Lois de probabilités discrètes - L'essentiel du cours

1) Loi uniforme discrète

DÉFINITION

Dire qu'une variable aléatoire X suit la loi uniforme discrète sur $\{1; 2; \ldots; n\}$ signifie que X prend ses valeurs de façon **équiprobable** dans $\{1; 2; \ldots; n\}$.

► *Exemple :* Si on lance un dé à 6 faces non truqué et si on note X le numéro de la face obtenue, X suit la loi uniforme discrète sur $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

PROPRIÉTÉ

Si X suit la loi uniforme discrète sur $\{1; 2; \ldots; n\}$ alors $p(X = k) = \dfrac{1}{n}$ pour tout entier k compris entre 1 et n.

2) Rappels sur les probabilités conditionnelles

DÉFINITION

Étant donné deux événements A et B ($B \neq \varnothing$) d'un univers Ω, on appelle probabilité de B sachant A, le réel noté $p_A(B)$ tel que $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$

PROPRIÉTÉS

Pour tous événements non vides A et B :
- $0 \leqslant p_A(B) \leqslant 1$; $\quad p_A\left(\overline{B}\right) = 1 - p_A(B)$
- Dans le cas de l'équiprobabilité, $p_A(B) = \dfrac{\text{nb de cas favorables pour A} \cap \text{B}}{\text{nb de cas favorables pour A}}$
- $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = p(B) \times p_B(A)$

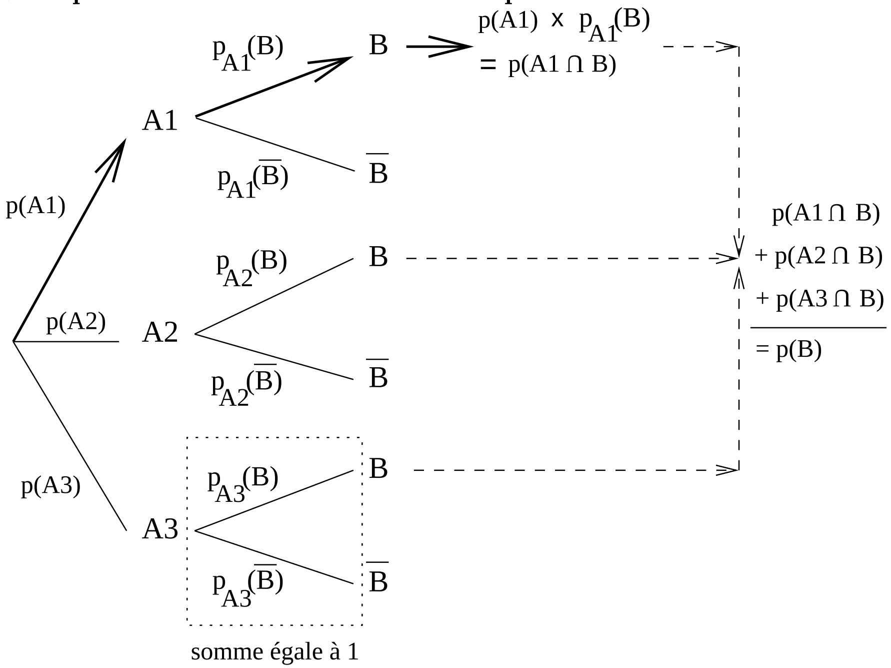
PROPRIÉTÉ

Formule des probabilités totales

Si $A_1, A_2, \cdots, A_n$ sont des événements non vides deux à deux incompatibles et dont l'union est égale à Ω (on dit alors qu'ils forment une partition de l'univers) alors pour tout événement B :

$p(B) = p(A_1 \cap B) + \cdots + p(A_n \cap B) = p(A_1) \times p_{A_1}(B) + \cdots + p(A_n) \times p_{A_n}(B)$

► **Représentation à l'aide d'un arbre pondéré**



► **Règles de construction et d'utilisation des arbres pondérés :**
- Sur les premières branches, on inscrit les $p(A_i)$.
- Sur les branches du type $A_i \longrightarrow B$, on inscrit $p_{A_i}(B)$.
- Le produit des probabilités inscrites sur chaque branche d'un chemin donne la probabilité de l'intersection des événements placés sur ce chemin.
- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 (loi des nœuds).
- La probabilité d'un événement E est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à E.

DÉFINITION

- Deux événements A et B sont dits indépendants si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.
- Ce qui revient à dire que $p_A(B) = p(B)$ ou $p_B(A) = p(A)$

3) Loi binomiale

Définition

• On appelle **épreuve de Bernoulli** toute expérience aléatoire ne présentant que deux issues possibles (contraires l'une de l'autre).
• On appelle **schéma de Bernoulli** toute répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

► *Exemple :* Lancer un dé avec pour issues contraires « obtenir un 6 » et « ne pas obtenir un 6 » est une *épreuve* de Bernoulli. Lancer notre dé 10 fois est un *schéma* de Bernoulli (on répète l'épreuve de Bernoulli) .
Par contre, si on s'intéresse ensemble aux six événements « obtenir le chiffre n » ($1 \leqslant n \leqslant 6$), ce n'est plus une épreuve de Bernoulli.

► **Remarques :**
• Les deux issues contraires d'une *épreuve* de Bernoulli se note en général S (pour « succès ») et $\overline{S}$. La probabilité que S soit réalisé est noté en général p (la probabilité de $\overline{S}$ est alors $(1-p)$).

Propriétés

Étant donné une épreuve de Bernoulli où la probabilité d'obtenir un succès S est p et le schéma de Bernoulli consistant à répéter n fois de manière indépendante cette épreuve. Si note X la variable aléatoire qui à chaque issue possible du schéma de Bernoulli associe le nombre de fois où est apparu un succès S, la loi de probabilité de X est appelée **loi binomiale** de paramètres n et p et est notée $\mathcal{B}(n,p)$.
• **Probabilité de n'obtenir que des succès** : $p(X=n)=p^n$
• **Probabilité de n'obtenir aucun succès** : $p(X=0)=(1-p)^n$
• **Probabilité d'obtenir k succès** : $p(X=k)=\binom{n}{k}\,p^k\,(1-p)^{n-k}$
(k entier tel que : $0 \leqslant k \leqslant n$)
• **Probabilité d'obtenir au moins un succès**=1-(probabilité de n'obtenir aucun succès)
• **Espérance de X** : $E(X)=np$
• **Variance de X** : $V(X)=np(1-p)$
• **Écart-type de X** : $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$

Obtention du coefficient binomial $\binom{n}{k}$ à la calculatrice :

CASIO : n `OPTN` `PROB` `nCr` k ; TI : n `MATH` `PROB` `3:Combinaison` k

► *Exemple :*
Si on lance 7 fois de suite un dé et si on note X le nombre de 6 obtenus, on répète 7 fois l'épreuve de Bernoulli : « obtenir un 6 (probabilité : $\frac{1}{6}$) - ne pas obtenir un 6 ».
X suit donc la loi binomiale de paramètres $n=7$ et $p=\frac{1}{6}$.
La probabilité d'obtenir exactement trois fois un « 6 » est égale à : $\binom{7}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^4$
.
La probabilité de n'obtenir que des « 6 » est égale à : $\left(\frac{1}{6}\right)^7$
La probabilité de n'obtenir aucun « 6 » est égale à : $\left(\frac{5}{6}\right)^7$
L'espérance de X (nombre moyen de « 6 » que l'on peut espérer obtenir en répétant un grand nombre de fois l'expérience aléatoire) est égale à $np=\frac{7}{6}$.

4) Loi géométrique

Définition

Si on répète de façon identique et indépendante une épreuve de Bernoulli dont la probabilité du « succès » est p et si on note X le nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le premier succès, on dit que X suit la loi géométrique de paramètre p.

► *Exemple :* Si on lance un dé à 6 faces jusqu'à ce que le « 6 » apparaisse pour la première fois et si on note x le nombre de lancers nécessaires pour cela, X suit la loi géométrique de paramètre $p=\frac{1}{6}$.

Propriétés

Si X suit la loi géométrique de paramètre p alors :
• $p\,(X=k)=p\,(1-p)^{k-1}$ *(probabilité qu'il faille k répétitions pour obtenir le premier succès)*
•$p\,(X>k)=(1-p)^k$ *(probabilité qu'il faille plus de k répétitions pour obtenir le premier succès)*
• La probabilité d'attendre plus de k répétitions pour obtenir un premier succès est la même qu'on parte de la 1re épreuve ou de n'importe quelle autre. *(loi sans mémoire)*
• L'espérance de X est égale à $\frac{1}{p}$ *(nombre moyen de répétitions nécessaires pour obtenir le premier succès)*

Lois de probabilités discrètes

▶ Exercice n°1
Une boite contient 5 jetons portant le numéro 1, 5 jetons portant le numéro 2 et 5 jetons portant le numéro 3. On tire au hasard un jeton dans la boite et on note X le numéro du jeton tiré.
X suit-il une loi uniforme discrète ?

▶ Exercice n°2
On lance un dé cubique à 6 faces. On gagne 1 euro si on tombe sur une face paire et 2 euros si on tombe sur une face impaire. On note X le gain.
X suit-il une loi uniforme discrète ?

▶ Exercice n°3
Une variable aléatoire admet la loi de probabilité suivante dont il manque une case :

x_i	1	2	3
p_i	0,3	0,3	

X peut-elle suivre une loi uniforme discrète ?

▶ Exercice n°4
On lance deux dés à 6 faces et on note X la variable aléatoire égale au plus grand des nombres obtenus.
X suit-elle une loi uniforme discrète ?

▶ Exercice n°5
En France, la proportion de daltoniens est de 8% parmi les hommes et de 0,4% parmi les femmes. Sachant qu'il y a 52% de femmes en France, déterminer la probabilité qu'une personne daltonienne soit une femme.

▶ Exercice n°6
On lance cinq fois de suite de façon indépendante une pièce de monnaie et on note X la variable aléatoire donnant le nombre de « face » obtenu.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Calculer la probabilité d'obtenir exactement trois fois « face ».
3. Calculer la probabilité de n'obtenir aucune fois « face ».
4. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois « face ».

▶ Exercice n°7
On lance six fois de suite un dé et on s'intéresse uniquement au fait d'obtenir « 5 ou 6 » ou « ni 5, ni 6 ». On note X la variable aléatoire donnant le nombre de fois où on obtient « 5 ou 6 ».

1. X suit-elle une loi binomiale ? Si oui, en donner les paramètres.
2. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux fois « 5 ou 6 ».

▶ Exercice n°8
Une urne contient des jetons noirs et des jetons blancs. Le nombre de jetons noirs est le triple du nombre de jetons blancs.

1. On tire au hasard un jeton. Quelle est la probabilité que ce jeton soit noir ?
2. On tire à présent 4 jetons successivement avec remise et on note X la variable aléatoire donnant le nombre de jetons noirs obtenu.
   a) X suit-elle une loi binomiale ? Si oui, en donner les paramètres.
   b) Calculer la probabilité d'obtenir exactement 2 jetons noirs ?
   c) Calculer la probabilité d'obtenir exactement 2 ou 3 jetons noirs ?
   d) Quelle est l'espérance de X ? Que représente ce nombre ?

▶ Exercice n°9
Dans une fabrication d'objets en série, 8 % de ces objets présentent un défaut. Un carton contient 10 objets. La présence d'un défaut pour un objet est indépendante de l'objet choisi.

1. Calculer la probabilité que, dans le carton, les dix objets soient sans défaut.
2. Calculer la probabilité que, dans le carton, au moins 8 objets soient sans défaut.

▶ Exercice n°10
La probabilité qu'une machine tombe en panne un jour, indépendamment du jour, est de 0,05.

1. Calculer la probabilité qu'en cinq jours, la machine ne tombe pas en panne.
2. Calculer la probabilité qu'en cinq jours, la machine ne tombe pas en panne plus d'une journée.

▶ Exercice n°11
Un vendeur est chargé de démarcher des clients au téléphone. Il téléphone à 10 personnes par jour. On admet que la probabilité qu'une personne passe commande est de $\frac{1}{15}$ et que les décisions des personnes contactées sont indépendantes. X est le nombre de personnes qui passent commande en une journée.

1. Exprimer $p(X = k)$ en fonction de k (pour k entier compris entre 0 et 10).
2. Calculer l'espérance de X.
3. Le vendeur gagne 100 euros par commande passée. Quel gain moyen le vendeur peut-il espérer ?

▶ **Exercice n°12**

Vous jouez avec un ami de même force que vous à un jeu. Les résultats de deux parties sont indépendants.
Qu'est-ce qui est le plus probable :

- « gagner deux parties sur quatre »
- « gagner quatre parties sur huit »

▶ **Exercice n°13**

On s'intéresse au nombre d'enfants d'une famille. On suppose qu'il n'y a pas de naissances multiples et qu'il y a équiprobabilité pour la naissance d'un garçon ou d'une fille.

Partie A

On suppose que la famille a eu 4 enfants et on note X le nombre de filles.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que la famille ait eu au moins une fille.

Partie B

On cherche à déterminer le nombre minimum d'enfants que la famille devrait avoir pour que la probabilité d'avoir au moins une fille soit supérieure à 0.99 .

1. On note n le nombre d'enfants. Déterminer, en fonction de n, la probabilité d'avoir au moins une fille.
2. Montrer que répondre au problème posé revient à déterminer le premier entier n tel que $0.5^n \leqslant 0.01$.
3. Compléter le script python ci-dessous pour qu'il permette de déterminer cet entier.

```
n=1
while 0.5**n ... 0.01 :
  n=n+1
print(n)
```

▶ Note : Il est possible d'exécuter des scripts python depuis un navigateur sans aucune installation, ni inscription, ni connexion préalable à l'adresse suivante :
`https://www.xm1math.net/SNT/python_en_ligne.html`

▶ **Exercice n°14**

On note X le nombre cartes qu'il faut tirer avec remise dans un jeu de 32 cartes pour avoir un premier As.

1. Justifier que X suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.
2. Calculer la probabilité qu'il faille tirer **exactement 6 cartes** pour avoir un premier As.
3. Calculer la probabilité qu'il faille tirer **plus de 6 cartes** pour avoir un premier As.
4. Calculer la probabilité qu'il faille tirer **au plus 6 cartes** pour avoir un premier As.

▶ **Exercice n°15**

Sur le trajet d'un automobiliste se trouvent 10 feux tricolores numérotés de 1 à 10. On suppose que la probabilité qu'un feu soit rouge ou orange lorsqu'il se présente est égale à 0,6 et que les feux sont indépendants les uns des autres.
On note X le numéro du premier feu rouge et orange rencontré par l'automobiliste.

1. Justifier que X suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.
2. Quelle est la probabilité que les 4 premiers feux rencontrés soient verts.

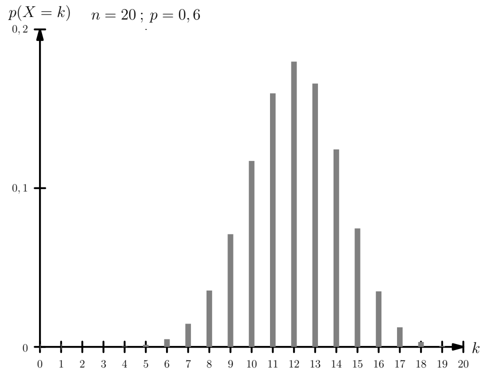
▶ **Exercice n°16**

Le maire d'une grande ville affirme que 60% des habitants lui font confiance.

Partie A

Si on choisissait 20 habitants (en admettant que cela revienne à un effectuer un tirage au hasard indépendant) et si on notait X le nombre d'habitants sur les 20 qui font confiance au maire **en supposant que le maire ait raison**, X suivrait alors la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}6$.

1. Calculer alors ce que serait la probabilité que 0 habitant sur les 20 interrogés fassent confiance au maire.
2. Calculer alors ce que serait la probabilité qu'au plus 1 habitant sur les 20 interrogés fassent confiance au maire.
3. Le calcul complet de ce que serait la probabilité qu'au plus k habitants sur les 20 fassent confiance au maire donne les résultats suivants :



k	$p(X \leqslant k)$ (probabilité qu'au plus k électeurs sur 20 fassent confiance au maire)
0	1.0995116e-8
1	3.408486e-7
2	0.0000050412608
3	0.000047344971
4	0.00031703112
5	0.0016115246
6	0.0064658754
7	0.021028927
8	0.056526367
9	0.12752125
10	0.2446628
11	0.40440127
12	0.58410706
13	0.74998933
14	0.87440103
15	0.94904805
16	0.98403884
17	0.99638853
18	0.99947595
19	0.99996344
20	1

On cherche à déduire du tableau deux nombres a et b pour que, si le maire avait raison, il y ait 95% de chance théoriquement que le nombre d'habitants faisant confiance au maire sur un échantillon de 20 soit compris entre a et b.
Pour cela :

a) Déterminer dans le tableau le plus petit entier a tel que $p(X \leqslant a) > 0{,}025$ (on élimine les premiers 2,5%).

b) Déterminer dans le tableau le plus petit entier b tel que $p(X \leqslant a) \geqslant 0{,}975$ (on élimine les derniers 2,5%).

Conclusion : si le maire avait raison, il y aurait théoriquement 95% de chance que, sur 20 habitants interrogés, le nombre de ceux qui lui font confiance soit compris entre ... et ....

Partie B

Un journaliste cherche à vérifier l'affirmation du maire et interroge 20 habitants au hasard. 7 d'entre aux disent faire confiance au maire.
Ce résultat valide-t-il l'affirmation du maire ?

Lois de probabilités discrètes

▶ Exercice n°1
On a

x_i	1	2	3
p_i	1/3	1/3	1/3

Donc X suit une loi uniforme discrète sur $\{1; 2; 3\}$.

▶ Exercice n°2
On a

x_i	1	2
p_i	0,5	0,5

Donc X suit une loi uniforme discrète sur $\{1; 2\}$.

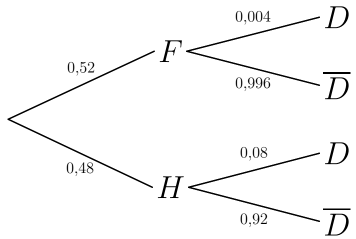
▶ Exercice n°3
La loi de probabilité complète est :

x_i	1	2	3
p_i	0,3	0,3	0,4

Il n'y a pas équiprobabilité donc X ne suit pas une loi uniforme discrète.

▶ Exercice n°4
On aurait $p(X = 1) = 1/36$ (seul cas favorable sur les 36 cas possibles : les deux dés donnent 1), mais par exemple $p(X = 2) = 3/36$ (1^er^ dé à 1 et 2^e^ dé à 2 ; 1^er^ dé à 2 et 2^e^ dé à 1 ; les 2 dés à 2 : 3 cas favorables).
Il n'y a pas équiprobabilité donc X ne suit pas une loi uniforme discrète.

▶ Exercice n°5
Arbre pondéré correspondant à la situation :



Probabilité demandée : $p_D(F) = \dfrac{p(F \cap D)}{p(D)} = \dfrac{0{,}52 \times 0{,}004}{0{,}52 \times 0{,}004 + 0{,}48 \times 0{,}08} \approx 0{,}05$

▶ Exercice n°6

1. Cela revient à répéter 5 fois de façon identique et indépendante l'épreuve de Bernoulli « face » $(p = 0{,}5)$; « pile » $(1-p = 0{,}5)$. Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0{,}5$.
2. $p(X = 3) = \binom{5}{3} \times 0{,}5^3 \times 0{,}5^2 = 0{,}3125$
3. $p(X = 0) = (0{,}5)^5 = 0{,}03125$
4. $1 - p(X = 0) = 1 - 0{,}03125 = 0{,}96875$

▶ Exercice n°7

1. Cela revient à répéter 6 fois de façon identique et indépendante l'épreuve de Bernoulli « 5 ou 6 » $(p = 1/3)$; « ni 5, ni 6 » $(1 - p = 2/3)$. Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 1/3$.
2. $p(X = 2) = \binom{6}{2} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^4 \approx 0{,}329$

▶ Exercice n°8
Une urne contient des jetons noirs et des jetons blancs. Le nombre de jetons noirs est le triple du nombre de jetons blancs.

1. $\dfrac{3}{4}$
2. a) Cela revient à répéter 4 fois de façon identique et indépendante l'épreuve de Bernoulli « noir » $(p = 3/4)$; « blanc » $(1 - p = 1/4)$. Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 3/4$.

   b) $p(X = 2) = \binom{4}{2} \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 \approx 0{,}2109$

   c) $p(X = 2) + p(X = 3) \approx 0{,}2109 + \binom{4}{3} \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^3 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^1 \approx 0{,}6328$

   d) $E(X) = n \times p = 4 \times \dfrac{3}{4} = 3$. Cela représente le nombre moyen de jetons noirs que l'on peut espérer si on répète le tirage de 4 jetons un grand nombre de fois.

▶ Exercice n°9

1. Si on note X le nombre d'objets sans défaut, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}92$.
   Probabilité que les dix objets soient sans défaut $= p(X = 10) = 0{,}92^{10} \approx 0{,}4344$.

2. Probabilité qu'au moins 8 objets soient sans défaut $= p(X=8)+p(X=9)+p(X=10) = \binom{10}{8} \times 0{,}92^8 \times 0{,}08^2 + \binom{10}{9} \times 0{,}92^9 \times 0{,}08^1 + 0{,}92^{10} \approx 0{,}9599$

▶ Exercice n°10

1. Si on note X le nombre de jours avec panne, X suit la loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0{,}95$.
   Probabilité qu'en cinq jours, la machine ne tombe pas en panne $= p(X=0) = 0{,}95^{10} \approx 0{,}7738$.
2. Probabilité qu'en cinq jours, la machine ne tombe pas en panne plus d'une journée $= p(X=0)+p(X=1) = 0{,}95^{10} + \binom{5}{1} \times 0{,}05^1 \times 0{,}95^4 \approx 0{,}9774$.

▶ Exercice n°11

1. X suit la loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=\frac{1}{15}$.
   $p(X=k) = \binom{10}{k} \times \left(\frac{1}{15}\right)^k \times \left(\frac{14}{15}\right)^{10-k}$.
2. $E(X) = n \times p = 10 \times \frac{1}{15} \approx 0{,}667$.
3. Gain moyen $\approx 100 \times 0{,}667 \approx 66{,}7$

▶ Exercice n°12

Notons X le nombre de parties que l'on gagne.

- 1er cas : X suit la loi binomiale de paramètres $n=4$ et $p=0{,}5$.
  Probabilité de « gagner deux parties sur quatre » $= p(X=2) = \binom{4}{2} \times 0{,}5^2 \times 0{,}5^2 = 0{,}375$
- 2e cas : X suit la loi binomiale de paramètres $n=8$ et $p=0{,}5$.
  Probabilité de« gagner quatre parties sur huit » $= p(X=4) = \binom{8}{4} \times 0{,}5^4 \times 0{,}5^4 \approx 0{,}273$

Le 1er cas est le plus probable.

▶ Exercice n°13

Partie A

1. Cela revient à répéter 4 fois de façon identique et indépendante l'épreuve de Bernoulli « fille » $(p=0{,}5)$; « garçon » $(1-p=0{,}5)$. Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n=4$ et $p=0{,}5$.
2. $1-p(X=0) = 1-0{,}5^4 = 0{,}9375$

Partie B

1. $1-p(X=0) = 1-0{,}5^n$
2. $1-0{,}5^n \geqslant 0{,}99 \Leftrightarrow 1-0{,}99 \geqslant 0{,}5^n \Leftrightarrow 0{,}5^n \leqslant 0{,}01$.
3. Compléter le script python ci-dessous pour qu'il permette de déterminer cet entier.

```
n=1
while 0.5**n > 0.01 :
  n=n+1
print(n)
```

▶ Exercice n°14

1. Cela revient à répéter une épreuve de Bernoulli et X représente le nombre d'épreuves à répéter pour avoir le premier succès, donc X suit la loi géométrique de paramètre $p=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$.
2. $p(X=6) = \frac{1}{8} \times \left(\frac{3}{8}\right)^5 = 0{,}000927$
3. $p(X>6) = \left(\frac{3}{8}\right)^6 = 0{,}002781$
4. $p(X \leqslant 6) = 1-p(X>6) = 0{,}997219$

▶ Exercice n°15

1. Cela revient à répéter une épreuve de Bernoulli et X représente le nombre d'épreuves à répéter pour avoir le premier succès, donc X suit la loi géométrique de paramètre $p=0{,}6$.
2. $p(X>4) = (0{,}4)^4 = 0{,}0256$

▶ Exercice n°16

Partie A

1. $p(X=0) = 0{,}4^{20} \approx 1{,}0995 \times 10^{-8}$
2. $p(X=0)+p(X=1) = 0{,}4^{20} + \binom{20}{1} \times 0{,}6^1 \times 0{,}4^{19} \approx 3{,}4085 \times 10^{-7}$
3. a) $a=8$
   b) $b=16$
   Conclusion : si le maire avait raison, il y aurait théoriquement 95% de chance que, sur 20 habitants interrogés, le nombre de ceux qui lui font confiance soit compris entre 8 et 16.

Partie B

Ce résultat met fortement en doute l'affirmation du maire.