

Prénom :

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit. La présentation de la copie doit être correcte, les résultats mis en valeur et les feuilles numérotées. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. La clarté, la précision et la concision de la rédaction entrent dans une part importante de l'évaluation. Si un candidat croit voir une erreur dans le sujet, il l'indiquera clairement sur sa copie et continuera à composer.

Exercice 1.

1. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $a_n = \frac{1}{n \ln n}$.
 - (a) Montrer que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on a : $0 < \frac{1}{t \ln t} \leq \frac{1}{k \ln k}$.
 - (b) En déduire que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on a : $\int_k^{k+1} \frac{1}{t \ln t} dt \leq \frac{1}{k \ln k}$.
 - (c) En déduire enfin, par sommation, que pour tout entier $N \geq 2$, $\int_2^{N+1} \frac{1}{t \ln t} dt \leq \sum_{k=2}^N a_k$.
 - (d) Calculer la dérivée de $t \mapsto \ln(\ln t)$, en déduire : $\int_2^{N+1} \frac{1}{t \ln t} dt$ pour tout entier N supérieur ou égal à 2. En déduire ensuite la nature de la série de terme général a_n .

Dans la suite, on considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{(1-x) \ln(1-x)} & \text{si } x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2.
 - (a) Montrer que f est continue sur $] -\infty, 1[$. (pour l'étude en 0, penser aux équivalents usuels).
 - (b) Calculer le taux d'accroissement de f en 0. Donner le développement limité en 0 de $x \mapsto \ln(1-x)$.
 - (c) En déduire alors que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.
3.
 - (a) Montrer que f est dérivable sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$, puis calculer $f'(x)$ pour tout x de $] -\infty, 0[\cup]0, 1[$.
 - (b) Étudier le signe de la quantité $\ln(1-x) + x$, lorsque x appartient à $] -\infty, 1[$, puis en déduire les variations de f .
 - (c) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, puis dresser son tableau de variation.
 - (d) Écrire un programme **Python** permettant d'obtenir la courbe représentative de f sur $[-5, -1]$.
4.
 - (a) Établir que, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, il existe un seul réel de $[0, 1[$, noté u_n , tel que $f(u_n) = n$ et donner la valeur de u_1 .
 - (b) Montrer que la suite (u_n) converge et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.
 - (c) On admettra qu'il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0 , on a : $u_n \leq 1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}$. En déduire, à l'aide de la première question, que la série de terme général $\frac{1}{-n \ln(1-u_n)}$ est divergente.
 - (d) Conclure, en revenant à la définition de u_n , que la série de terme général $1 - u_n$ est divergente.

Exercice 2. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont A est la matrice relativement à la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbf{R}^3$ et Id l'endomorphisme identité de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice est I .

1.
 - (a) Déterminer $(A - I)^2$.
 - (b) En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et A .
2. On pose $A = N + I$.

- (a) Exprimer pour tout entier naturel n , la matrice A^n comme combinaison linéaire de I et N , puis l'écrire comme combinaison linéaire de I et A .
 - (b) Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n = -1$.
3.
 - (a) Utiliser la première question pour déterminer la seule valeur propre de A .
 - (b) En déduire si A est ou n'est pas diagonalisable.
 - (c) Ecrire un programme **Python** permettant d'obtenir le spectre et les valeurs propres de A .
4. On pose $u_1 = (f - Id)(e_1)$ et $u_2 = e_1 + e_3$.
 - (a) Montrer que le rang de $f - Id$ est égal à 1.
 - (b) Justifier que (u_1, u_2) est une base de $\text{Ker}(f - Id)$.
5.
 - (a) Montrer que la famille (u_1, u_2, e_1) est une base de $\mathbf{R}^3$.
 - (b) Déterminer la matrice T de f dans cette même base.
6. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier l'inversibilité de P puis écrire une relation existant entre les matrices A , T , P et P^{-1} .
7. On note $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$ la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ et on rappelle que, pour tout (i, j) de $\llbracket 1, 3 \rrbracket^2$, la matrice $E_{i,j}$ n'a que des coefficients nuls sauf celui situé à l'intersection de la i -ème ligne et de la j -ème colonne qui vaut 1.
 - (a) Montrer que l'ensemble E des matrices M qui commutent avec T , c'est-à-dire des matrices vérifiant l'égalité $MT = TM$, est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ engendré par la famille $(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$. Vérifier que la dimension de E est égale à 5.
 - (b) Soit N une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. établir l'équivalence :

$$NA = AN \iff (P^{-1}NP)T = T(P^{-1}NP)$$
 - (c) En déduire que l'ensemble F des matrices qui commutent avec A est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ engendré par la famille :

$$(P(E_{1,1} + E_{3,3})P^{-1}, PE_{1,2}P^{-1}, PE_{1,3}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1}).$$

Exercice 3. On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes de même loi $U(\{-1; 1\})$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ (que l'on ne cherchera pas à expliciter) et on pose, pour tout $\omega \in \Omega$, $M(\omega) \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, $M(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) & X_2(\omega) \\ X_2(\omega) & X_1(\omega) \end{pmatrix}$

1. Justifier que, pour tout $\omega \in \Omega$, $M(\omega)$ est une matrice diagonalisable. Est-elle inversible?
2. Montrer que, pour tout $\omega \in \Omega$, $Sp(M(\omega)) = \{X_1(\omega) + X_2(\omega); X_1(\omega) - X_2(\omega)\}$.
3. Déterminer une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ telle que, pour tout $\omega \in \Omega$, $P^{-1}M(\omega)P = D(\omega)$ où $D(\omega)$ est une matrice diagonale à expliciter.
4. On considère le système différentiel linéaire à coefficients aléatoires :

$$(S) \begin{cases} y_1' = X_1 y_1 + X_2 y_2 \\ y_2' = X_2 y_1 + X_1 y_2 \end{cases}.$$

On pose, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$. On admet que $Y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix}$.

 - (a) Montrer que, pour tout $\omega \in \Omega$, Y est solution de (S) si et seulement si $Y' = M(\omega)Y$.
 - (b) Soit $\omega \in \Omega$ fixé.
 - i. Quels sont les états d'équilibre du système?
 - ii. Déterminer, pour tout $\omega \in \Omega$ l'ensemble des solutions de (S).
 - (c) Calculer la probabilité que toutes les trajectoires soient convergentes.

PROBLEME. On lance indéfiniment une pièce donnant “Pile” avec la probabilité p et “Face” avec la probabilité $q = 1 - p$. On suppose que $p \in]0, 1[$ et on admet que les lancers sont mutuellement indépendants.

Pour tout entier naturel k , supérieur ou égal à 2, on dit que le $k^{\text{ième}}$ lancer est un changement s’il amène un résultat différent de celui du $(k - 1)^{\text{ième}}$ lancer.

On note P_k (resp. F_k) l’événement : “on obtient Pile (resp. Face) au $k^{\text{ième}}$ lancer”.

Pour ne pas surcharger l’écriture on écrira, par exemple, $P_1 F_2$ à la place de $P_1 \cap F_2$.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de changements survenus durant les n premiers lancers.

Par exemple lorsque qu’on effectue les 3 premiers lancers et qu’on obtient l’événement $P_1 F_2 P_3$, il y a eu deux changements (aux 2^{ième} et 3^{ième} lancers). Ou encore, lorsqu’on effectue les 4 premiers lancers et qu’on obtient l’événement $F_1 F_2 P_3 P_4$, il y a eu un seul changement (au 3^{ième} lancer).

Partie I : Simulation informatique et conjectures

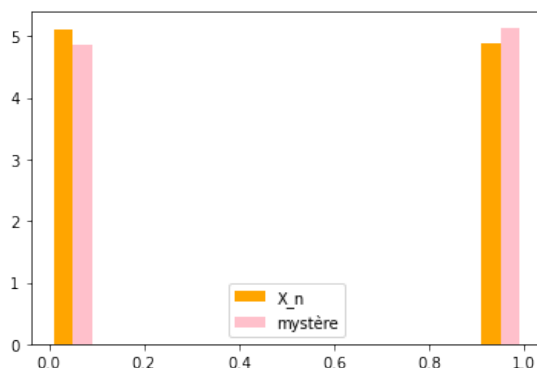
1. Recopier et compléter la fonction Python suivante prenant en argument un entier $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ et un réel $p \in]0, 1[$ et renvoyant une simulation de la variable aléatoire X_n .

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import numpy as np
import numpy.random as rd
def simul_X(n, p):
    chgt= 0
    T=[rd.binomial(1, p) for k in range(n)]
    for .....:
        if .....:
            chgt=chgt+1
    return chgt
```

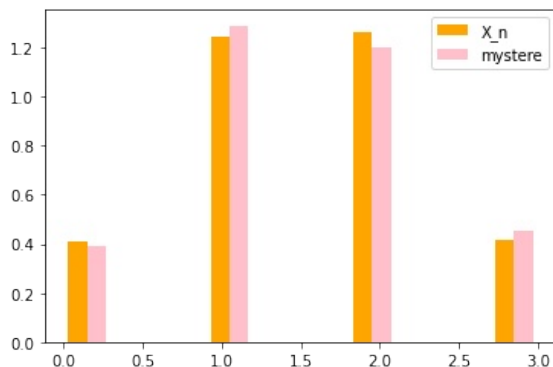
2. On exécute le script suivant pour différentes valeurs de n ($n = 2, n = 4, n = 5, n = 10$) et avec $p = q = 1/2$.

```
import matplotlib.pyplot as plt
n=2#4, 5,10
p=1/2
L= [ ]
M= [ ]
for k in range(1000):
    L.append(simul_X(n,p))
    M.append(rd.binomial(n-1,p))
plt.hist([L, M], color = ['orange', 'pink'], density = True,
label = ['X_n', 'mystere'])
plt.legend()
plt.show()
```

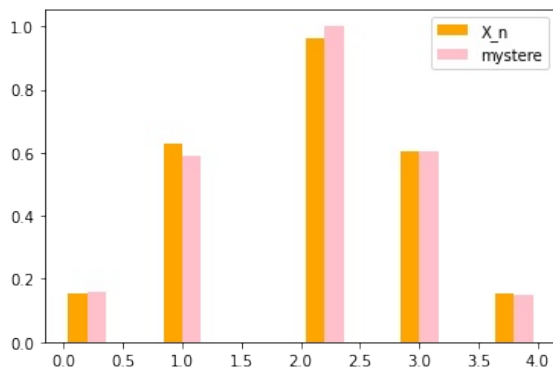
- Cas $n = 2$: affichage Python



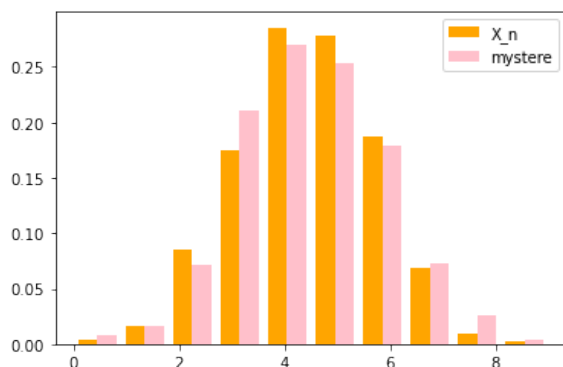
• Cas $n = 4$: affichage Python



• Cas $n = 5$: affichage Python



• Cas $n = 10$: affichage Python



Que peut-on alors conjecturer quant à la loi de X_n ? Dans quel cas? Justifier le raisonnement.

Partie II : étude de quelques exemples.

- Donner (en la justifiant) la loi de X_2 .
- Donner (en la justifiant) la loi de X_3 .
 - Vérifier que $E(X_3) = 4pq$ et que $V(X_3) = 2pq(3 - 8pq)$.
- Trouver la loi de X_4 .
 - Calculer $E(X_4)$.

Partie III : étude du cas $p \neq q$. Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

- Exprimer $P(X_n = 0)$ en fonction de p , q et n .
- Montrer que : $\forall a, b \in \mathbf{R}, \forall m \in \mathbf{N}, b^m - a^m = (b - a) \left(\sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-1-k} \right)$.
 - En décomposant l'événement $(X_n = 1)$ en une réunion d'événements incompatibles, montrer que
$$P(X_n = 1) = \frac{2pq}{q - p} (q^{n-1} - p^{n-1}).$$

3. En distinguant les cas n pair et n impair, exprimer $P(X_n = n - 1)$ en fonction de p et q .
4. Retrouver, grâce aux trois questions précédentes, les lois de X_3 et X_4 .
5. Pour tout entier naturel k , supérieur ou égal à 2, on note Z_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le $k^{\text{ième}}$ lancer est un changement et 0 sinon.
 - (a) A l'aide du système complet d'événements (P_{k-1}, F_{k-1}) , montrer que Z_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $2pq$.
 - (b) Écrire X_n à l'aide de certaines des variables Z_k .
 - (c) En déduire $E(X_n)$.

Partie IV : étude du cas $p = q$.

1. Vérifier, en utilisant les résultats de la partie I, que X_3 suit une loi binomiale (on l'admet pour X_4).
2. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, X_n suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.