MATHÉMATIQUES

06

Séries de Fourier

BTS | Mathématiques | Groupement B1

Objectifs du chapitre :

- Reconnaître un signal périodique et identifier sa période, sa fréquence et sa pulsation
- Calculer les coefficients de Fourier a_0, a_n et b_n d'un signal périodique
- Écrire le développement en série de Fourier d'un signal et sa forme amplitude-phase
- Exploiter les propriétés de symétrie (signal pair, impair, demi-onde) pour simplifier les calculs
- Calculer l'amplitude C_n et la phase φ_n de chaque harmonique
- Représenter et interpréter le spectre d'amplitude et le spectre de phase d'un signal
- Calculer la valeur efficace d'un signal à l'aide du théorème de Parseval
- Analyser les harmoniques dans un réseau électrique (application FED/Bâtiment)

Situation professionnelle

Analyse d'un signal électrique perturbé

Un technicien en électrotechnique effectue la maintenance d'une installation industrielle équipée d'un redresseur monophasé à pont de diodes. À l'oscilloscope, le signal de courant en sortie n'est pas sinusoïdal : il présente une forme en **créneaux** avec de fortes composantes harmoniques.

Un ingénieur en génie électrique doit analyser ce signal pour :

- Identifier les harmoniques responsables des perturbations du réseau
- Dimensionner des filtres adaptés pour réduire les harmoniques indésirables
- Calculer la **valeur efficace réelle** du courant (qui détermine l'échauffement des câbles)
- Vérifier la conformité à la norme EN 61000-3-2 sur les émissions harmoniques

Outil mathématique : La décomposition en *série de Fourier* permet d'exprimer tout signal périodique comme une somme (infinie) de sinusoïdes, chacune à une fréquence multiple de la fréquence fondamentale.

1. Rappels — Signaux périodiques

1.1 Définition

DÉFINITION — FONCTION PÉRIODIQUE

Une fonction f est dite **périodique de période T** si, pour tout t :

$$f(t+T) = f(t)$$

La plus petite valeur positive T vérifiant cette relation est appelée **période fondamentale**.

DÉFINITION — FRÉQUENCE ET PULSATION

À un signal périodique de période T sont associés :

- La **fréquence fondamentale** : $f = \dfrac{1}{T}$ (en Hertz, Hz)
- La **pulsation fondamentale** : $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$ (en rad/s)

EXEMPLE — RÉSEAU ÉLECTRIQUE

Le réseau électrique français a une fréquence $f = 50$ Hz. Donc :

- Période : $T = \dfrac{1}{50} = 0{,}02 \text{ s} = 20 \text{ ms}$
- Pulsation : $\omega = 2\pi \times 50 \approx 314{,}16$ rad/s

La **2e harmonique** a une fréquence $2f = 100$ Hz, la **3e harmonique** a $3f = 150$ Hz, etc.

MINI-EXERCICE :

Un signal audio a une période $T = 2{,}5$ ms. Calculer sa fréquence fondamentale f, sa pulsation ω, et la fréquence de sa 4e harmonique.

1.2 Conditions de Dirichlet

PROPRIÉTÉ — CONDITIONS DE DIRICHLET

Un signal f périodique de période T est **développable en série de Fourier** si, sur une période, il vérifie les conditions de Dirichlet :

1. f est **bornée** (ses valeurs restent finies)
2. f n'admet qu'un **nombre fini de discontinuités**
3. f n'admet qu'un **nombre fini d'extrema locaux**

En pratique, tous les signaux physiques (électriques, mécaniques, acoustiques) vérifient ces conditions.

ATTENTION — POINTS DE DISCONTINUITÉ

En un point t_0 de discontinuité, la série de Fourier converge vers la **demi-somme des limites à gauche et à droite** :

$$S(t_0) = \frac{f(t_0^-) + f(t_0^+)}{2}$$

Ce phénomène est appelé *phénomène de Gibbs* aux discontinuités.

2. Coefficients de Fourier

2.1 Définition des coefficients

DÉFINITION — COEFFICIENTS DE FOURIER

Soit f une fonction périodique de période T, de pulsation $\omega = 2\pi/T$. Les **coefficients de Fourier** de f sont définis par les formules intégrales suivantes, calculées sur une période complète :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t \qquad (n \geq 1)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t \qquad (n \geq 1)$$

L'intégrale peut être calculée sur n'importe quel intervalle de longueur T, par exemple $[-T/2, T/2]$.

2.2 Interprétation physique

PROPRIÉTÉ — SIGNIFICATION DE A_0

Le coefficient a_0 est la **valeur moyenne** du signal sur une période :

$$a_0 = \langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, \mathrm{d}t$$

En électricité, a_0 correspond à la composante **continue** (DC) du signal.

MINI-EXERCICE :

Un signal vaut $f(t) = 4$ sur $[0\,;\,T/2[$ et $f(t) = 0$ sur $[T/2\,;\,T[$. Calculer sa valeur moyenne a_0.

PROPRIÉTÉ — ORTHOGONALITÉ DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Les formules des coefficients reposent sur les propriétés d'orthogonalité suivantes, valables pour $m, n \geq 1$:

$$\int_0^T \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)\, \mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ T/2 & \text{si } m = n \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin(n\omega t)\sin(m\omega t)\, \mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ T/2 & \text{si } m = n \end{cases}$$

$$\int_0^T \cos(n\omega t)\sin(m\omega t)\, \mathrm{d}t = 0 \quad \text{pour tous } m, n$$

3. Développement en série de Fourier

3.1 Forme trigonométrique

DÉFINITION — SÉRIE DE FOURIER (FORME TRIGONOMÉTRIQUE)

Le **développement en série de Fourier** d'un signal f de période T et de pulsation $\omega = 2\pi/T$ est :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right]$$

- a_0 : composante continue (fondamental DC)
- $a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t)$: **fondamental** (1re harmonique, fréquence f)
- $a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$: **harmonique de rang** n (fréquence nf)

À retenir — La série de Fourier décompose un signal complexe en une somme infinie de sinusoïdes pures. Chaque sinusoïde a une fréquence multiple entier de la fréquence fondamentale. En pratique, on se limite aux premières harmoniques (les harmoniques élevées ont une amplitude faible).

4. Cas particuliers — Propriétés de symétrie

4.1 Signal pair

PROPRIÉTÉ — SIGNAL PAIR ($B_N = 0$)

Un signal est dit **pair** si $f(-t) = f(t)$ pour tout t. Dans ce cas :

- Tous les coefficients $b_n = 0$ (les sinus disparaissent)
- Le développement ne contient que des termes en **cosinus** :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t)$$

Les coefficients se calculent sur une demi-période :

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t$$

EXEMPLE — SIGNAL PAIR

Un signal **créneau symétrique** centré sur l'axe des ordonnées ($f(t) = +E$ sur $[-T/4, T/4]$ et $-E$ ailleurs) est **impair**. En revanche, un signal **triangulaire** centré est **pair** : son développement ne contient que des cosinus.

4.2 Signal impair

PROPRIÉTÉ — SIGNAL IMPAIR ($A_N = 0$)

Un signal est dit **impair** si $f(-t) = -f(t)$ pour tout t. Dans ce cas :

- $a_0 = 0$ (la valeur moyenne est nulle)
- Tous les coefficients $a_n = 0$
- Le développement ne contient que des termes en **sinus** :

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) \, dt$$

4.3 Symétrie demi-onde

PROPRIÉTÉ — SYMÉTRIE DEMI-ONDE (HARMONIQUES IMPAIRES SEULEMENT)

Un signal possède une **symétrie demi-onde** (ou anti-périodicité) si :

$$f\left(t + \frac{T}{2}\right) = -f(t) \quad \text{pour tout } t$$

Dans ce cas, **seules les harmoniques impaires** ($n = 1, 3, 5, \ldots$) sont présentes :

- $a_n = 0$ et $b_n = 0$ pour tout n pair
- Le spectre ne contient que les fréquences $f, 3f, 5f, 7f, \ldots$

EXEMPLE — SIGNAL CRÉNEAU SYMÉTRIQUE

Le signal créneau de valeur $+E$ sur $[0, T/2[$ et $-E$ sur $[T/2, T[$ vérifie $f(t + T/2) = -f(t)$. Il présente donc une symétrie demi-onde. Son développement ne contient que les harmoniques impaires $n = 1, 3, 5, \ldots$

Récapitulatif des symétries

Attention

Type de signal	Condition	Conséquence
Signal pair	$f(-t) = f(t)$	Tous les $b_n = 0$
Signal impair	$f(-t) = -f(t)$	Tous les $a_n = 0$, $a_0 = 0$
Symétrie demi-onde	$f(t + T/2) = -f(t)$	$a_n = b_n = 0$ pour n pair

ATTENTION — CUMUL DES SYMÉTRIES

Un signal peut cumuler plusieurs symétries. Par exemple, un signal créneau *impair* ET à symétrie demi-onde ne contient que des sinus aux harmoniques impaires, ce qui réduit encore le nombre de calculs.

5. Forme amplitude-phase

5.1 Passage à la forme amplitude-phase

PROPRIÉTÉ — FORME AMPLITUDE-PHASE

En utilisant la formule trigonométrique $A\cos\theta + B\sin\theta = C\cos(\theta + \varphi)$, on peut réécrire chaque harmonique sous la forme :

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

avec :

- $C_0 = a_0 \quad$ (composante continue)
- $C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad$ (amplitude de la n-ième harmonique)
- $\varphi_n = -\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \quad$ (phase initiale de la n-ième harmonique)

Attention au signe et au quadrant de φ_n : utiliser $\mathrm{atan2}(b_n, a_n)$ si nécessaire.

MÉTHODE — CONVERSION TRIGONOMÉTRIQUE → AMPLITUDE-PHASE

1. Calculer $C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$
2. Calculer φ_n :
   - Si $a_n > 0$: $\varphi_n = -\arctan(b_n/a_n)$
   - Si $a_n = 0$ et $b_n > 0$: $\varphi_n = -\pi/2$
   - Si $a_n = 0$ et $b_n < 0$: $\varphi_n = +\pi/2$
3. Vérifier : $C_n \cos(\varphi_n) = a_n$ et $-C_n \sin(\varphi_n) = b_n$

MINI-EXERCICE :

Une harmonique a pour coefficients $a_n = 3$ et $b_n = 4$. Calculer son amplitude C_n et sa phase φ_n.

6. Spectre de Fourier

6.1 Spectre d'amplitude

DÉFINITION — SPECTRE D'AMPLITUDE

Le **spectre d'amplitude** (ou spectre en fréquence) d'un signal est la représentation graphique de l'amplitude C_n de chaque harmonique en fonction de sa fréquence $n \cdot f$.

- L'axe horizontal représente les fréquences $0, f, 2f, 3f, \ldots$
- L'axe vertical représente l'amplitude C_n (en unités du signal : V, A, etc.)
- Chaque harmonique est représentée par une **raie verticale** (spectre discret)

DÉFINITION — SPECTRE DE PHASE

Le **spectre de phase** est la représentation graphique de la phase φ_n de chaque harmonique en fonction de sa fréquence.

À retenir — Lecture du spectre

- La raie en $f = 0$ correspond à la **composante continue** $C_0 = a_0$
- La raie en $f = f_1$ (fréquence fondamentale) correspond au **fondamental** C_1
- Les raies en $2f_1, 3f_1, \ldots$ sont les harmoniques
- L'amplitude des harmoniques **décroît généralement** en $1/n$ ou $1/n^2$ selon le type de signal

7. Exemples classiques — Calculs complets

7.1 Signal créneau (carré)

EXEMPLE COMPLET — SIGNAL CRÉNEAU SYMÉTRIQUE

Définition : On considère le signal créneau de période T, de pulsation $\omega = 2\pi/T$ et d'amplitude E :

$$f(t) = \begin{cases} +E & \text{si } 0 < t < T/2 \\ -E & \text{si } T/2 < t < T \end{cases}$$

Symétries : Le signal est **impair** (si on le centre) et possède une **symétrie demi-onde**. Donc : $a_0 = 0$, $a_n = 0$ pour tout n, et $b_n = 0$ pour n pair.

Calcul de a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\left[\int_0^{T/2} E\,\mathrm{d}t + \int_{T/2}^{T} (-E)\,\mathrm{d}t\right] = \frac{1}{T}\left[E \cdot \frac{T}{2} - E \cdot \frac{T}{2}\right] = 0$$

Calcul de b_n (harmoniques impaires seulement) :

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2}{T}\left[\int_0^{T/2} E\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t + \int_{T/2}^{T} (-E)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t\right]$$

$$= \frac{2E}{T}\left[\left[-\frac{\cos(n\omega t)}{n\omega}\right]_0^{T/2} + \left[\frac{\cos(n\omega t)}{n\omega}\right]_{T/2}^{T}\right]$$

$$= \frac{2E}{T} \cdot \frac{1}{n\omega}[-\cos(n\pi) + 1 + \cos(2n\pi) - \cos(n\pi)]$$

Comme $\omega T = 2\pi$, on a $\dfrac{2E}{T \cdot n\omega} = \dfrac{2E}{T \cdot n \cdot 2\pi/T} = \dfrac{E}{n\pi}$.

$$b_n = \frac{E}{n\pi}[1 - \cos(n\pi) + 1 - \cos(n\pi)] = \frac{2E}{n\pi}[1 - (-1)^n]$$

Pour n impair : $(-1)^n = -1$, donc $b_n = \dfrac{4E}{n\pi}$. Pour n pair : $(-1)^n = +1$, donc $b_n = 0$. ✓ (conforme à la symétrie demi-onde)

Série de Fourier du signal créneau :

$$f(t) = \frac{4E}{\pi}\left[\sin(\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega t) + \frac{1}{7}\sin(7\omega t) + \cdots\right]$$

$$f(t) = \frac{4E}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin(n\omega t)$$

7.2 Signal triangulaire

EXEMPLE COMPLET — SIGNAL TRIANGULAIRE

Définition : Signal triangulaire de période T, d'amplitude E, pair :

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{4E}{T}t & \text{si } 0 \leq t \leq T/4 \\ E - \dfrac{4E}{T}(t - T/4) & \text{si } T/4 \leq t \leq 3T/4 \\ -E + \dfrac{4E}{T}(t - 3T/4) & \text{si } 3T/4 \leq t \leq T \end{cases}$$

Symétries : Signal **pair** $\rightarrow b_n = 0$. Symétrie demi-onde $\rightarrow$ seules les harmoniques impaires sont présentes.

Calcul de a_n pour n impair : En exploitant la parité :

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t$$

Après deux intégrations par parties (on utilise $\int t\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{t\sin(n\omega t)}{n\omega} + \dfrac{\cos(n\omega t)}{n^2\omega^2}$) :

$$a_n = \frac{8E}{n^2\pi^2}(-1)^{(n-1)/2} \quad \text{pour } n \text{ impair}$$

Explicitement : $a_1 = \dfrac{8E}{\pi^2}$, $a_3 = -\dfrac{8E}{9\pi^2}$, $a_5 = \dfrac{8E}{25\pi^2}$, …

Série de Fourier du signal triangulaire :

$$f(t) = \frac{8E}{\pi^2}\left[\cos(\omega t) - \frac{1}{9}\cos(3\omega t) + \frac{1}{25}\cos(5\omega t) - \cdots\right]$$

$$f(t) = \frac{8E}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cos\big((2k+1)\omega t\big)$$

REMARQUE IMPORTANTE

Les amplitudes décroissent en $1/n^2$ pour le signal triangulaire (contre $1/n$ pour le créneau). Le signal triangulaire est donc plus "proche" d'une sinusoïde et ses harmoniques élevées sont très faibles. Cela s'explique par le fait qu'un signal triangulaire est **continu** (mais non dérivable), alors que le créneau est **discontinu**.

7.3 Signal en dents de scie

EXEMPLE COMPLET — SIGNAL EN DENTS DE SCIE

Définition : Signal en dents de scie de période T et d'amplitude E :

$$f(t) = \frac{E}{T}t \quad \text{pour } t \in [0, T[$$

Symétries : Ce signal n'est ni pair ni impair en général. Il n'y a pas de symétrie demi-onde si $E \neq 0$. On doit calculer tous les coefficients.

Calcul de a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{E}{T}t\,\mathrm{d}t = \frac{E}{T^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^T = \frac{E}{2}$$

Calcul de a_n :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T \frac{E}{T}t\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t$$

Intégration par parties avec $u = t$, $v' = \cos(n\omega t)$:

$$a_n = \frac{2E}{T^2}\left[\frac{t\sin(n\omega t)}{n\omega} + \frac{\cos(n\omega t)}{n^2\omega^2}\right]_0^T$$

Comme $\sin(n\omega T) = \sin(2n\pi) = 0$ et $\cos(n\omega T) = 1$:

$$a_n = \frac{2E}{T^2}\cdot\frac{T^2}{4\pi^2 n^2}(1-1) = 0$$

Calcul de b_n :

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T \frac{E}{T}t\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$$

Intégration par parties avec $u = t$, $v' = \sin(n\omega t)$:

$$b_n = \frac{2E}{T^2}\left[-\frac{t\cos(n\omega t)}{n\omega} + \frac{\sin(n\omega t)}{n^2\omega^2}\right]_0^T = \frac{2E}{T^2}\left(-\frac{T}{n\omega}\right) = -\frac{E}{n\pi}$$

Série de Fourier du signal en dents de scie :

$$f(t) = \frac{E}{2} - \frac{E}{\pi}\left[\sin(\omega t) + \frac{1}{2}\sin(2\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \cdots\right]$$

$$f(t) = \frac{E}{2} - \frac{E}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin(n\omega t)$$

Ce signal contient **toutes les harmoniques** (paires et impaires), avec des amplitudes décroissant en $1/n$.

8. Valeur efficace et théorème de Parseval

8.1 Valeur efficace d'un signal périodique

DÉFINITION — VALEUR EFFICACE (RMS)

La **valeur efficace** (Root Mean Square, RMS) d'un signal périodique $f(t)$ de période T est :

$$F_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [f(t)]^2\,\mathrm{d}t}$$

En électricité, la valeur efficace d'une tension ou d'un courant détermine la **puissance dissipée** dans une résistance.

8.2 Théorème de Parseval

PROPRIÉTÉ — THÉORÈME DE PARSEVAL

Si $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$, alors :

$$\frac{1}{T}\int_0^T [f(t)]^2 \,\mathrm{d}t = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2) = C_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} C_n^2$$

La valeur efficace est donc :

$$F_{\text{eff}}^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2) = C_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{C_n}{\sqrt{2}}\right)^2$$

soit :

$$\boxed{F_{\text{eff}} = \sqrt{C_0^2 + \frac{C_1^2}{2} + \frac{C_2^2}{2} + \frac{C_3^2}{2} + \cdots}}$$

À retenir — Interprétation de Parseval

La *puissance totale* d'un signal est égale à la *somme des puissances de chaque harmonique*. On peut donc calculer la valeur efficace sans intégrer f^2, à condition de connaître tous les coefficients de Fourier.

MINI-EXERCICE :

Une tension a pour composante continue $C_0 = 0$, un fondamental $C_1 = 12$ V et une 3e harmonique $C_3 = 5$ V (autres harmoniques négligées). Calculer sa valeur efficace U_{eff} par le théorème de Parseval.

APPLICATION — VALEUR EFFICACE DU SIGNAL CRÉNEAU

Pour le signal créneau de valeur $\pm E$ (valeur efficace directement E par définition), Parseval donne :

$$E^2 = \frac{1}{T}\int_0^T E^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sum_{n\text{ impair}}\left(\frac{4E}{n\pi}\right)^2 = \frac{8E^2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

On retrouve ainsi la célèbre identité de Leibniz-Euler :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

APPLICATION NUMÉRIQUE — COURANT NON SINUSOÏDAL

Un courant de chauffage électrique a les harmoniques suivantes :

Harmonique n	**Amplitude C_n (A)**	$C_n/\sqrt{2}$ (A)	$(C_n/\sqrt{2})^2$ (A^2)
0 (DC)	$C_0 = 0$	—	0
1 (fondamental)	$C_1 = 10$	7,07	50
3	$C_3 = 3{,}33$	2,36	5,55
5	$C_5 = 2$	1,41	2
7	$C_7 = 1{,}43$	1,01	1,02

$$I_{\text{eff}}^2 = 0 + 50 + 5{,}55 + 2 + 1{,}02 + \cdots \approx 58{,}57\ \text{A}^2$$

$$I_{\text{eff}} \approx 7{,}65\ \text{A}$$

La valeur efficace **réelle** est supérieure à la valeur efficace du seul fondamental ($10/\sqrt{2} \approx 7{,}07$ A) à cause des harmoniques.

9. Application BTS — Harmoniques dans les réseaux électriques

Perturbations harmoniques dans un bâtiment tertiaire

Un technicien FED (Fluides, Énergie, Domotique) intervient dans un immeuble de bureaux dont le réseau BT présente des problèmes de **surtensions** et d'**échauffements anormaux** des câbles neutres. Une mesure à l'analyseur de réseau révèle un taux de distorsion harmonique (THD) de 28% sur le courant.

9.1 Taux de distorsion harmonique (THD)

DÉFINITION — TAUX DE DISTORSION HARMONIQUE (THD)

Le **taux de distorsion harmonique** mesure la proportion des harmoniques par rapport au fondamental. Il est défini par :

$$\mathrm{THD} = \frac{\sqrt{C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \cdots}}{C_1} = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{+\infty} C_n^2}}{C_1}$$

Il s'exprime en pourcentage. Les normes imposent généralement $\mathrm{THD} < 5\%$ pour le réseau de distribution.

9.2 Sources d'harmoniques dans les bâtiments

PROPRIÉTÉ — HARMONIQUES CARACTÉRISTIQUES DES ÉQUIPEMENTS

Les équipements non linéaires injectent des harmoniques spécifiques dans le réseau :

Équipement	Harmoniques dominants	Effet
Redresseur monophasé (PC, alimentation)	3e, 5e, 7e (impairs)	Surcharge du neutre
Redresseur triphasé à 6 impulsions (variateur)	5e, 7e, 11e, 13e	Échauffement moteurs
Onduleur (UPS, variateur)	Multiples de la fréquence de découpage	Bruit CEM
Éclairage fluorescent (ballast électronique)	3e, 5e, 7e	Surcharge neutre
Four à induction	Larges bandes	Perturbations HF

MÉTHODE — CALCUL DU THD ET DIAGNOSTIC

Un analyseur mesure sur le réseau d'un bâtiment tertiaire les composantes du courant :

Rang n	Fréquence (Hz)	Amplitude C_n (A)
1 (fondamental)	50	40
3	150	12
5	250	8
7	350	5
9	450	2

Calcul du THD :

$$\text{THD} = \frac{\sqrt{12^2 + 8^2 + 5^2 + 2^2}}{40} = \frac{\sqrt{144 + 64 + 25 + 4}}{40} = \frac{\sqrt{237}}{40} \approx \frac{15{,}39}{40} \approx 38{,}5\,\%$$

Valeur efficace réelle (par Parseval) :

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{40^2 + 12^2 + 8^2 + 5^2 + 2^2}{2}} = \sqrt{\frac{1600 + 144 + 64 + 25 + 4}{2}} = \sqrt{\frac{1837}{2}} \approx 30{,}3 \text{ A}$$

Diagnostic : THD $\approx$ 38,5% est très supérieur à la limite de 5% de la norme EN 50160. Il faut installer des **filtres actifs** ou des **filtres passifs accordés** sur les rangs 3, 5 et 7.

9.3 Conséquences pratiques

ATTENTION — EFFETS DES HARMONIQUES

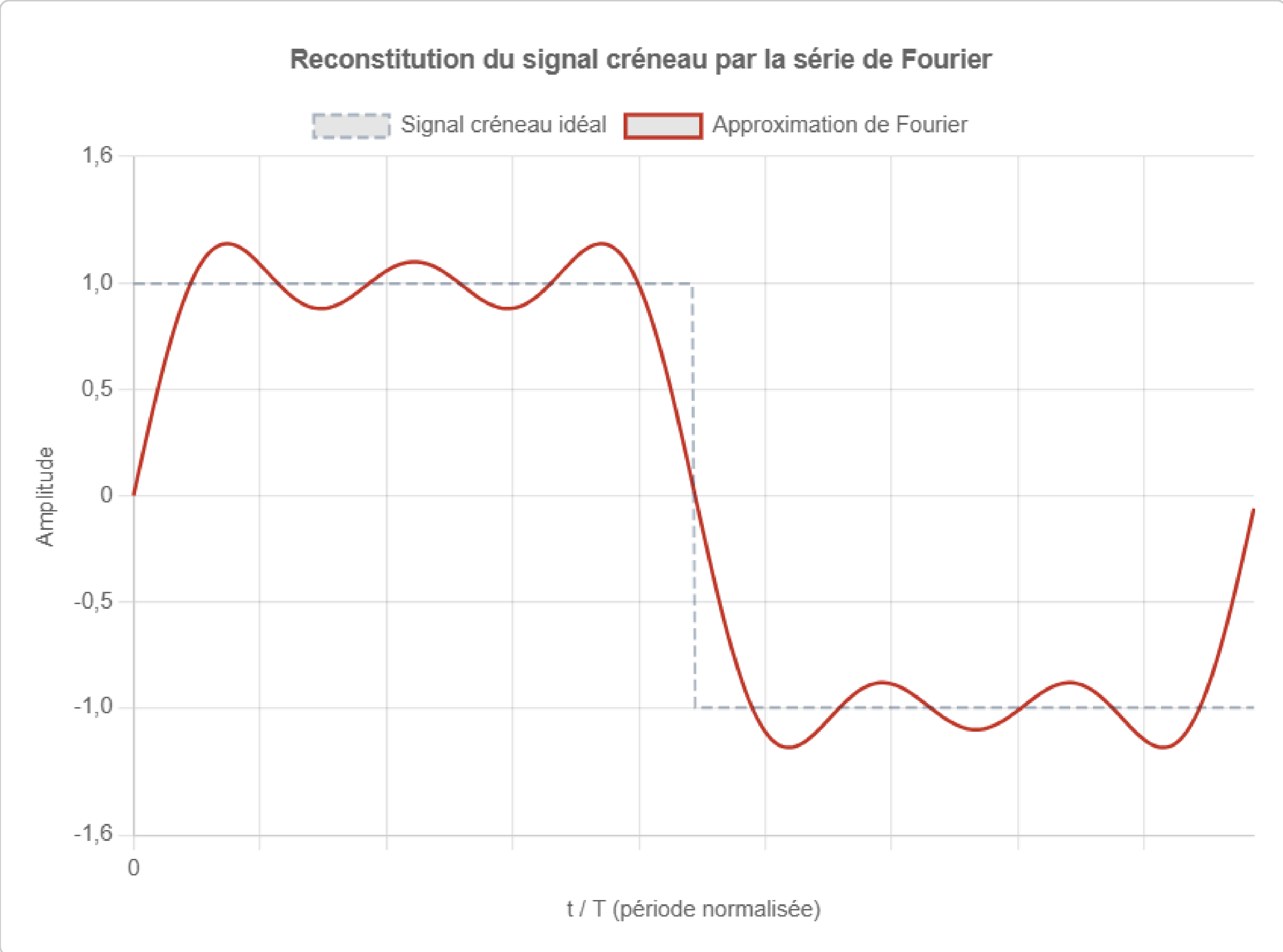
Les harmoniques dans un réseau électrique provoquent :

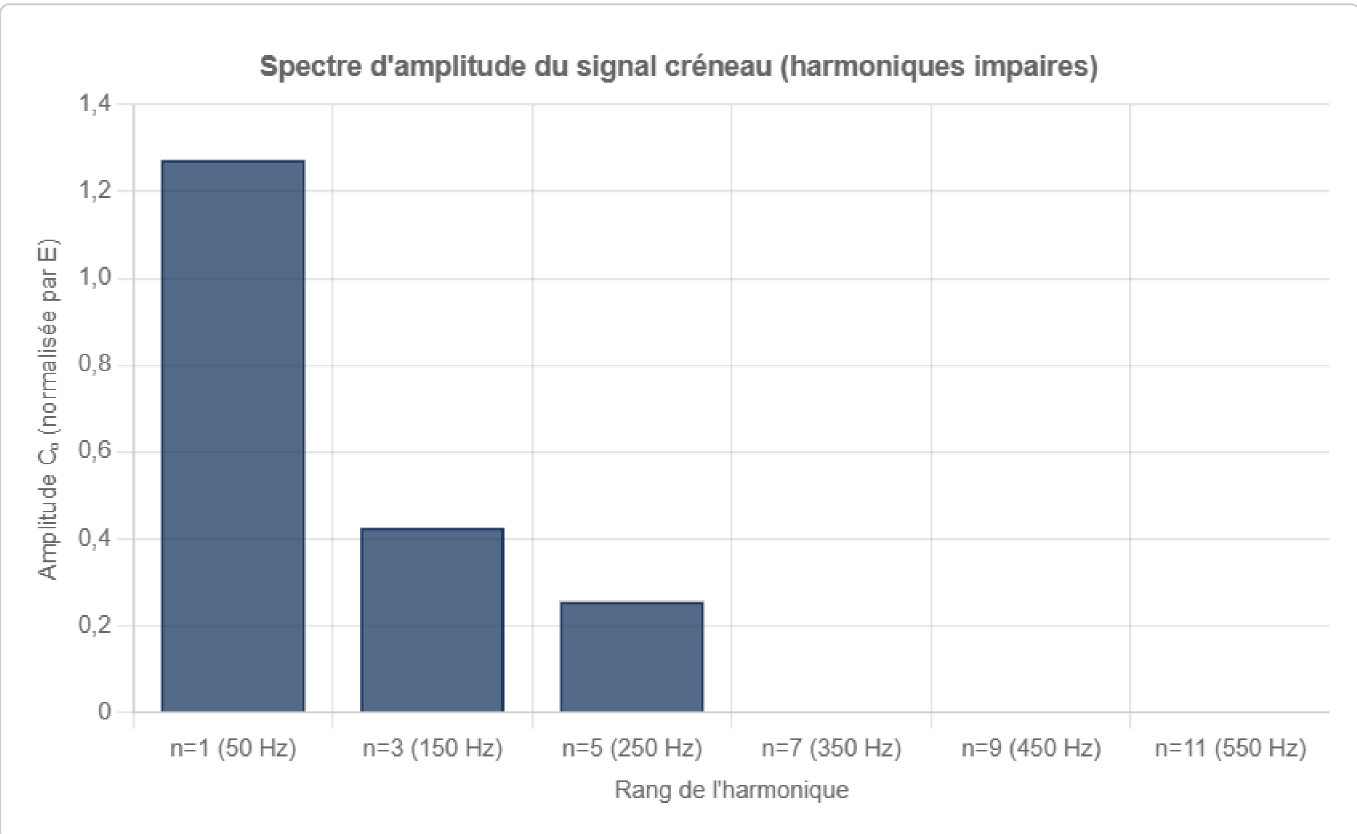
- **Surcharge du conducteur neutre** : les harmoniques de rang 3 (et multiples de 3) des 3 phases s'additionnent dans le neutre au lieu de se compenser. Le courant neutre peut dépasser le courant de phase.
- **Échauffement des câbles et transformateurs** : les harmoniques augmentent la valeur efficace du courant et donc les pertes par effet Joule $P = R \cdot I_{\text{eff}}^2$.
- **Faux déclenchements de disjoncteurs différentiels** et de protections magnétothermiques
- **Perturbations des systèmes de mesure** : un voltmètre ou ampèremètre classique ne mesure que le fondamental
- **Résonance** avec les condensateurs de compensation de puissance réactive

10. Visualisation — Approximation d'un signal créneau par ses harmoniques

Le graphique interactif ci-dessous montre comment la somme des premières harmoniques de Fourier reconstitue progressivement le signal créneau. Sélectionnez le nombre d'harmoniques pour observer la convergence.

Nombre d'harmoniques affichées : 3 (rangs 1, 3, 5)


Reconstitution du signal créneau par la série de Fourier
Signal créneau idéal
Approximation de Fourier
1,6
1,0
0,5
0
-0,5
-1,0
-1,6
Amplitude
0
t / T (période normalisée)


Spectre d'amplitude du signal créneau (harmoniques impaires)
1,4
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
Amplitude C_n (normalisée par E)
n=1 (50 Hz)
n=3 (150 Hz)
n=5 (250 Hz)
n=7 (350 Hz)
n=9 (450 Hz)
n=11 (550 Hz)
Rang de l'harmonique

Graphique du haut : signal créneau idéal (pointillés) et approximation par les harmoniques (trait plein). Graphique du bas : spectre d'amplitude correspondant.

11. Récapitulatif — Formulaire de synthèse

Formulaire complet — Séries de Fourier

Signal périodique de période T, fréquence $f = 1/T$, pulsation $\omega = 2\pi f$

Coefficients :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$$

Développement trigonométrique :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\right]$$

Forme amplitude-phase :

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n\cos(n\omega t + \varphi_n) \quad \text{avec} \quad C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\,, \quad \varphi_n = -\arctan\frac{b_n}{a_n}$$

Valeur efficace (Parseval) :

$$F_{\text{eff}} = \sqrt{a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2)} = \sqrt{C_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} C_n^2}$$

Taux de distorsion harmonique :

$$\text{THD} = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{+\infty} C_n^2}}{C_1} \times 100\,\%$$

Signal	Série de Fourier	Décroissance
Créneau $\pm E$	$\frac{4E}{\pi}\sum_{n\text{ imp.}}\frac{\sin(n\omega t)}{n}$	$1/n$
Triangulaire amplitude E	$\frac{8E}{\pi^2}\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k\cos((2k+1)\omega t)}{(2k+1)^2}$	$1/n^2$
Dents de scie amplitude E	$\frac{E}{2} - \frac{E}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(n\omega t)}{n}$	$1/n$

06

MATHÉMATIQUES

Séries de Fourier

BTS | Mathématiques | Durée : 40 min | /20

Nom : _____ **Prénom :** _____ **Date :** _____

Exercice 1 — Signal périodique : période, fréquence, pulsation (3 pts)

Un signal de tension est périodique de période $T = 4$ ms.

a. Calculer la fréquence fondamentale f (en Hz). *(1 pt)*
b. Calculer la pulsation fondamentale ω (en rad/s). *(1 pt)*
c. Donner la fréquence de la 3^{e} harmonique. *(1 pt)*

Exercice 2 — Symétries et nature des harmoniques (3 pts)

Pour chacun des signaux suivants, indiquer quels coefficients de Fourier sont nuls et justifier brièvement.

a. Un signal pair ($f(-t) = f(t)$). *(1 pt)*
b. Un signal impair ($f(-t) = -f(t)$). *(1 pt)*
c. Un signal à symétrie demi-onde ($f(t + T/2) = -f(t)$). *(1 pt)*

Exercice 3 — Valeur moyenne a_0 (4 pts)

Un signal vaut $f(t) = 6$ sur $[0\,;\, T/2[$ et $f(t) = 0$ sur $[T/2\,;\, T[$.

a. Rappeler la formule donnant a_0. *(1 pt)*
b. Calculer a_0 par l'intégrale. *(2 pts)*
c. Interpréter physiquement a_0 (composante continue). *(1 pt)*

Exercice 4 — Amplitude et phase d'une harmonique (4 pts)

Une harmonique a pour coefficients de Fourier $a_n = 6$ et $b_n = 8$.

a. Calculer l'amplitude $C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$. *(2 pts)*
b. Calculer la phase $\varphi_n = -\arctan(b_n/a_n)$ en degrés. *(2 pts)*

Exercice 5 — Valeur efficace par le théorème de Parseval (6 pts)

Un courant non sinusoïdal possède une composante continue $C_0 = 0$, un fondamental d'amplitude $C_1 = 8$ A et une 3^{e} harmonique d'amplitude $C_3 = 6$ A (autres harmoniques négligées).

a. Énoncer le théorème de Parseval pour la valeur efficace. *(1 pt)*
b. Calculer la valeur efficace I_{eff} du courant. *(3 pts)*
c. Comparer à la valeur efficace du seul fondamental $C_1/\sqrt{2}$. Conclure. *(2 pts)*