Dérivabilité

Table des matières

1 Généralités **1**
- 1.1 Définition . . . 1
- 1.2 Premières propriétés . . . 2
- 1.3 Dérivabilité à gauche, dérivabilité à droite en un point . . . 3
- 1.4 Fonction dérivable sur un intervalle . . . 4
- 1.5 Dérivabilité et opérations . . . 4
- 1.6 Dérivabilité et dérivée des fonctions usuelles . . . 6

2 Accroissements finis **7**
- 2.1 Extrema locaux . . . 7
- 2.2 Théorème des accroissements finis . . . 8
- 2.3 Conséquences du théorème des accroissements finis . . . 9
  - 2.3.1 Fonctions lipschitziennes et inégalité des accroissements finis . . . 9
  - 2.3.2 Étude « rapide » de suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$ . . . 11
- 2.4 Dérivation et monotonie . . . 12
- 2.5 Théorème de la limite de la dérivée . . . 13

3 Espaces de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ **14**

4 Extension aux fonctions à valeurs complexes **16**

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle, ou une réunion d'intervalles, non vides et non réduits à des poins, et $f \in \mathbb{R}^I$ est une fonction.

I – Généralités

1) Définition

Définition (dérivabilité en un point) Soit $a \in I$. On dit que f est *dérivable en a* si la fonction :

$$\tau_a : \left\{ \begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array} \right. \qquad \text{(fonction } \textit{taux d'accroissement de } f \text{ en } a\text{)}$$

admet une limite finie quand x tend vers a. Dans ce cas, cette limite est appelée *nombre dérivé de f en a* et elle est notée $f'(a)$, *i.e.* :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Remarques :

- ⋆ En posant $x = a+h$, on obtient que la fonction f est dérivable en a si et seulement si le quotient $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0. Dans ce cas, on a l'égalité :

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

- ⋆ Géométriquement, les taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ correspondent aux pentes des cordes reliant les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$.
- ⋆ **Interprétation cinématique :** si $f(t)$ désigne la position d'un mobile à l'instant t, alors $f'(a)$ est la vitesse instantanée du mobile au temps a et, pour tout $t \in I \setminus \{a\}$, le quotient $\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}$ est la vitesse moyenne du mobile entre les instants t et a.

Exemple Considérons la fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}, \qquad \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k a^{n-1-k}\right) \qquad \text{donc} \qquad \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} na^{n-1} \in \mathbb{R}$$

La fonction f est donc dérivable en a et $f'(a) = na^{n-1}$.

2) Premières propriétés

Proposition (dérivable implique continue) Soit $a \in I$. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Démonstration Soit $a \in I$. Pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, on a :

$$f(x) = f(a) + \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \times (x-a)$$

Or f est dérivable en a donc $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} f'(a) \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, $x-a \xrightarrow[x\to a]{} 0$ donc, d'après les opérations sur les limites,

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a) + f'(a) \times 0 = f(a)$$

Autrement dit, f est continue en a. ■

Remarque : la réciproque est fausse. Considérons par exemple la fonction valeur absolue, dont la continuité en 0 est connue (cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$). Cette fonction n'est pas dérivable en 0 car :

$$\frac{|x|}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1 \qquad \text{tandis que} \qquad \frac{|x|}{x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} -1$$

Les limites à gauche et à droite de la fonction τ_0 sont différentes, donc τ_0 n'admet pas de limite en 0. Autrement dit, $x \longmapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.

Proposition (dérivabilité et $\mathbf{DL_1(0)}$) Soit $a \in I$. Alors f est dérivable en a si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et une fonction $\varepsilon \in \mathbb{R}^I$ telle que :

- ⋆ $\forall x \in I,\ f(x) = f(a) + \lambda(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$;
- ⋆ $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.

Dans ce cas, on a de plus $\lambda = f'(a)$.

Démonstration $\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose que f est dérivable en a. On peut écrire que :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$$

où :

$$\forall x \in I, \qquad \varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) & \text{si } x \in I \setminus \{a\} \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases}$$

On a $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$ (car f est dérivable en a).

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que le deuxième point est vérifié. On a :

$$\forall x \in I \setminus \{a\}, \qquad \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lambda + \varepsilon(x),$$

quantité qui tend vers λ quand x tend vers a (par hypothèse sur la fonction ε). Donc f est dérivable en a et $f'(a) = \lambda$. ■

Remarques :

- ⋆ Lorsque f est dérivable en a, la courbe représentative de f présente au point d'abscisse a une tangente d'équation $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ (le coefficient directeur est $f'(a)$). Le résultat ci-dessus exprime le fait que, au voisinage de a, on peut approcher la courbe $\mathscr{C}_f$ par la tangente à la courbe au point d'abscisse a.
- ⋆ Le premier point de la propriété se réécrit, en posant $x = a + h$,

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon_1(h) \qquad \text{(dans un voisinage de 0)}$$

où ε_1 est une fonction définie au voisinage de 0 telle que $\varepsilon_1(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$.

3) Dérivabilité à gauche, dérivabilité à droite en un point

Définition (dérivabilité à gauche, dérivabilité à droite) Soit $a \in I$.

- ⋆ Si $a \neq \inf(I)$, on dit que f est dérivable à gauche en a si la fonction $f|_{I \cap]-\infty, a[}$ est dérivable en a, c'est-à-dire si la limite $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. Dans ce cas, cette limite est alors appelée le *nombre dérivé à gauche de f en a* et est noté $f'_g(a)$.
- ⋆ Si $a \neq \sup(I)$, on dit que f est dérivable à droite en a si la fonction $f|_{I \cap]a, +\infty[}$ est dérivable en a, c'est-à-dire si la limite $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. Dans ce cas, cette limite est alors appelée le *nombre dérivé à droite de f en a* et est noté $f'_d(a)$.

Exemple On a vu que la fonction $f : x \longmapsto |x|$ n'était pas dérivable en 0. Par contre, elle est dérivable à droite et à gauche en 0 et $f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = 1$.

Le lien avec la dérivabilité au sens classique est le suivant.

Proposition Soit $a \in \overset{\circ}{I}$. Alors :

$$f \text{ est dérivable en } a \iff \begin{cases} f \text{ est dérivable à gauche et à droite en } a \\ f'_g(a) = f'_d(a) \end{cases}$$

Dans ce cas, on a $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

Démonstration C'est une conséquence immédiate de la proposition sur le lien entre la limite en un point et les limites à gauche et à droite en ce point. ■

✎✎✎ **Exercice** On considère la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} \ln(1+x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ \sin(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Montrer que f est dérivable en 0.

Une solution. On obtient que f est dérivable à gauche et à droite en 0 et que $f'_g(0) = f'_d(0) = 1$. On en déduit que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 1$.

4) Fonction dérivable sur un intervalle

Définition (fonction dérivable, fonction dérivée) On dit que $f \in \mathbb{R}^I$ est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I. La fonction :

$$f' : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{cases}$$

est appelée *fonction dérivée de f*.

Notation/Vocabulaire :

- ⋆ L'ensemble des fonctions dérivables sur I à valeurs réelles est noté $\mathscr{D}(I, \mathbb{R})$.
- ⋆ On appelle ensemble de dérivabilité de $f \in \mathbb{R}^I$ l'ensemble des nombres $a \in I$ en lesquels f est dérivable.

Remarque : en physique-chimie, la dérivée est aussi notée $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ ou $\dot{f}$.

5) Dérivabilité et opérations

Proposition (propriétés algébriques) Soient $f, g \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$.

- ⋆ Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $f + \lambda g \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$ et $(f + \lambda g)' = f' + \lambda g'$. *On parle de linéarité de la dérivation.*
- ⋆ On a $f \times g \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$ et $(fg)' = f'g + fg'$.
- ⋆ Si g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{f}{g} \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$ et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

  En particulier, $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{1}{g^2}$.

Démonstration ⋆ C'est une conséquence immédiate de la linéarité de la limite et de la définition de la dérivabilité (taux d'accroissements).

- ⋆ Soient $a \in I$ et $x \in I \setminus \{a\}$. Alors :

$$\begin{aligned}\frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} &= \frac{f(x)g(x) - f(x)g(a) + f(x)g(a) - f(a)g(a)}{x-a} \\ &= f(x)\frac{g(x)-g(a)}{x-a} + g(a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\end{aligned}$$

donc :

$$\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} f(a)g'(a)+g(a)f'(a)$$

par continuité de f en a et dérivabilité de f et g en a. Ceci prouve que fg est dérivable en a, avec la formule du nombre dérivé associé.

⋆ Soient $a \in I$ et $x \in I \setminus \{a\}$. Alors :

$$\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(a)}{g(a)}}{x-a} = \frac{1}{x-a} \times \frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{g(x)g(a)} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(a) - f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

donc :

$$\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(a)}{g(a)}}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$

en exploitant la continuité de g en a et la dérivabilité de f et g en a. ■

Proposition (dérivabilité et dérivée d'une fonction composée) Soient I et J deux intervalles d'intérieurs non vides et $f \in \mathbb{R}^I$ et $g \in \mathbb{R}^J$ deux fonctions. On suppose que :

- ⋆ $f(I) \subset J$;
- ⋆ f est dérivable sur I ;
- ⋆ g est dérivable sur J.

Alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$.

Démonstration Soit $a \in I$. Montrons que $g \circ f$ est dérivable en a.

⋆ La fonction g est dérivable en $f(a) \in J$ donc il existe une fonction $\varepsilon : J \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall y \in J, \qquad g(y) = g(f(a)) + (y-f(a))g'(f(a)) + (y-f(a))\varepsilon(y),$$

avec $\varepsilon(y) \xrightarrow[y\to f(a)]{} 0$.

⋆ Pour tout $x \in I$, on a $f(x) \in J$ donc :

$$g(f(x)) = g(f(a)) + (f(x)-f(a))g'(f(a)) + (f(x)-f(a))\varepsilon(f(x))$$

et donc, si $x \neq a$,

$$\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}g'(f(a)) + \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\varepsilon(f(x))$$

Comme f est continue en a, on a :

$$\lim_{x\to a} \varepsilon(f(x)) = \lim_{y\to f(a)} \varepsilon(y) = 0$$

par hypothèse sur la fonction ε. En utilisant également la dérivabilité de f en a, on obtient :

$$\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} f'(a)g'(f(a)) + f'(a)\times 0 = f'(a)g'(f(a)) \in \mathbb{R}$$

Ainsi, $g \circ f$ est dérivable en a et $(g\circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a))$. ■

✎✎✎ **Exercice** Déterminer le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée de $f : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

Proposition (dérivabilité de f^{-1}) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$ telle que f soit bijective de I sur $f(I)$. Si la fonction f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et :

$$\forall x \in f(I), \qquad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Démonstration Soit $b \in f(I)$ et $a = f^{-1}(b)$ (autrement dit, a est l'unique antécédent de b par f dans I). La fonction f est dérivable en a donc :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[x \to a]{} f'(a)$$

Par hypothèse, on a $f'(a) \neq 0$ donc :

$$\frac{x - a}{f(x) - f(a)} \xrightarrow[x \to a]{} \frac{1}{f'(a)}$$

i.e., puisque $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_I$,

$$\frac{f^{-1}(f(x)) - a}{f(x) - f(a)} \xrightarrow[x \to a]{} \frac{1}{f'(a)}$$

La fonction f est continue en a donc :

$$\lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{x \to a} \frac{f^{-1}(f(x)) - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} \in \mathbb{R}$$

Ainsi, f^{-1} est dérivable au point b. ∎

Remarque : lorsque la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ présente une tangente horizontale au point d'abscisse $a \in I$ (*i.e.* si $f'(a) = 0$), alors $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ présente une tangente verticale au point d'abscisse $b = f(a)$, ce qui explique géométriquement la non dérivabilité de f^{-1} en b.

6) Dérivabilité et dérivée des fonctions usuelles

On peut déterminer les domaines de dérivabilité, ainsi que les dérivées des fonctions usuelles en utilisant la définition. Les résultats à connaître sont rassemblés dans le tableau ci-dessous.

expression de f	**domaine de définition**	**domaine de continuité**	**domaine de dérivabilité**	**expression de f'**
x^n $(n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
x^n $(n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	nx^{n-1}
x^α $(\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+^*$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	e^x
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{x}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos(x)$
$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \,\middle\vert\, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \,\middle\vert\, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \,\middle\vert\, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$1 + \tan(x)^2 = \dfrac{1}{\cos(x)^2}$
$\arccos(x)$	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$]-1, 1[$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arcsin(x)$	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$]-1, 1[$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{sh}(x)$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{sh}(x)$
$\mathrm{th}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$1 - \mathrm{th}(x)^2 = \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)^2}$
$\lvert x \rvert$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	$\begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$
$\lfloor x \rfloor$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$	0 sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

II – Accroissements finis

Dans cette partie, I désigne un intervalle d'intérieur non vide.

1) Extrema locaux

Définition (extremum global, extremum local) Soit $a \in I$.

- ⋆ On dit que f admet un *maximum global en a* si :

$$\forall x \in I, \; f(x) \leqslant f(a)$$

- ⋆ On dit que f admet un *maximum local en a* si :

$$\exists V \in \mathscr{V}(a), \; \forall x \in V \cap I, \; f(x) \leqslant f(a)$$

- ⋆ On dit que f admet un *minimum local en a* si :

$$\exists V \in \mathscr{V}(a), \; \forall x \in V \cap I, \; f(x) \geqslant f(a)$$

- ⋆ Si f est dérivable en a et si $f'(a) = 0$, on dit que a est un point critique de f.

Exemple Les fonctions $f : x \longmapsto x^2$ et $g : x \longmapsto x^3$ admettent 0 pour point critique. La première fonction admet un minimum local (qui est même global) en ce point mais la fonction g n'admet pas d'extremum local en 0.

Le lien avec la dérivation est le suivant.

Proposition (extrema et point critique) Soient $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$ et $a \in \mathring{I}$. Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.

Démonstration Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que f admet un maximum local en a. Par hypothèse, il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \cap I, \qquad f(x) \leqslant f(a) \tag{1}$$

- ⋆ Pour tout $x \in [a-\varepsilon, a[\cap I$, on a $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0$ d'après (1). La fonction f est dérivable en a, donc on obtient l'inégalité $f'_g(0) \geqslant 0$ en faisant tendre x vers a^-.
- ⋆ De même :

$$\forall x \in]a, a+\varepsilon] \cap I, \qquad \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0,$$

puis, par passage à la limite, $f'_d(0) \leqslant 0$.

Or f est dérivable en a donc $f'_g(a) = f'_d(a) = f'(a)$, ce qui implique que $f'(a) = 0$ (par antisymétrie de la relation $\leqslant$). ■

Remarques :

- ⋆ Géométriquement, la courbe représentative de f présente au point d'abscisse a une tangente horizontale.
- ⋆ La réciproque est fausse. Par exemple, la fonction $g : x \longmapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que $g'(0) = 0$; pourtant, g n'admet pas d'extremum local en 0.
- ⋆ Il est important que a soit un point intérieur à I (*i.e.* ne soit pas un bord de I). Considérons par exemple la fonction $f : x \longmapsto \mathrm{e}^x$ sur $[0, 1]$. Elle admet clairement un maximum en 1 et pourtant $f'(1) = \mathrm{e} \neq 0$.

2) Théorème des accroissements finis

Théorème (de Rolle) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ une fonction telle que :

- ⋆ f est continue sur $[a, b]$;
- ⋆ f est dérivable sur $]a, b[$;
- ⋆ $f(a) = f(b)$.

Il existe alors $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration On distingue deux cas.

- ⋆ **Premier cas :**
  Si f est constante sur $[a, b]$, alors pour tout $c \in]a, b[$, on a $f'(c) = 0$ (donc tout élément de $]a, b[$ convient).
- ⋆ **Deuxième cas :**
  Supposons que f ne soit pas constante. D'après le théorème de la borne atteinte (qui s'applique puisque f est continue sur le segment $[a, b]$), la fonction f présente un minimum m et un maximum M sur $[a, b]$. Il existe $\alpha, \beta \in [a, b]$ tels que $m = f(\alpha)$ et $M = f(\beta)$. Si $\alpha, \beta \in \{a, b\}$, alors on aurait (puisque $f(a) = f(b)$) :

$$\forall x \in [a, b], \qquad m \leqslant f(x) \leqslant M = m \qquad i.e. \qquad f(x) = m$$

La fonction f est donc constante sur $[a, b]$, ce qui est exclu. Ainsi, $\alpha \in]a, b[$ ou $\beta \in]a, b[$. On a donc $f'(\alpha) = 0$ ou $f'(\beta) = 0$ d'après la proposition précédente. ■

Remarques :

- ⋆ Il n'y a pas unicité du point c.
- ⋆ La courbe représentative de f admet nécessairement une tangente horizontale *entre* a et b.

✎✎✎ **Exercice** Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et P un polynôme admettant n racines réelles. Montrer P' au moins $n-1$ racines réelles.

Une solution.
Notons $x_1 < \cdots < x_n$ les racines réelles de P. Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$. On a $P(x_i) = P(x_{i+1}) = 0$ et P, en tant que fonction polynomiale, est dérivable sur $]x_i, x_{i+1}[$ et continue sur $[x_i, x_{i+1}]$ (en effet, P est dérivable sur $\mathbb{R}$). D'après le théorème de Rolle, il existe $\xi_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $P'(\xi_i) = 0$. Les nombres $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ sont donc des racines de P' qui sont clairement deux à deux distinctes. Ainsi, P' a au moins $n-1$ racines réelles.

Remarque : le théorème de Rolle est faux pour les fonctions à valeurs complexes. Considérons par exemple la fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{ix}$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ (voir plus loin) de dérivée $f' : x \in \mathbb{R} \longmapsto i\,\mathrm{e}^{ix}$. Donc f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ (car $|f'| = 1$). Pourtant, $f(0) = f(2\pi) = 1$.

Théorème (des accroissements finis) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ une fonction telle que :

- ⋆ f est continue sur $[a,b]$;
- ⋆ f est dérivable sur $]a,b[$.

Alors :

$$\exists\, c \in]a,b[, \qquad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Démonstration Il suffit d'appliquer le théorème de Rolle à la fonction :

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x \end{array} \right.$$

On a bien $g \in \mathscr{C}([a,b], \mathbb{R}) \cap \mathscr{D}(]a,b[, \mathbb{R})$ et on vérifie facilement que $g(a) = g(b)$. ■

Remarques :

- ⋆ Géométriquement, cela signifie qu'il existe un point $c \in]a,b[$ en lequel la tangente à la courbe représentative de f est parallèle à la corde reliant les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.
- ⋆ En cinématique, ce résultat signifie qu'il existe un instant dans tout mouvement en lequel vitesse instantanée et vitesse moyenne entre a et b coïncident.

✎✎✎ **Exercice** En utilisant le théorème des accroissements finis, démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad \frac{x}{1+x^2} \leqslant \operatorname{Arctan}(x) \leqslant x$$

3) Conséquences du théorème des accroissements finis

(a) Fonctions lipschitziennes et inégalité des accroissements finis

Définition (fonction lipschitzienne) Soit $f \in \mathbb{R}^I$.

- ⋆ Soit $M \in \mathbb{R}_+$. On dit que f est *M-lipschitzienne* sur I si :

$$\forall x, y \in I, \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|$$

- ⋆ On dit que f est *lipschitzienne* sur I s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que f soit M-lipschitzienne sur I.

Remarques :

- ⋆ Dire que f est lipschitzienne est I signifie que l'ensemble :

$$\left\{ \left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \right| \,\middle|\, (x,y) \in I^2,\ x \neq y \right\} \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$$

  est majoré (par la constante de Lipschitz de f).
- ⋆ La définition implique, en fixant $y = a \in I$, que :

$$\forall x \in I, \qquad f(a) - M|x-a| \leqslant f(x) \leqslant f(a) + M|x-a|$$

  Le graphe de f se situe donc, dans l'intervalle I, à l'extérieur du double cône délimité par les fonctions $x \longmapsto f(a) \pm M|x-a|$.

Exemples ⋆ La fonction $f : x \longmapsto x^2$ est lipschitzienne sur $[0,1]$, elle ne l'est pas sur $\mathbb{R}_+$.
En effet, pour tous $x, y \in [0,1]$, on a :

$$|x^2 - y^2| = (x+y)|x-y| \leqslant 2|x-y|$$

donc f est 2-lipschitzienne sur $[0,1]$. Par contre :

$$\frac{f(2x)-f(x)}{2x-x} = 3x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

- ⋆ La fonction $g : x \longmapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sur $[0,1]$.
  En effet :

$$\frac{g(x)-g(0)}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$$

> **Proposition (lipschitzienne implique continue)** Soit $f \in \mathbb{R}^I$ une fonction lipschitzienne. Alors f est continue sur I.

Démonstration Par hypothèse, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x, y \in I, \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|$$

Soit $a \in I$. Alors :

$$\forall x \in I, \qquad f(a) - M|x-a| \leqslant f(x) \leqslant f(a) + M|x-a|$$

et donc $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$ d'après le théorème des gendarmes. La fonction f est donc continue en a. ■

Remarque : la réciproque est fausse. La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sur $[0,1]$ mais elle est continue sur cet intervalle.

Le lien avec les accroissements finis est le suivant.

> **Corollaire (inégalité des accroissements finis)** Soit $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :
>
> $$\forall x \in I, \qquad |f'(x)| \leqslant M$$
>
> Alors :
>
> $$\forall x, y \in I, \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|$$
>
> Autrement dit, la fonction f est M-lipschitzienne sur I.

Démonstration Soient $x, y \in I$. Il n'y a rien à démontrer si $x = y$. Supposons maintenant que $x \neq y$; sans perte de généralité, on peut supposer que $x < y$. On applique le théorème des accroissements finis à la fonction f sur $[x, y]$. On a $f \in \mathscr{C}([x,y],\mathbb{R}) \cap \mathscr{D}(]x,y[,\mathbb{R})$ (car $f \in \mathscr{D}(I,\mathbb{R})$) donc il existe $c \in]x,y[$ tel que $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c)$. On obtient l'inégalité souhaitée en prenant les valeurs absolues et en utilisant la majoration sur la fonction $|f'|$. Donc f est M-lipschitzienne sur I. ■

Exemple La fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$ (sa dérivée est positive majorée par 1 sur $\mathbb{R}_+$) ce qui implique que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad |\ln(1+x) - \ln(1)| \leqslant |x - 0|$$

i.e. :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad \ln(1+x) \leqslant x$$

(b) Étude « rapide » de suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Considérons une fonction $f \in I^I$ *contractante*, *i.e.* M-lipschitzienne avec $M \in]0,1[$. Fixons $u_0 \in I$ et considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence[1] :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

On émet l'hypothèse suivante :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ admet un point fixe } c \in I \text{ (c'est-à-dire } f(c) = c)}$$

Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - c| = |f(u_{n-1}) - f(c)| \leqslant M|u_{n-1} - c| \leqslant \cdots \leqslant M^n|u_0 - c|,$$

ce que l'on démontre par récurrence. On obtient alors que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} c$.

✎✎✎ **Exercice** Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. On considère la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \alpha$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n),$$

où $f : x \longmapsto \sqrt{1+x}$.

1. Justifier que $\mathbb{R}_+$ est un intervalle stable par f. Que peut-on en déduire pour la suite u ?
2. Montrer que f admet un unique point fixe dans $\mathbb{R}_+$ à déterminer. *On le notera φ dans la suite.*
3. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_{n+1} - \varphi| \leqslant \frac{|u_n - \varphi|}{2}$$
4. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - \varphi| \leqslant \frac{|\alpha - \varphi|}{2^n}$$
et conclure que la suite u est convergente et déterminer sa limite.

1. Remarquons que la suite est bien définie puisque l'intervalle I est stable par f.

4) Dérivation et monotonie

Théorème (monotonie et signe de la dérivée) Soit $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$. Alors :

- ⋆ f est croissante sur I si et seulement si $f' \geqslant 0$ sur I ;
- ⋆ f est décroissante sur I si et seulement si $f' \leqslant 0$ sur I ;
- ⋆ f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$ sur I.

Démonstration ⋆ On raisonne par double implication.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que f soit croissante sur I. Soit $a \in I$. Pour tout $x \in I$, les nombres $f(x) - f(a)$ et $x - a$ sont de même signe (puisque f est croissante sur I) donc :

$$\forall x \in I \setminus \{a\}, \qquad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant 0$$

et donc, en passant à la limite (ce qui est licite car f est dérivable en a), on obtient $f'(a) \geqslant 0$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soient $x, y \in I$ tel que $x < y$ (il n'y a rien à démontrer si $x = y$). Montrons que $f(x) \leqslant f(y)$. Comme f est dérivable sur I, on a $f \in \mathscr{C}([x, y], \mathbb{R}) \cap \mathscr{D}(]x, y[, \mathbb{R})$ donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x, y[$ tel que :

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$$

Comme $f'(c) \geqslant 0$ par hypothèse, et puisque $y - x > 0$, on a $f(y) - f(x) \geqslant 0$, ce qu'il fallait démontrer. La fonction f est donc croissante sur I.

⋆ On a :

$$\begin{aligned}
(f \text{ est décroissante sur } I) &\iff (-f \text{ est croissante sur } I) \\
&\iff (\forall x \in I,\ (-f)'(x) \geqslant 0) \qquad \text{(d'après le point précédent)} \\
&\iff (\forall x \in I,\ -f'(x) \geqslant 0) \\
&\iff (\forall x \in I,\ f'(x) \leqslant 0)
\end{aligned}$$

⋆ C'est une conséquence immédiate des deux premiers points. ■

Remarque : il est important que I soit un intervalle dans cet énoncé. En effet, la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée négative. Pourtant, f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$ car, par exemple, $f(1) > f(-1)$.

On dispose d'un résultat analogue pour la monotonie stricte.

Définition (partie de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide) Soit $\mathscr{E} \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$. On dit que $\mathscr{E}$ est *d'intérieur non vide* s'il existe $a, b \in \mathscr{E}$ tels que $a < b$ et $[a, b] \subset \mathscr{E}$. On écrit alors $\mathring{\mathscr{E}} \neq \varnothing$.

Exemple L'ensemble $[0, 1[$ est d'intérieur non vide tandis que $\{0, 1, 2, 3\}$ et $\mathbb{Z}$ sont d'intérieurs vides.

Théorème (monotonie stricte et signe de la dérivée) Soit $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$. On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des points d'annulation de f', *i.e.* :

$$\mathscr{A} = \left\{ x \in I \,\middle|\, f'(x) = 0 \right\} = (f')^{-1}(\{0\})$$

Alors f est strictement croissante sur I si et seulement si $f' \geqslant 0$ sur I et $\mathring{\mathscr{A}} = \varnothing$.

Démonstration On raisonne par double implication.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Si f est strictement croissante sur I, alors f est croissante sur I donc $f' \geqslant 0$ sur I d'après le résultat précédent. Par l'absurde, si $\overset{\circ}{\mathscr{A}} \neq \varnothing$, alors il existe $a, b \in I$ tels que $a < b$ et $[a, b] \subset \mathscr{A}$. Pour tout $x \in [a, b]$, on a donc $f'(x) = 0$. On en déduit que f est constante sur $[a, b]$, ce qui contredit la croissance stricte de f sur I. Ainsi, $\overset{\circ}{\mathscr{A}} = \varnothing$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Réciproquement, supposons que $f' \geqslant 0$ sur I et que $\overset{\circ}{\mathscr{A}} = \varnothing$. D'après la proposition précédente, f est croissante sur I. Soient $x, y \in I$ tels que $x < y$. Par croissance de f, on a $f(x) \leqslant f(y)$. Si $f(x) = f(y)$, alors f est constante sur $[x, y]$ et donc f' est nulle sur $[x, y]$, ce qui fournit l'absurdité $\overset{\circ}{\mathscr{A}} \neq \varnothing$. Ainsi, $f(x) < f(y)$ et donc f est strictement croissante sur I. ■

Remarques :

- ⋆ On dispose d'un résultat analogue pour la décroissance stricte.
- ⋆ **Cas particuliers :**
  - — si $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$ et si $f' > 0$ sur I, alors f est strictement croissante sur I ;
  - — si $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$ et si $f' > 0$ sur I, sauf éventuellement en un nombre fini de points où f' s'annule, alors f est strictement croissante sur I.

✎✎✎ **Exercice** Étudier la monotonie stricte de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^7}{7} - \dfrac{2x^5}{5} + \dfrac{x^3}{3}$ sur $\mathbb{R}$.

5) Théorème de la limite de la dérivée

Le résultat suivant permet d'étudier simplement la dérivabilité d'une fonction en un point sans utiliser les taux d'accroissement.

Théorème (de la limite de la dérivée) Soient $a \in I$ et $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R}) \cap \mathscr{D}(I \setminus \{a\}, \mathbb{R})$. S'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$, alors :

- ⋆ f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$;
- ⋆ f' est continue en a.

Démonstration ⋆ Soit $x \in I \cap]a, +\infty[$. On a $f \in \mathscr{C}([a, x], \mathbb{R}) \cap \mathscr{D}(]a, x[, \mathbb{R})$ (car f est dérivable sur I et car $[a, x] \subset I$) donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_x \in]a, x[$ tel que :

$$f'(c_x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{2}$$

Comme $a \leqslant c_x \leqslant x$, le théorème des gendarmes implique que $c_x \xrightarrow[x \to a^+]{} a$. Ensuite, f' admet pour limite ℓ en a donc, par composition des limites, il vient :

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^+} f'(c_x) = \lim_{X \to a} f(X) = \ell$$

Comme $\ell \in \mathbb{R}$, la fonction f est dérivable à droite en a et $f'_d(a) = \ell$.

⋆ De la même manière, on obtient la dérivabilité de f à gauche en a et le fait que $f'_g(a) = \ell$.

La fonction f est donc dérivable en a et $f'(a) = \ell$. Enfin, $f'(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell = f'(a)$ donc f' est continue en a. ■

✎✎✎ **Exercice** Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{array} \right.$.

1. Montrer que la fonction f peut être prolongée en une fonction φ continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

III – Espaces de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

On désigne ici par I un intervalle, ou une réunion d'intervalles, d'intérieurs non vides.

Définition (dérivées successives) Soit $f \in \mathbb{R}^I$. On définit les dérivées successives de f de la manière suivante :

- ⋆ on pose $f^{(0)} = f$;
- ⋆ si f est dérivable sur I, on pose $f^{(1)} = f'$ (dérivée première de f) ;
- ⋆ si $k \in \mathbb{N}^*$ et si f admet une dérivée k^{e} notée $f^{(k)} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est dérivable sur I, alors on définit la dérivée $(k+1)^{\mathrm{e}}$ de f par :

$$f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$$

Remarque : en physique, la dérivée k^{e} se note $\dfrac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}t^k}$ (plutôt que $f^{(k)}$).

Définition (fonctions de classe $\mathscr{C}^k$) Soit $f \in \mathbb{R}^I$.

- ⋆ On dit que f est de classe $\mathscr{C}^0$ sur I si elle est continue sur I.
- ⋆ On dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I si elle est dérivable sur I et si f' est continue sur I.
- ⋆ Plus généralement, si $k \in \mathbb{N}^*$, on dit que f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I si f est k fois dérivable sur I et si $f^{(k)}$ est continue sur I.
- ⋆ On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I si f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I pour tout entier naturel k.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{C}^k(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.

Exemple On a $\exp \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $|\cdot| \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$.

Remarques :

- ⋆ Si $f \in \mathscr{C}^k(I, \mathbb{R})$, alors les fonctions $f, f', \dots, f^{(k)}$ sont continues sur I et f' est de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ sur I.
- ⋆ Les fonctions usuelles sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leur domaine de dérivabilité.
- ⋆ On a la chaîne d'inclusions suivante :

$$\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R}) \subset \cdots \subset \mathscr{C}^3(I, \mathbb{R}) \subset \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R}) \subset \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R}) \subset \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$$

et l'égalité :

$$\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R}) = \bigcap_{k=0}^{+\infty} \mathscr{C}^k(I, \mathbb{R})$$

Proposition (opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$) Soient $k \in \mathbb{N}$ et $f, g \in \mathscr{C}^k(I, \mathbb{R})$.

- ⋆ Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $f + \lambda g$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et :

$$(f + \lambda g)^{(k)} = f^{(k)} + \lambda g^{(k)}$$

- ⋆ La fonction $f \times g$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et :

$$(fg)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)} \qquad \text{(formule de Leibniz)} \qquad (\mathscr{F}_k)$$

- ⋆ Si la fonction g ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.
- ⋆ Si $k \in \mathbb{N}^*$ et si la fonction f' ne s'annule pas sur I, alors f est bijective de I sur $f(I)$ et f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $f(I)$.
- ⋆ Si $h \in \mathbb{R}^J$ et si $f(I) \subset J$ (où J est un intervalle ou une réunion d'intervalles d'intérieurs non vides), alors la fonction $h \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.

Démonstration

⋆ Il suffit de procéder par récurrence sur k.

⋆ On démontre le résultat en procédant par récurrence sur l'entier k. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, considérons la proposition $\mathscr{P}_k$: « si f et g sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur I à valeurs réelles, alors fg est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et la formule de Leibniz $(\mathscr{F}_k)$ est vraie ».

— On sait que le produit de deux fonctions continues est une fonction continue. Par ailleurs, les deux membres de la formule de Leibniz valent $f \times g$ (puisque $(f \times g)^{(0)} = f \times g$, $f^{(0)} = f$ et $g^{(0)} = g$). Donc la propriété est vraie au rang $k = 0$.

— Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_k$ soit vraie et soient f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ sur I à valeurs réelles. Alors f et g sont en particulier de classe $\mathscr{C}^k$ sur I donc, d'après l'hypothèse de récurrence, la fonction $f \times g$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et :

$$(fg)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)}$$

Pour tout $i \in [\![0, k]\!]$, les fonctions $f^{(i)} g^{(k-i)}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I (en effet, f et g sont de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ et $i \leqslant k$ et $k - i \leqslant k$ donc les fonctions $f^{(i)}$ et $g^{(k-i)}$ sont au moins de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et on sait qu'un produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$). La fonction $(fg)^{(k)}$ est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur I comme somme de fonctions qui le sont. Autrement dit, la fonction fg est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ sur I et, par linéarité de la dérivation, on a :

$$\begin{aligned}
(fg)^{(k+1)} = ((fg)^{(k)})' &= \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)} \right)' \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(f^{(i)} g^{(k-i)} \right)' \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left[f^{(i+1)} g^{(k-i)} + f^{(i)} g^{(k-i+1)} \right] \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i+1)} g^{(k-i)} + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k+1-i)} \\
&= \sum_{\ell=1}^{k+1} \binom{k}{\ell-1} f^{(\ell)} g^{(k+1-\ell)} + \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} f^{(\ell)} g^{(k+1-\ell)} \qquad \text{(première somme : } \ell = i+1\text{)} \\
&= \sum_{\ell=1}^{k} \left[\binom{k}{\ell-1} + \binom{k}{\ell} \right] f^{(\ell)} g^{(k+1-\ell)} + \underbrace{f^{(k+1)}}_{\ell=k+1} + \underbrace{g^{(k+1)}}_{\ell=0} \\
&= \sum_{\ell=1}^{k} \binom{k+1}{\ell} f^{(\ell)} g^{(k+1-\ell)} + \underbrace{f^{(k+1)}}_{\ell=k+1} + \underbrace{g^{(k+1)}}_{\ell=0} \qquad \text{(formule du triangle de Pascal)} \\
&= \sum_{\ell=0}^{k+1} \binom{k+1}{\ell} f^{(\ell)} g^{(k+1-\ell)}
\end{aligned}$$

La formule $(\mathscr{F}_{k+1})$ est établie. La proposition $\mathscr{P}_{k+1}$ est donc vraie.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathscr{P}_k$ est vraie par principe de récurrence simple, ce qui achève la démonstration.

⋆ Les trois derniers résultats sont admis. ■

✎✎✎ **Exercice** Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \ln(1 + x)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un domaine à préciser et déterminer ses dérivées successives.

IV – Extension aux fonctions à valeurs complexes

Soit $f \in \mathbb{C}^I$ une fonction à valeurs complexes. La définition de la dérivabilité de f en $a \in I$ est la même que pour une fonction à valeurs réelles.

Définition (dérivabilité en un point, dérivabilité sur un intervalle) ⋆ Soit $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si la fonction :

$$\tau_a : x \in I \setminus \{a\} \longmapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

admet une limite dans $\mathbb{C}$.

⋆ On dit que f est dérivable sur I (noté $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{C})$) si f est dérivable en tout point de I.

Le résultat suivant fait le lien entre la dérivabilité de f et des fonctions $\mathrm{Re}(f) : x \longmapsto \mathrm{Re}(f(x))$ et $\mathrm{Im}(f) : x \longmapsto \mathrm{Im}(f(x))$ qui sont à valeurs réelles.

Proposition Soit $a \in I$. La fonction f est dérivable en a si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont dérivables en a et, dans ce cas,

$$f'(a) = \mathrm{Re}(f)'(a) + \mathrm{Im}(f)'(a)$$

Démonstration On utilise le résultat sur les limites pour les fonctions à valeurs complexes :

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existe dans } \mathbb{C} \\
&\iff \lim_{x \to a} \mathrm{Re}\left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right) \text{ et } \lim_{x \to a} \mathrm{Im}\left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right) \text{ existent et sont finies} \\
&\iff \lim_{x \to a} \frac{\mathrm{Re}(f(x)) - \mathrm{Re}(f(a))}{x - a} \text{ et } \lim_{x \to a} \frac{\mathrm{Im}(f(x)) - \mathrm{Im}(f(a))}{x - a} \text{ existent et sont finies} \\
&\iff \mathrm{Re}(f) \text{ et } \mathrm{Im}(f) \text{ sont dérivables en } a
\end{aligned}$$

La formule relative à $f'(a)$ est alors une conséquence de la linéarité de la limite. ■

Exemple Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, la fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \alpha\, \mathrm{e}^{\alpha x}$$

Il n'est bien sûr pas question de parler de monotonie pour une fonction à valeurs complexes. On sait que le théorème de Rolle n'est pas valable dans $\mathbb{C}$. Il en est de même pour le théorème des accroissements finis.

Exemple La fonction $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{ix}$ dérivable sur $\mathbb{R}$. Il est clair que :

$$\forall c \in \mathbb{R}, \qquad f(2\pi) - f(0) \neq f'(c)(2\pi - 0)$$

Par contre, l'inégalité des accroissements finis reste valable pour une fonction à valeurs complexes.

Proposition Soit $f \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{C})$. Pour tous $a, b \in I$, on a :

$$|f(b) - f(a)| \leqslant \left(\max_{x \in [a,b]} |f'(x)|\right) |b - a|$$

Démonstration La démonstration nécessite d'avoir construit l'intégrale d'une fonction à valeurs complexes, ce que nous verrons dans un chapitre ultérieur. Soient $a, b \in I$. On peut supposer, sans perte de généralité, que $a \leqslant b$. Alors :

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) \, \mathrm{d}x$$

et donc, en invoquant l'inégalité triangulaire pour les intégrales :

$$|f(b) - f(a)| = \left| \int_a^b f'(x) \, \mathrm{d}x \right| \leqslant \int_a^b |f'(x)| \, \mathrm{d}x \leqslant \left(\max_{x \in [a,b]} |f'(x)| \right) (b-a),$$

ce qu'il fallait démontrer. ■