

Intégrales à paramètre

Feuille d'exercices #15

★ Exercice 1 — Intégrale de Gauss

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

1. Montrer que f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et calculer leurs dérivées.
2. Vérifier que $f + g^2$ est une fonction constante (à déterminer) sur $\mathbb{R}_+$.
3. Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}_+$, $0 \leq f(x) \leq e^{-x^2}$.
4. En déduire la convergence et la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

★ Exercice 2 — Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est paire.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer $f'(x)$ sous forme intégrale.
3. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y' + \frac{x}{2}y = 0$.
4. En déduire une expression de f à l'aide de l'exercice précédent.

★ Exercice 3 — Transformée de Fourier

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ et sa transformée de Fourier :

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} dt$$

1. Démontrer que $\hat{f}$ est définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Soit désormais la fonction $f : t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$.
 - a) Montrer que $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
 - b) Calculer $\hat{f}'$ puis en déduire $\hat{f}$ en admettant que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

★★ Exercice 4 — Pour $x > -1$, on pose $f(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(1 + x \sin^2 t) dt$.

1. Montrer que f est continue sur $I =]-1, +\infty[$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et exprimer $f'(x)$ sous forme intégrale.
3. Calculer explicitement $f'(x)$ à l'aide du changement de variable $u = \tan t$.
On distinguera les cas $x = 0$ et $x \neq 0$.
4. En déduire une expression explicite de $f(x)$ pour $x > -1$.

★★ Exercice 5 — Intégrale de Dirichlet

On pose, pour tout $x \geq 0$,

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt \quad \text{et} \quad \psi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt$$

1. Montrer que ces deux fonctions sont bien définies sur $\mathbb{R}_+$.
2. Exprimer $\psi(x)$ sous la forme $a(x) \cos(x) + b(x) \sin(x)$ avec $a(x)$ et $b(x)$ définies par des intégrales sur l'intervalle $[x, +\infty[$.
3. Étudier la continuité de φ et ψ .
4. Démontrer que φ et ψ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et solutions de l'équation différentielle $y'' + y = \frac{1}{x}$.
5. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

★★ Exercice 6 — Transformée de Laplace

Soit f une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

On pose, pour tout $p \geq 0$, $L_f(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$.

1. Montrer que L_f est continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$.
2. Déterminer sa limite en $+\infty$.
3. Montrer que L_f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{++}$.
4. On suppose dorénavant f bornée sur $\mathbb{R}^+$ et $f(0) \neq 0$.
 - a) Justifier que $\int_0^{+\infty} p e^{-pt} [f(t) - f(0)] dt \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$.
 - b) En déduire le *théorème de la valeur initiale* : $L_f(p) \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f(0)}{p}$.

★★ **Exercice 7** — Fonction Γ d'Euler

Soit la fonction $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.

1. Montrer que Γ est définie sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que pour $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$; en déduire $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que Γ est continue sur $]0, +\infty[$.
4. Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et calculer $\Gamma^{(n)}(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
5. En déduire que la fonction Γ est convexe sur $]0, +\infty[$.
6. Démontrer que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ puis tracer le graphe de Γ .
7. a) Justifier que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$.
b) En déduire la *formule de Gauss* :

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n)}$$

★★ **Exercice 8** — Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose sous réserve d'existence,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)} du \quad \text{et} \quad K = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du$$

1. Démontrer que $\psi : u \mapsto \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$ est intégrable sur $I =]0, +\infty[$.
2. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $F(x)$ est définie.
3. Montrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et exprimer $F'(x)$ sous forme intégrale.
4. En déduire que pour tout $x \in I$, $xF'(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)F(x) = -K$.
5. Pour tout $x \in I$, on pose $G(x) = \sqrt{x}e^{-x}F(x)$.
Montrer qu'il existe une constante réelle C telle que pour tout $x \in I$,

$$G(x) = C - K \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$$

6. Déterminer les limites de G en 0 et $+\infty$, et en déduire la valeur de K .

★ **Exercice 9** — Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t} e^{-t} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Étudier la continuité puis la dérivabilité de f .
3. Déduire de $f'(x)$ une expression simplifiée de $f(x)$.

★★ **Exercice 10** — On note f la fonction définie par $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$.

1. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer de deux manières différentes que f est convexe.
3. Déterminer les limites puis un équivalent de f en 0 et en $+\infty$.

★★ **Exercice 11** — On note f la fonction définie par $f(x) = \int_0^{\pi/4} \tan^x(t) dt$.

1. Préciser le domaine de définition de f .
2. Établir la continuité puis la monotonie de f . Donner sa limite en $+\infty$.
3. Calculer $f(x) + f(x+2)$ et en déduire un équivalent de f en $+\infty$.

★★ **Exercice 12** — Indice d'un point par rapport à un lacet

Soit $\gamma \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{C})$ telle que $\gamma(0) = \gamma(1)$.

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1])$,

$$I(\gamma, z) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt \in \mathbb{Z}$$

On pourra considérer $x \mapsto (\gamma(x) - z) \exp\left(-\int_0^x \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt\right)$.

2. Montrer que pour z suffisamment grand en module, $I(\gamma, z_0) = 0$.