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 \text{ car } x = o(e^x) \text{ en } +\infty.$$

La courbe représentative de f a donc une asymptote horizontale en $+\infty$

Sens de variation : $f_1'(x) = -e^{-x} + x e^{-x} = (x - 1) e^{-x}$ et on a donc les variations :

x	0	1	$+\infty$
$x - 1$	—	0	+
$f_1'(x)$	—	0	+
$f_1(x)$	1		1
		$\searrow \frac{e-1}{e} \nearrow$	

On a $f_2(x) = 1 - x^2 e^{-x}$. f_2 est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$ comme somme, produit et composée de fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$.

$$\text{En } +\infty : f_2(x) = 1 - x^2 e^{-x} = 1 - x^2/e^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 \text{ car } x^2 = o(e^x) \text{ en } +\infty.$$

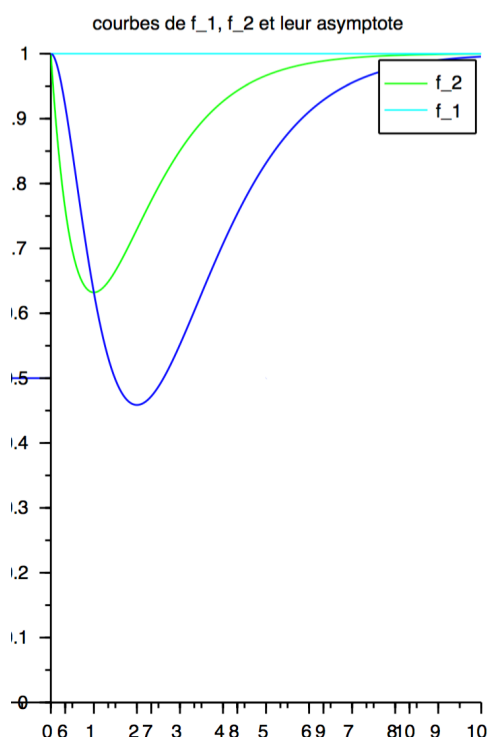
La courbe représentative de f_2 a donc une asymptote horizontale en $+\infty$.

Sens de variation : $f'_2(x) = -2xe^{-x} + x^2e^{-x} = x(x-2)e^{-x}$ d'où :

x	0	2	$+\infty$	
$x(x-2)$	0	-	0	+
$f_2'(x)$	0	-	0	+
$f_2(x)$	1			1
		$\searrow$	$1-\frac{4}{e^2}$	$\nearrow$

Sur la courbe représentative de f_1 , on place l'asymptote d'équation $y = 1$ en $+\infty$, la tangente horizontale en 1 et la tangente de pente -1 en 0.

Sur la courbe représentative de f_2 , on place l'asymptote d'équation $y = 1$ en $+\infty$, la tangente horizontale en 1 et en 0.



2. $(E_1) \Leftrightarrow f_1(x) = 0$. Or le minimum de f_1 est $\frac{e-1}{e} > 0$ (car f'_1 s'annule en 1 en changeant de signes) et donc l'équation n'a pas de solution positive.

De même $(E_2) \Leftrightarrow f_2(x) = 0$. Or le minimum de f_2 est $\frac{e^2-4}{e^2} > 0$ car $e > 2$ donc $e^2 > 4$ (car $1f'_2$ s'annule en 2 en changeant de signes).

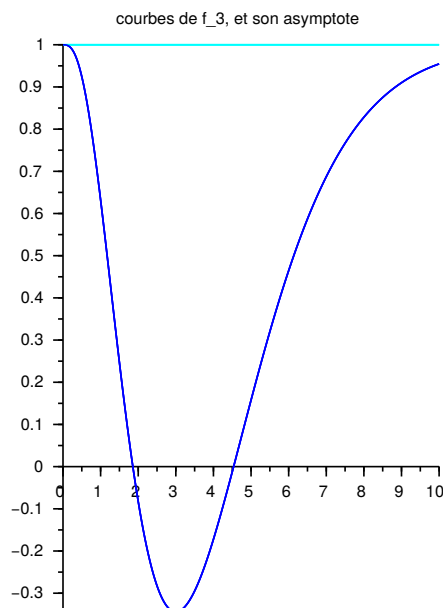
Donc là aussi l'équation (E_2) n'a pas de solution positive.

B) Etude des racines positives de l'équations (E_3) :

1. On a $f_3(x) = 1 - x^3e^{-x}$. f_3 est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme somme et quotient de fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

En $+\infty$: $f_3(x) = 1 - x^3e^{-x} = 1 - x^3/e^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ car $x^3 = o(e^x)$ en $+\infty$.

La courbe représentative de f_3 a donc une asymptote horizontale en $+\infty$



Sens de variation : $f'_3(x) = -3x^2e^{-x} + x^3e^{-x} = x^2(x-3)e^{-x}$ d'où :

x	0	3	$+\infty$
$x-3$	-	0	+
x^2	0	+	+
$f'_3(x)$	0	-	0
$f_3(x)$	1	$1 - \frac{27}{e^3}$	1

2. Cette fois, comme $e^1 > 1^3$ alors $1/e < 1$ et $f_3(1) = 1 - \frac{1}{e} > 0$.

et $e^2 < 2^3$ donc

On a $f_3(2) = 1 - 8/e^2 < 0$.

Donc $0 \in]1 - \frac{1}{e}, 1 - \frac{8}{e^2}[$.

Comme f_3 est continue et strictement décroissante, elle est bijective de $]1, 2[$ dans $]1 - \frac{1}{e}, 1 - \frac{8}{e^2}[$. Or 0 appartient à cet intervalle donc l'équation $(E_3) \Leftrightarrow f_3(x) = 0$ a une unique solution u sur cet intervalle. ($1 < u < 2$)

De même comme $f_3(4) = 1 - 4^3/e^4 < 0$ et $f_3(5) = 1 - 5^3/e^5 > 0$, (E_3) a une unique solution v sur l'intervalle $]4, 5[$.

Elle n'en a donc pas ailleurs.

Donc l'équation (E_3) admet deux racines positives u et v telles que $1 < u < 2$ et $4 < v < 5$.

3. Soit la suite définie par la relation $y_{n+1} = 3\ln(y_n)$ et la condition initiale y_0 , où y_0 est un nombre réel strictement supérieur à u .

— $u < y_0 \leq v$, alors montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $u < y_n \leq v$:

Initialiation : $u < y_0 \leq v$ vraie.

Hérédité : on suppose que pour un certain entier n , $u < y_n \leq v$ comme $x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et que u, v et y_n en sont éléments alors $3\ln(u) < 3\ln(y_n) \leq 3\ln(v)$

Et comme u et v positifs sont solutions de $x^3 = e^x \Leftrightarrow 3\ln(x) = x$ alors on a $3\ln(u) = u$ et $3\ln(v) = v$.

Donc $u < y_{n+1} \leq v$. L'hérédité est vérifiée.

Conclusion : pour tout entier naturel n , $u < y_n \leq v$.

— De même par récurrence (à faire vous même) si $v \leq y_0$, alors pour tout entier naturel n , $v \leq y_n$.

— Signe :

$y_n - y_{n-1} > 0 \Leftrightarrow y_n > y_{n-1} \Leftrightarrow 3\ln(y_n) > 3\ln(y_{n-1})$ car la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et que y_{n-1} et y_n en sont éléments; et finalement $y_n - y_{n-1} > 0 \Leftrightarrow y_{n+1} - y_n > 0$.

De même pour $y_n - y_{n+1} = 0$ et pour $y_n - y_{n-1} < 0$.

Donc $y_{n+1} - y_n$ est du même signe que $y_n - y_{n-1}$ et on montre facilement par récurrence immédiate du même signe que $y_1 - y_0$.

Donc si $y_0 < y_1$ alors pour tout entier n , $y_n < y_{n+1}$ et si $y_0 > y_1$ alors pour tout entier n , $y_n > y_{n+1}$.

4. (a) Or pour $u < y_0 \leq v$ on a, d'après les variations de $f_3 : f_3(y_0) \leq 0$ donc $1 - y_0^3 e^{-y_0} \leq 0$ donc $e^{y_0} < y_0^3$ et comme la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ alors $y_0 \leq 3 \ln(y_0)$ et $y_0 \leq y_1$.

Donc si $u < y_0 \leq v$ alors pour tout entier $n : y_n \leq y_{n+1}$ et la suite sera donc croissante.

De même si $y_0 \geq v$ alors $f_3(y_0) \geq 0$ et la suite sera décroissante.

- (b) Etudions enfin la convergence et la limite de la suite (y_n) .

On a vu que si $u < y_0 \leq v$, la suite est croissante et pour tout entier n , $u < y_n \leq v$ donc la suite est majorée par v , elle converge donc vers ℓ telle que $\ell \leq v$.

Mais comme v est l'unique solution de $y = 3 \ln(y)$ et que la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est continue en ℓ , la suite converge vers v .

si $y_0 \geq v$, alors la suite est décroissante et minorée par v donc elle converge vers v pour les mêmes raisons que ci-dessus.

5. On choisit désormais $y_0 = 4$

- (a) Il faut saisir n puis calculer de y_1 à y_n :

```
import numpy as np
n=int(input('entrer n'))
y=4
for i in range(1,n+1) :
    y=3*np.log(y)
print(y)

on trouve pour n=100
4.536403654973526
```

- (b) Avec $y_0 = 4 < v$, la suite y sera croissante. On aura pour tout entier $n : 4 \leq y_n \leq v$.

Pour établir que pour tout entier naturel n que $0 \leq v - y_{n+1} \leq 0,75(v - y_n)$ on utilise l'inégalité des accroissements finis (en effet la fonction $x \mapsto 3 \ln(x)$ est continue et dérivable sur $[4, v]$, v et y_n en sont éléments). Il ne reste plus qu'à majorer la dérivée de $3 \ln(x)$ sur l'intervalle $[4, v]$:

$$(3 \ln)'(x) = \frac{3}{x} \leq \frac{3}{4} = 0,75 \text{ si } x \geq 4$$

Comme pour tout n , on a $4 \leq y_n \leq v$ on a alors par inégalité des accroissements finis, appliquée à v, y_n sur $[4, v]$:

$$0 \leq v - y_{n+1} \leq 0,75(v - y_n)$$

NB : on ne met pas les valeurs absolues car $v - y_{n+1} \geq 0$!

Puis par récurrence on prouve que pour tout entier n , $0 \leq v - y_n \leq (0,75)^n$.

- Pour $n = 0$ on a $4 \leq y_0 \leq v \leq 5$ donc $v \leq 5$ et $-y_0 \leq -4$ donc $0 \leq v - y_0 \leq 1 = (0,75)^0$, l'initialisation est vérifiée.
- Hérédité : on suppose que pour un certain entier $n \geq 0$, $v - y_n \leq (0,75)^n$ alors $0 \leq v - y_{n+1} \leq 0,75(v - y_n) \leq (0,75)^{n+1}$, donc l'hérédité est vérifiée.
- Donc par récurrence, pour tout entier n , $0 \leq v - y_n \leq (0,75)^n$.

- (c) Pour que y_n constitue une valeur approchée de v à 10^{-5} près, il suffit donc que $(0,75)^n \leq 10^{-5}$.

On résout cette inéquation et on a : $n \ln(0,75) \leq -5 \ln(10) \Leftrightarrow n \geq \frac{-5 \ln(10)}{\ln(0,75)}$ (car $\ln(0,75) < 0$).

- (d) Pour le programme Python : il faut calculer à la fois y_n et $(0,75)^n$ jusqu'à ce que cette puissance soit $\leq 10^{-5}$.

```
import numpy as np
y=4
p=1
while p > 10**(-5) :
    y=3*np.log(y)
    p=p*0.75
print(y)
```

on trouve 4.536403626738128

6. Soit la suite définie par la relation $x_{n+1} = \exp(x_n/3)$ et la condition initiale x_0 , où x_0 est un nombre réel positif strictement inférieur à v .

On remarque que $1 - x^3 e^{-x} = 0 \iff e^x = x^3 \iff e^{x/3} = x$ en prenant la racine cubique de part et d'autre.

Donc u et v vérifient l'équation : $e^{x/3} = x$.

- si $u \leq x_0 < v$ alors montrons par récurrence que pour tout entier $n : u \leq x_n \leq v$.

On a l'initialisation vérifiée : $u \leq x_0 < v$.

Hérédité : on suppose que pour un certain entier $n \geq 0$, $u \leq x_n \leq v$.

Comme la fonction $x \rightarrow \exp(x/3)$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et que u, v, x_n en sont éléments,

$\exp(u/3) \leq \exp(x_n/3) \leq \exp(v/3)$ donc $u \leq x_{n+1} \leq v$. L'hérédité est vérifiée.

Conclusion : par récurrence, pour tout entier $n : u \leq x_n \leq v$.

- si $x_0 \leq u$, on procède de même par récurrence pour montrer que pour tout entier naturel n , $x_n \leq u$.

Initialisation : $x_0 \leq u$ par hypothèse, donc initialisation vérifiée.

Hérédité : on suppose que pour un certain entier $n \geq 0$, $x_n \leq u$ alors

$\exp(x_n/3) \leq \exp(u/3)$, l'hérédité est vérifiée.

Conclusion : pour tout entier naturel n , $x_n \leq u$.

- Si $x_n > x_{n-1}$ alors $x_{n+1} = \exp(x_n/3) > x_n = \exp(x_{n-1}/3)$ (par stricte croissance de la fonction exponentielle) donc $x_{n+1} > x_n$.

Et de même pour $x_n < x_{n-1}$.

Conclusion : le signe de $x_{n+1} - x_n$ est le même que celui de $x_n - x_{n-1}$,

donc par récurrence immédiate le même que celui de $x_1 - x_0$.

7. Il reste à déterminer le signe de $x_1 - x_0$ suivant la position de x_0 :

- (a) — si $0 \leq x_0 < u$ alors $f_3(x_0) > f_3(u) = 0$ car f_3 est décroissante sur $[0, u]$.

Donc $1 - x_0^3 e^{-x_0} > 0$ et $1 > x_0^3 e^{-x_0}$ d'où $e^{x_0} > x_0^3$ et $\exp(x_0/3) = x_1 > x_0$ en prenant la racine cubique de part et d'autre.

Conclusion : si $0 \leq x_0 < u$ alors $x_1 > x_0$ et la suite est croissante

- si $u < x_0 < v$ alors $f_3(x_0) < 0$ d'après les variations de f_3 sur $[u, v]$ et de la même façon que précédemment, $x_1 < x_0$

$x_1 > x_0$ comme précédemment

Conclusion : si $u < x_0 < v$ alors la suite est décroissante

- **Conclusion :** si $x_0 = u$, la suite est constante (car u est un point fixe).

- (b) Donc

- si $x_0 \leq u$, la suite x est croissante et majorée par u donc convergente vers une limite ℓ avec $0 \leq \ell \leq u$. Et comme $x \rightarrow e^{x/3}$ est continue en ℓ (sur $\mathbb{R}$) on a $\exp(\ell/3) = \ell$ et donc $f_3(\ell) = 0$.

Donc $\ell = u$ ou v et comme $\ell \leq u$ alors $\ell \neq v$ et par élimination

Conclusion : si $x_0 \leq u$ la suite x converge vers u

- si $u < x_0 < v$ alors la suite est décroissante et minorée par u donc converge vers une limite ℓ avec $u \leq \ell \leq v$ (les inégalités s'élargissent à la limite)

De plus $u \leq \ell \leq x_0$ (car la suite est décroissante).

Donc $\ell \neq v$ et $\ell = u$.

Conclusion : si $u < x_0 < v$ alors la suite converge vers u

8. On choisit désormais $x_0 = 2$ et donc $u < x_0 < v$.

(a) On va utiliser encore l'inégalité des accroissements finis :

$g(x) = \exp(x/3)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = \frac{1}{3} \exp(x/3)$.

Et puisque $u < 2$, pour $x \in [u, 2] : 0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{3} \exp(\frac{2}{3}) \approx 0,649 \leq 0,65$

Et comme $x_n \geq u$, $x_n \in [u, 2]$, $u \in [u, 2]$, l'inégalité des accroissements finis appliquée à g , x_n et u sur $[u, 2]$ entraîne :

$$0 \leq g(x_n) - g(u) \leq 0,65(x_n - u)$$

Conclusion : soit pour tout entier naturel n que $0 \leq x_{n+1} - u \leq 0,65(x_n - u)$

Conclusion : et on aura $0 \leq x_n - u \leq 0,65^n$ par récurrence (à faire vous-même).

(b) Programme Python permettant le calcul de x_n pour un entier n donné.

```
import numpy as np
x=2
n=int(input('entrer n'))
for k in range(1,n+1):
    x=np.exp(x/3)
print(x)
```

pour $n=100$, on trouve 1.8571838602078354

(c) Pour que x_n constitue une valeur approchée de u à 10^{-5} près, il suffit que $(0,65)^n \leq 10^{-5}$.

soit $n \geq -5 \ln(10) / \ln(0,65)$.

C) Etude des racines positives de l'équation (E_n) pour $n \geq 3$:

1. On a $f_n(x) = 1 - x^n e^{-x}$. f_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme somme et quotient de fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

En $+\infty$: $f_n(x) = 1 - x^n e^{-x} = 1 - x^n / e^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ car $x^n = o(e^x)$ en $+\infty$.

La courbe représentative de f_n a donc une asymptote horizontale en $+\infty$.

Sens de variation : $f'_n(x) = -n x^{n-1} e^{-x} + x^n e^{-x} = x^{n-1} (x - n) e^{-x}$ d'où :

x	0	n	$+\infty$
$x - n$	-	0	+
x^{n-1}	0	+	+
$f'_n(x)$	0	-	+
$f_n(x)$	1	$1 - \frac{n^n}{e^n}$	1

Cette fois, comme $n \geq 3 > e$ alors $(n/e) > 1$ et $(n/e)^n > 1^n$ car $n > 0$ et la fonction "puissance n " est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Donc $f_n(n) < 0$.

Comme $f_n(1) = 1 - \frac{1}{e} > 0$, $f_n > 0$ sur $[0, 1]$ et (E_n) n'a pas de solution.

Sur $]1, n[$, la fonction f_n est continue et strictement décroissante. Elle est donc bijective de $]1, n[$ dans

$$\left] \lim_{x \rightarrow n} f_n(x); \lim_{x \rightarrow 1} f_n(x) \right[= \left] f_n(n); 1 - \frac{1}{e} \right[.$$

Et comme $0 \in \left] f_n(n); 1 - \frac{1}{e} \right[$ l'équation $f_n(x) = 0$ qui équivaut à (E_n) , a une unique solution u_n sur $]1, n[$.

De même pour l'équation $f_n(x) = 0 \Leftrightarrow (E_n)$, a une unique solution v_n sur $[n, +\infty[$.

Donc l'équation (E_n) admet deux racines positives u_n et v_n telles que $1 < u_n < n < v_n$.

2. Pour déterminer le signe de $f_n(u_{n-1})$, on fait intervenir $f_{n-1}(u_{n-1}) = 0$ pour $n - 1 \geq 3$

(a) donc $n \geq 4$:

$$\begin{aligned} f_{n-1}(u_{n-1}) &= 1 - (u_{n-1})^{n-1} e^{-u_{n-1}} = 0 \\ f_n(u_{n-1}) &= 1 - (u_{n-1})^n e^{-u_{n-1}} \\ f_n(u_{n-1}) &= f_n(u_{n-1}) - f_{n-1}(u_{n-1}) \\ &= (u_{n-1})^{n-1} e^{-u_{n-1}} - (u_{n-1})^n e^{-u_{n-1}} \\ &= (u_{n-1})^{n-1} e^{-u_{n-1}} (1 - u_{n-1}) < 0 \end{aligned}$$

car $1 < u_{n-1}$. Donc pour tout entier $n \geq 4$ on a : $f_n(u_{n-1}) < 0$.

- (b) On a donc $f_n(u_{n-1}) < 0 = f_n(u_n)$.

Et comme f_n est strictement décroissante sur $[0, n]$ et bijective, et que u_n et $u_{n-1} (\leq n-1)$ en sont éléments alors $u_{n-1} > u_n$.

La suite u est donc décroissante et minorée par 1. Elle est donc convergente. Soit ℓ sa limite, $\ell \geq 1$.

3. (a) On a $n \ln(u_n) = u_n$ donc $\ln(u_n) = u_n/n$ et $u_n = \exp(u_n/n)$.

Or $u_n/n \rightarrow 0$ quand n tend vers $+\infty$ donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^0 = 1 = \ell$ (car $\exp$ est continue en 0).

- (b) Comme $u_n - \ell = u_n - 1 = \exp(u_n/n) - 1$ et que $u_n/n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ alors par équivalent usuel :

$$u_n - \ell \sim u_n/n \sim 1/n.$$

4. (a) On a comme pour u_n

$$\begin{aligned} f_{n-1}(v_n) &= f_{n-1}(v_n) - f_n(v_n) \\ &= (v_n)^n e^{-v_n} - (v_n)^{n-1} e^{-v_n} \\ &= (v_n)^{n-1} e^{-v_n} (v_n - 1) > 0 \end{aligned}$$

Donc $f_{n-1}(v_{n-1}) = 0 < f_{n-1}(v_n)$.

- (b) Et comme f_{n-1} est strictement croissante sur $[n-1, +\infty[$, bijective et que $v_n (\geq n \geq n-1)$ et v_{n-1} en sont éléments alors $v_{n-1} < v_n$.

La suite v est donc croissante. Comme $v_n > n$, on a par minoration $v_n \rightarrow +\infty$.

5. (a) On pose pour tout réel $x > 1$: $g(x) = x - \ln(x)$. g est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme somme de fonctions usuelles dérivables sur $]0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} \\ g(1) &= 0 \end{aligned}$$

Comme g est strictement croissante et continue sur $]1, +\infty[$ alors g réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur

$$\left[\lim_{x \rightarrow 1} g(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right[=]1, +\infty[.$$

Elle admet donc une fonction réciproque.

- (b) On a $(v_n)^n = e^{v_n}$ donc en élevant à la puissance $1/n$: $v_n = e^{v_n/n}$

$$\begin{aligned} g(v_n/n) &= \frac{v_n}{n} - \ln\left(\frac{v_n}{n}\right) = \frac{v_n}{n} - \ln\left(\frac{e^{v_n/n}}{n}\right) = \frac{v_n}{n} - \ln(e^{v_n/n}) + \ln(n) \\ &= \frac{v_n}{n} - v_n + \ln(n) = \ln(n) \end{aligned}$$

Comme $v_n/n \in]1, +\infty[$ (car $v_n > n$) et que $\ln(n) \in]1, +\infty[$ (car $n > e$) alors

$$g(v_n/n) = \ln(n) \Leftrightarrow \frac{v_n}{n} = g^{-1}(\ln(n))$$

- (c) Or, comme $y = g(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$ alors, par symétrie, $x = g^{-1}(y) \rightarrow +\infty$ quand $y \rightarrow +\infty$.

Donc $g(\ln(n)) \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$ et $v_n/n \rightarrow +\infty$.

Pour avoir un équivalent de v_n , on repart de la relation $v_n/n = g^{-1}(\ln(n))$ d'où $v_n = n \cdot g^{-1}(\ln(n))$.

Reste à trouver un équivalent simple de g^{-1} en $+\infty$.

C'est la partie difficile du sujet!

Pour cela on part de $g(x) = x - \ln(x) = x(1 - \ln(x)/x)$ et comme $\ln(x)/x \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$ alors $g(x) \sim x$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Donc $\frac{g(x)}{x} \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow +\infty$. Avec $x = g^{-1}(y)$ qui tend vers $+\infty$ quand y tend vers $+\infty$ on a on :

$$\frac{g(x)}{x} = \frac{y}{g^{-1}(y)} \rightarrow 1$$

et donc $g^{-1}(y) \sim y$. On a alors $g^{-1}(\ln(n)) \sim \ln(n)$.

D'où finalement $v_n = n \cdot g^{-1}(\ln(n)) \sim n \cdot \ln(n)$.

ETUDE DES RACINES NEGATIVES DE (E_n)

D Existence des racines négatives de (E_n) :

1. pour les pairs :

On a

$$\begin{aligned}f'_{2k}(x) &= (-2kx^{2k-1} + x^{2k})e^{-x} \\&= (-2k + x)x^{2k-1}e^{-x}\end{aligned}$$

avec $x - 2k < 0$ sur $\mathbb{R}^-$ et x^{2k-1} également (sauf en 0) car la puissance est impaire.

Donc f_{2k} est strictement croissante sur $\mathbb{R}^-$.

en $-\infty : f_{2k}(x) = 1 - x^{2k}e^{-x} \rightarrow -\infty$ et $f_{2k}(0) = 1$

Pour les impairs.

On a

$$\begin{aligned}f'_{2k}(x) &= (-(2k+1)x^{2k} + x^{2k+1})e^{-x} \\&= (-(2k+1) + x)x^{2k}e^{-x} < 0\end{aligned}$$

Donc f_{2k+1} est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

en $-\infty : f_{2k+1}(x) = 1 - x^{2k+1}e^{-x} \rightarrow +\infty$ et $f_{2k+1}(0) = 1$.

Donc $f_{2k+1} > 0$ sur $\mathbb{R}^-$

2. Donc f_n n'admet pas de racine négative si n est impair.

Et par bijection elle en admet une unique si n est pair.

E) Etude des racines négatives de l'équation (E_{2n}) :

1. On essaye, au plus simple : en -1 .

$f_{2n}(-1) = 1 - (-1)^{2n}e^1 < 0 = f_{2n}(w_n)$ et comme f_{2n} est strictement croissante sur $\mathbb{R}^-$,

Conclusion : $-1 < w_n < 0$.

On connaît $f_{2n-2}(w_{n-1}) = 1 - (w_{n-1})^{2n-2}e^{-w_{n-1}} = 0$ donc $(w_{n-1})^{2n-2}e^{-w_{n-1}} = 1$ que l'on fait réapparaître dans :

$$\begin{aligned}f_{2n}(w_{n-1}) &= 1 - (w_{n-1})^{2n}e^{-w_{n-1}} \\&= 1 - (w_{n-1})^2 (w_{n-1})^{2n-2}e^{-w_{n-1}} \\&= 1 - (w_{n-1})^2 > 0\end{aligned}$$

car $-1 < w_{n-1} < 0$ et la fonction carrée est décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

Conclusion : $f_{2n}(w_{n-1}) > 0$

2. (a) On a donc $f_{2n}(w_{n-1}) > 0 = f_{2n}(w_n)$ et comme f_{2n} est strictement croissante sur $\mathbb{R}^-$, bijective et que les deux termes y sont, $w_{n-1} > w_n$.

Conclusion : la suite w est décroissante

Comme elle est minorée par -1 , elle est convergente vers une limite $\ell \in [-1; 0]$.

on se souvient que $0 = f_{2n}(w_n) = 1 - (w_n)^{2n}e^{-w_n}$ ce qui donne :

$$1 = e^{2n \ln |w_n| - w_n} \Leftrightarrow 2n \ln |w_n| - w_n = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln |w_n|}{w_n} = \frac{1}{2n} \text{ (car } w_n < 0),$$

et comme $w_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ et que $\frac{1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

alors on doit nécessairement avoir, par continuité de la fonction $x \rightarrow \ln x$:

$\ln(|\ell|) = 0$ d'où $|\ell| = 1$ et comme $\ell \leq 0$, on a donc $\ell = -1$.

Conclusion : w converge vers -1

- (b) On a vu précédemment que $\ln |w_n| = \frac{1}{2n} w_n$ soit $|w_n| = \exp(w_n/2n)$ et comme $w_n/2n$ tend vers zéro à l'infini, on a par équivalent usuel que :

$\exp(w_n/2n) \sim 1 + w_n/2n \sim 1 - 1/2n$ Donc $|w_n| - 1 \sim -1/2n$. Or $|w_n| - 1 = -(w_n - (-1)) = -(w_n - \ell)$ Donc

Conclusion : $w_n - (-1) \sim \frac{1}{2n}$ quand $n \rightarrow +\infty$.