

EXERCICE 1: [Indications] [Correction]

On considère l'équation différentielle autonome $y' + 2\sqrt{y} = 0$.

1. Y a-t-il des états stationnaires, si oui quels sont-ils ?
2. Une solution $y \in \mathcal{C}^1$ qui n'est pas la fonction constante nulle peut-elle s'annuler ?
3. Une solution y non nulle peut-elle être négative ?
4. Justifier la validité de l'équivalence ci-dessous et dire s'il ensuite existe des solutions non nulles sur $\mathbb{R}$.

$$y' + 2\sqrt{y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'}{2\sqrt{y}} = -1$$

EXERCICE 2: [Indications] [Correction]

On considère l'équation

$$(y')^2 = 4y \quad \text{sur } x \in [0, +\infty[$$

1. Montrer que toutes les solutions potentielles sont positives.
2. Déterminer le/les état(s) stationnaire(s) de l'équation.
3. On suppose maintenant que y est une solution $\mathcal{C}^1$ différente de l'application nulle.
 - a) Justifier que y n'admet aucune tangente horizontale.
 - b) En déduire que y' est de signe constant.
4. Existe-t-il des solutions non nulles de classe $\mathcal{C}^1([0, +\infty[)$ sur $\mathbb{R}$ de $(y')^2 = 4y$? Si oui, les déterminer. (*On pourra s'inspirer de l'exercice précédent.*)

EXERCICE 3: [Indications] [Correction] - *Raisonner* -

On considère l'équation autonome $y' = \ln y$. Le but de cet exercice est d'esquisser les potentielles solutions sur un graphique.

1.
 - a) Une solution peut-elle s'annuler ? Être négative ?
 - b) En déduire dans quelle partie du plan $\mathbb{R}^2$ on pourra trouver l'ensemble des courbes $(x, y(x))$ avec y solution de l'équation.
2.
 - a) Quel(s) est/sont le(s) état(s) stationnaires de l'équation ?
 - b) Une solution non constante peut-elle passer par l'ordonnée 1 ?
 - c) En déduire dans quelle partie du plan on trouvera les solutions passant par $(0, y_0)$ pour $y_0 \in]0, 1[$, puis pour $y_0 > 1$.
3.
 - a) Montrer que les solutions dans la partie $y > 1$ sont croissantes.
 - b) Montrer que les solutions dans la partie $y < 1$ sont décroissantes.
4. Quelle est la pente de la tangente aux solutions y à l'ordonnée e ?

5. Tendances aux extrémités :

☆

- a) Existe-t-il des ordonnées pour lesquelles la tangente est proche d'une droite horizontale ? Donner une interprétation sur l'allure de la courbe.
 - b) Vers quoi tend la pente quand y tend vers $+\infty$? Vers quoi tend y'' quand y tend vers $+\infty$? Interprétation sur y' puis sur la courbe.
 - c) Vers quoi tend la pente quand y tend vers 0^+ ? Comment interpréter ceci sur le graphique ? Concernant $y_0 \in]0, 1[$, la courbe semble-t-elle pouvoir être définie pour toute abscisse réelle ?
6. En conclure finalement un croquis de quelques approximations de solutions dans le plan $\mathbb{R}^2$, en prenant soin de mettre en valeur tous les phénomènes observés dans l'exercice.

EXERCICE 4: [Indications] [Correction] - *Calculer* -

On considère l'équation autonome $(E) : y' = -e^y$.

1. Montrer qu'il n'y a aucun état stationnaire pour cette équation.
2. Quel sera le sens de variation d'une solution de (E) ?
3. On pose $z = \frac{1}{e^y}$. Trouver une équation simple (E_1) sur z de manière à ce qu'on ait " y est solution de (E) ssi z est solution de (E_1) " et déterminer l'ensemble des solutions de (E_1) .
4. En déduire l'ensemble des solutions possibles de (E) .

Indications

Exercice 1 [Correction]

4. On pourra reconnaître la dérivée de $\sqrt{y}$.

Exercice 2 [Correction]

3.
 - a) Tangente horizontale $\Leftrightarrow y' = 0$.
4. On pourra différencier les cas $y' \geq 0$ et $y' < 0$.
Attention, les domaines de définitions dépendent de la solution donnée.

Exercice 3 [Correction]

2.
 - c) Penser au fait que les courbes solutions ne se coupent pas.
5.
 - b) Remarquer que la valeur limite de y'' donne elle aussi une idée sur le comportement de y' .

Exercice 4 [Correction]

4. On fera attention au domaine de définition de y .

Exercice 1

1. On pose y une application constante. Ainsi, y répond à l'équation ssi

$$0 + 2\sqrt{y} = 0$$

i.e.

$$\boxed{y = 0}$$

2. Si une solution s'annule, elle s'intersecte avec l'état stationnaire nul. C'est donc impossible car deux solutions ne peuvent pas se couper.
3. Non, sinon on ne peut pas calculer $\sqrt{y}$ et l'équation n'est pas définie.
4. $\frac{y'}{2\sqrt{y}}$ est l'expression dérivée de $\sqrt{y}$. Ainsi, s'il existe une solution, en intégrant, on obtient

$$\sqrt{y} = -x + c \quad \text{où } c \text{ est une constante.}$$

Or, si $x \rightarrow +\infty$, on a alors

$$\sqrt{y} \xrightarrow{+\infty} -\infty$$

ce qui est impossible car $\sqrt{y}$ est positif.
Ainsi,

$\boxed{\text{Il ne peut pas exister de solution non nulle définie sur } \mathbb{R}.}$

Exercice 2

1. On a $y = \frac{1}{4}(y')^2 \geq 0$.
2. Soit y une fonction constante. Alors y est solution ssi $0 = 4y$, c'est-à-dire ssi $y = 0$.
Le seul état stationnaire est donc la solution $y : t \mapsto 0$.
3. a) Si y admet une tangente horizontale en x , alors $y'(x) = 0$. D'après l'équation, on a alors $y(x) = \frac{1}{4}(y'(x))^2 = 0$, c'est-à-dire que y s'annule. Ainsi, y traverse l'état stationnaire, ce qui est impossible. En conclusion, y n'admet aucune tangente horizontale.
- b) Si y' n'est pas de signe constant, étant continue, elle s'annule, ce qui est impossible d'après la question précédente.

4. D'après la question précédente, on sait que y' est soit toujours positive, soit toujours négative.

- Si $y' \geq 0$:

y étant positive, on a

$$(y')^2 = 4y \quad \Leftrightarrow \quad y' = 2\sqrt{y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'}{2\sqrt{y}} = 1$$

i.e. ssi il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sqrt{y} = x + c$$

Or, $\sqrt{y} \geq 0$ et $x + c \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -c$, ce qui peut se produire si $c \leq 0$. Ainsi, les solutions non nulles sont les

$$y : x \mapsto (x + c)^2, \quad c > 0$$

- Si $y' \leq 0$:

y étant positive, on a

$$(y')^2 = 4y \quad \Leftrightarrow \quad y' = -2\sqrt{y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'}{2\sqrt{y}} = -1$$

i.e. ssi il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sqrt{y} = -x + c$$

Or, $\sqrt{y} \geq 0$ et $-x + c \leq 0 \Leftrightarrow x \geq c$, ce qui peut se produire pour n'importe quel $c \in \mathbb{R}$. Il n'y a donc pas de solution sur $[0, +\infty[$ vérifiant $y' < 0$.

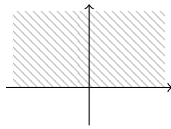
- En conclusion, les solutions sont :

$$\boxed{y : x \mapsto (x + c)^2, \quad c > 0}$$

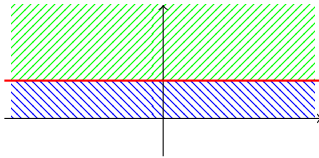
Exercice 3

1. a) À la vue de l'équation, on doit avoir $\ln y$ bien définie. y ne peut donc ni s'annuler, ni être négative.

b) Sur les $y > 0$:



2. a) Il n'y a que $y = 1$ (à faire)
- b) Toute courbe qui passe par l'ordonnée 1 coupe d'état stationnaire. C'est donc l'état stationnaire car 2 solutions distinctes ne peuvent se couper.
- c) Les solutions seront regroupées en 3 parties : état stationnaire , en dessous et au dessus :



Donc :

- Pour $0 < y_0 < 1$:

courbe qui reste entre les ordonnées 0 et 1.

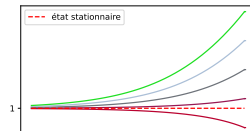
- Pour $y_0 = 1$:

courbe constante $y = 1$.

- Pour $y_0 > 1$:

courbe qui reste d'ordonnées > 1 .

3. a) $y' = \ln y > 0$, donc les courbes des solutions sont croissantes.
- b) $y' = \ln y < 0$ donc les courbes sont décroissantes.
4. $y' = \ln e = 1$
5. a) Une tangente est proche d'une droite horizontale si et seulement si $y' \simeq 0$, c'est-à-dire ssi $\ln y \simeq 0$, et donc si $y \simeq 1$. Ceci nous dit que si y est proche de 1 (par valeurs supérieures ou inférieures) alors la courbe s'applatit :



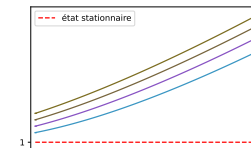
b) Considérons les 2 cas :

- Cas de y' :

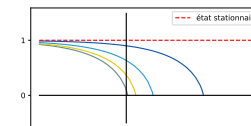
on a $y' = \ln y \rightarrow +\infty$. Ceci semble indiquer que la courbe que la pente ne cesse d'augmenter. La courbe monterait donc à l'infini.

- Cas de y'' :

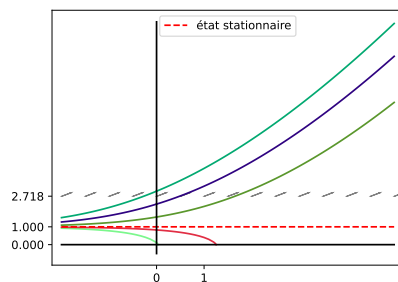
on a $y'' = (y')' = (\ln y)' = \frac{y'}{y} = \frac{\ln y}{y} \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 0$. Ceci semble indiquer que pour des ordonnées grandes, $y'' \simeq 0$ et donc y' à peu près constante. Autrement dit, y' augmente à l'infini, mais très faiblement, avec un développement asymptotique allure proche de $y(x) \simeq ax + \text{constante}$. Ceci semble indiquer que la progression est localement proche d'une courbe linéaire :



- c) On a $y' = \ln y \rightarrow -\infty$. Ceci semble indiquer que la pente n'arrête pas de décroître, mais la courbe reste au dessus de l'axe des abscisses (positive). Ainsi, si $y_0 < 1$, plus la courbe s'approche de 0, plus la pente décroît. En imaginant que y soit définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, quand $x \rightarrow +\infty$, y étant décroissante, elle finira nécessairement par "s'applatir" au dessus de l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$, faute de quoi elle traverser inexorablement l'axe à un moment ou un autre. Ceci signifierait que $y' \simeq 0$, et donc $y \simeq 1$, ce qui n'est possible, d'après la question 4a) que si y reste proche de 1. Autrement dit, pour des valeurs de $y_0 \in]0, 1[$, il semblerait cohérent que la courbe ne soit par définie sur $\mathbb{R}$ entier :



6. Toutes ces études réunies nous donnent les esquisses ci-dessous :



Exercice 4

1. On pose y une fonction constante. Ainsi, y est un état stationnaire ssi $y' = 0$, c'est-à-dire ssi $-e^y = 0$, ce qui est impossible.
2. Systématiquement $y' = -e^y \leq 0$, donc décroissante.

3. On a z' bien défini quelquesoit y . De plus, $z' = -\frac{y'}{e^y}$. Ainsi, après calcul (faire attention aux équivalences)

$$(E) \Leftrightarrow (E_1) : z' = 1$$

Or, z est solution de (E_1) ssi il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$z = x + c$$

4. D'une part, de la relation $z = \frac{1}{e^y}$, on tire $z > 0$ et donc un domaine de définition $x > -c$ dans la résolution précédente.

De plus, on a par définition

$$y = \ln\left(\frac{1}{z}\right)$$

Donc les solutions sont les

$$y = -\ln(x + c), \quad \forall x > -c$$