

Mathématiques – CCINP/E3A – DS₅

Les résultats doivent être justifiés et encadrés (ou soulignés).
Numérotez chaque page de votre devoir.
La calculatrice est interdite.

Exercice 1 : Série de fonctions

Pour tout entier naturel n , on définit sur l'intervalle $J = [1, +\infty[$, la fonction f_n par :

$$\forall x \in J, \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}.$$

Q1. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur J .

On note alors pour tout x de J , $\varphi(x)$ sa somme.

Q2. Montrer que cette série de fonctions ne converge pas normalement sur J .

Q3. Étudier alors sa convergence uniforme sur J .

Q4. Déterminer $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Q5. Justifier la convergence de la série de terme général u_n . On note $a = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ sa somme.

Q6. Montrer que l'on a au voisinage de l'infini : $\varphi(x) - \ell \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a}{\sqrt{x}}$.

Exercice 2 : Probabilités

Un sauteur tente de franchir des hauteurs successives numérotées $1, 2, \dots, n, \dots$.

Il ne peut tenter de passer la hauteur $n+1$ que s'il a réussi les sauts de hauteurs $1, 2, \dots, n$.

En supposant que le sauteur a réussi tous les sauts précédents, la probabilité de succès au n -ième saut est $p_n = \frac{1}{n}$.

Ainsi le premier saut est toujours réussi.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note S_k l'événement : «le sauteur a réussi son k -ième saut» et on note X la variable aléatoire égale au numéro du dernier saut réussi.

Q7. Rappeler sans démonstration la formule des probabilités composées.

Q8. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X .

Q9. Déterminer $\mathbb{P}(X = 1)$.

Q10. Justifier que $(X = 2) = S_1 \cap S_2 \cap \overline{S_3}$. En déduire $\mathbb{P}(X = 2)$.

Q11. Pour tout entier $n \geq 2$, exprimer l'évènement $(X = n)$ en fonction d'évènements du type S_k .

Q12. Déterminer la loi de X .

Q13. Vérifier par le calcul que : $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1$.

Problème : Factorisation QR

Présentation

Ce problème s'intéresse dans la **partie I** à des propriétés des matrices de rang 1. Certaines de ces matrices sont ensuite utilisées dans la **partie II** pour construire des matrices orthogonales permettant dans la **partie III** de prouver l'existence d'une factorisation QR pour une matrice carrée quelconque.

Notations

Pour tous $n, p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des matrices réelles carrées de taille n est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: on note également A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui à X associe AX .

Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, A^T désigne la matrice transposée de A .

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite nilpotente s'il existe un entier $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que : $A^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

L'ensemble $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\| \cdot \|$. En identifiant $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$, on a pour tous $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\langle X, Y \rangle = X^T Y \quad \text{et} \quad \|X\|^2 = \langle X, X \rangle.$$

On suppose dans tout ce problème que $n \in \mathbb{N}$ est un entier naturel vérifiant $n \geq 2$.

Partie I – Matrices de rang 1

I.1 – Une expression des matrices de rang 1

Q14. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. Montrer qu'il existe $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$ tels que : $A = XY^T$.

Q15. Réciproquement, soient $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$. Montrer que la matrice XY^T est de rang 1.

I.2 – Quelques propriétés

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

Q16. Montrer que $A^2 = \text{tr}(A)A$.

Q17. En déduire, par récurrence sur k , une expression de A^k en fonction de A pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Q18. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la trace de A pour que A soit nilpotente.

Q19. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la trace de A pour que A soit diagonalisable.

Partie II – Matrices de Householder

II.1 – Un exemple

On définit :

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Q20. Calculer A^2 . En déduire un polynôme annulateur de A .

Q21. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A .

Q22. Montrer que les sous-espaces propres de A sont orthogonaux.

Q23. Déterminer une matrice $P \in O_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, telles que : $P^T A P = D$.

Q24. Interpréter géométriquement l'endomorphisme A de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

II.2 – Matrices de Householder

Soit $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$. On définit $P_V, Q_V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$P_V = \frac{1}{\|V\|^2} VV^T, \quad \text{et :} \quad Q_V = I_n - 2 \frac{1}{\|V\|^2} VV^T. \quad (.1)$$

Q25. Montrer que $\text{Im}(P_V) = \text{Vect}(V)$ et que $\text{Ker}(P_V) = \text{Vect}(V)^\perp$.

Q26. Montrer que P_V est la projection orthogonale sur la droite $\text{Vect}(V)$.
Préciser le rang et la trace de la matrice P_V .

Q27. Montrer que Q_V est symétrique et orthogonale.

Q28. Montrer que Q_V est la symétrie orthogonale par rapport à $\text{Vect}(V)^\perp$.

Partie III – Factorisation QR

III.1 – Un résultat préliminaire

Soient $U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, tels que : $\|U\| = \|V\|$. On note : $D = \text{Vect}(U - V)$.

Q29. Montrer que $D^\perp$ est l'ensemble des $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, tels que : $\|X - U\| = \|X - V\|$.

Q30. Donner la décomposition de U sur la somme directe $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = D \oplus D^\perp$.

Q31. On suppose U et V non colinéaires. Calculer $Q_{U-V}U$ où Q_{U-V} est définie en (.1).

Q32. En déduire que pour tous $\tilde{U}, \tilde{V} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe une matrice orthogonale Q , telle que $Q\tilde{U}$ soit colinéaire à $\tilde{V}$.

III.2 – Factorisation QR

Q33. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale Q_1 , telle que Q_1A soit de la forme :

$$Q_1A = \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } C_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}).$$

Q34. En raisonnant par récurrence sur n , montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice Q orthogonale, telle que QA soit triangulaire supérieure.

Mathématiques – Centrale/Mines – DS₅

Les résultats doivent être justifiés et encadrés (ou soulignés).

Numérotez chaque page de votre devoir.

La calculatrice est interdite.

Exercice 1 : Série de fonctions

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ de fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times [0, +\infty[, \quad u_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-nx}.$$

Q1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$. Dans la suite, on notera g sa somme

$$\text{sur } [0, +\infty[: \text{pour tout } x \geq 0, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-nx}.$$

Q2. Justifier que g est continue sur $[0, +\infty[$

Q3. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et donner une expression simple de sa dérivée à l'aide de fonctions usuelles.

Q4. Montrer que $g(0) = \ln(2)$.

Q5. Donner une expression simple de $g(x)$ l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 2 : Probabilités

Un sauteur tente de franchir des hauteurs successives numérotées $1, 2, \dots, n, \dots$.

Il ne peut tenter de passer la hauteur $n + 1$ que s'il a réussi les sauts de hauteurs $1, 2, \dots, n$.

En supposant que le sauteur a réussi tous les sauts précédents, la probabilité de succès au n -ième saut est $p_n = \frac{1}{n}$.

Ainsi le premier saut est toujours réussi.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note S_k l'événement : «le sauteur a réussi son k -ième saut» et on note X la variable aléatoire égale au numéro du dernier saut réussi.

Q6. Rappeler sans démonstration la formule des probabilités composées.

Q7. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X .

Q8. Déterminer $\mathbb{P}(X = 1)$.

Q9. Justifier que $(X = 2) = S_1 \cap S_2 \cap \overline{S_3}$. En déduire $\mathbb{P}(X = 2)$.

Q10. Pour tout entier $n \geq 2$, exprimer l'événement $(X = n)$ en fonction d'événements du type S_k .

Q11. Déterminer la loi de X .

Q12. Vérifier par le calcul que : $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1$.

Problème

Notations

- n désigne un entier naturel non nul.
- $\mathcal{M}_n$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées réelles de taille (n, n) dont la matrice unité est notée I_n .
- E_n désigne l'espace vectoriel des matrices réelles de taille $(n, 1)$ (matrices colonnes). On le munit de son produit scalaire usuel et de la norme (euclidienne) associée définis par :

$$(X|Y) = X^\top Y \quad \text{et} \quad \|X\| = \sqrt{X^\top X}.$$
- Pour $A \in \mathcal{M}_n$, on note $A^\top$, la transposée de A .
- $\mathcal{S}_n$ (respectivement $\mathcal{A}_n$) désigne le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$ constitué des matrices symétriques (respectivement antisymétriques) de $\mathcal{M}_n$.
- $\mathcal{O}_n = \{A \in \mathcal{M}_n, AA^\top = I_n\}$ est le groupe orthogonal d'ordre n .
- $\mathcal{SO}_n = \{A \in \mathcal{O}_n, \det(A) = 1\}$ est le groupe spécial orthogonal d'ordre n .
- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ et $S(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$.
On rappelle que $\mathcal{SO}_2 = \{R(\theta), \theta \in \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{O}_2 = \mathcal{SO}_2 \cup \{S(\theta), \theta \in \mathbb{R}\}$.

Définition 1 Une matrice A de $\mathcal{M}_n$ est dite **normale** lorsqu'elle commute avec sa transposée, c'est-à-dire lorsque $AA^\top = A^\top A$.

Définition 2 Une matrice $A \in \mathcal{M}_n$ est dite **orthogonalement semblable à** $B \in \mathcal{M}_n$ s'il existe $Q \in \mathcal{O}_n$ tel que $B = Q^\top A Q$. (On pourra noter en abrégé : A est **ORTS** à B .)

Objectifs

- Dans un premier temps, ce problème vise à établir que, pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n$, les quatre conditions suivantes sont équivalentes :
 - (C₁) Il existe un polynôme P à coefficients réels tel que $A^\top = P(A)$.
 - (C₂) La matrice A est normale.
 - (C₃) Pour tout $X \in E_n$, $\|A^\top X\| = \|AX\|$.
 - (C₄) La matrice A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs, dont chaque bloc diagonal est :
 - soit de taille $(1, 1)$,
 - soit de taille $(2, 2)$ du type $rR(\theta)$, où $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
- Dans un second temps, on définit et caractérise l'exponentielle d'une telle matrice.

On pourra utiliser, sans démonstration, les deux résultats suivants :

Théorème 1 Tout endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ admet au moins une droite ou un plan stable.

Théorème 2 Si $A \in \mathcal{M}_n$ et $B \in \mathcal{M}_n$ sont telles qu'il existe $Q \in \mathcal{O}_n$ vérifiant $B = Q^\top A Q$, alors pour tout polynôme P à coefficients réels, on a $P(B) = Q^\top P(A) Q$.

Question préliminaire

Q13. Démontrer que la relation **ORTS** vérifie les propriétés suivantes : pour tout $(A, B, C) \in \mathcal{M}_n^3$,

- (i) A est **ORTS** à A .
- (ii) Si A est **ORTS** à B , alors B est **ORTS** à A .
- (iii) Si A est **ORTS** à B et B est **ORTS** à C , alors A **ORTS** à C .

On dit que la relation **ORTS** est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n$.

Exemples

Q14. Montrer que les éléments de $\mathcal{S}_n$ vérifient les conditions **(C₁)**, **(C₂)**, **(C₃)** et **(C₄)**, et que ceux de $\mathcal{A}_n$ vérifient les conditions **(C₁)**, **(C₂)** et **(C₃)**.

Q15. Montrer que les éléments de $\mathcal{O}_n$ vérifient les conditions **(C₂)** et **(C₃)**.

Q16. Dans cette question seulement, on suppose $n = 2$.

Montrer que les matrices rT , où $r > 0$ et $T \in \mathcal{O}_2$, vérifient les conditions **(C₁)** et **(C₄)**.

Deux premières implications

Soit $A \in \mathcal{M}_n$.

Q17. Montrer que si A vérifie la condition **(C₁)**, alors A vérifie la condition **(C₂)**.

Q18. Montrer que si A vérifie la condition **(C₂)**, alors A vérifie la condition **(C₃)**.

La condition **(C₃)** implique la condition **(C₄)**

Dans la question **Q19** seulement, on suppose $n = 2$ et soit $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2$ vérifiant la condition **(C₃)**.

Q19. Montrer que $c = b$ ou bien ($b \neq 0$ et $c = -b$ et $a = d$).

On pourra utiliser, par exemple, les vecteurs $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ de E_2 .

En déduire que A vérifie la condition **(C₄)**.

Dans toute la suite de cette partie, on se donne $A \in \mathcal{M}_n$ vérifiant la condition **(C₃)**.

Q20. Montrer que pour tout réel λ , la matrice $A - \lambda I_n$ vérifie **(C₃)**.

Q21. En déduire que A et $A^\top$ ont les mêmes sous-espaces propres et qu'ils sont deux à deux orthogonaux.

Q22. En utilisant la question précédente, déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la matrice A pour qu'elle soit diagonalisable.

Q23. Pour $n \geq 3$, montrer que A est orthogonalement semblable à une matrice du type $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, où $A_1 \in \mathcal{M}_p$ et $A_2 \in \mathcal{M}_{n-p}$ vérifient **(C₃)**, avec $p \in \{1, 2\}$.

On pourra commencer par montrer que toute matrice orthogonalement semblable à A vérifie **(C₃)**.

Q24. Montrer que si A vérifie la condition **(C₃)**, alors A vérifie la condition **(C₄)**.

La condition (C_4) implique la condition (C_1)

Soit $Z = \{z_1, \dots, z_n\}$ une famille de n complexes deux à deux distincts.

Q25. Établir l'existence d'un unique polynôme P de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad P(z_k) = \overline{z_k}.$$

On suppose de plus que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $\overline{z_k} \in Z$.

Montrer alors que le polynôme P est réel.

Soient $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(re^{i\theta}) = re^{-i\theta}$.

Q26. Montrer que $P(rR(\theta)) = (rR(\theta))^\top$.

Lorsque $\sin \theta \neq 0$, on pourra utiliser la division euclidienne de P par le polynôme caractéristique χ de la matrice $rR(\theta)$ de $\mathcal{M}_2$.

Q27. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n$ vérifie la condition (C_4) , alors A vérifie la condition (C_1) .

Exponentielle d'une matrice normale

Q28. Pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, montrer que les séries $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{r^k \cos(k\theta)}{k!}$ et $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{r^k \sin(k\theta)}{k!}$ convergent et calculer leur somme.

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n$ est désormais muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par :

$$\forall A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n, \quad \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i,j \leq n} |A_{i,j}|.$$

Q29. Montrer que, pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n^2$, $\|AB\|_\infty \leq n \|A\|_\infty \|B\|_\infty$.

Pour $A \in \mathcal{M}_n$ et $p \in \mathbb{N}$, on pose $S_p(A) = \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} A^k$.

Q30. Montrer que la suite $(S_p(A))_{p \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_n$, vers une limite que l'on notera $\text{Exp}(A)$, et que :

$$\forall Q \in \mathcal{O}_n, \quad \text{Exp}(Q^\top A Q) = Q^\top \text{Exp}(A) Q.$$

On pourra montrer que, pour tous $1 \leq i, j \leq n$, la série numérique $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(A^k)_{i,j}}{k!}$ est absolument convergente.

Q31. Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}_n$ constitué des matrices normales de $\mathcal{M}_n$ est un fermé de $\mathcal{M}_n$. Qu'en déduit-on pour $\text{Exp}(A)$, lorsque $A \in \mathcal{E}_n$?

Q32. Soit $(r, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Montrer que $\exp(rR(\theta)) = e^{r \cos \theta} R(r \sin \theta)$.

En déduire que $\text{Exp}(\mathcal{E}_n)$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n$ orthogonalement semblables aux matrices diagonales par blocs, dont chaque bloc diagonal est :

- soit du type $(\mu) \in \mathcal{M}_1$, avec $\mu > 0$,
- soit du type $\alpha R(\beta) \in \mathcal{M}_2$, avec $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

On note $\mathcal{S}_n^{++}$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n$ à valeurs propres strictement positives, et $\mathcal{F}_n$ l'ensemble des matrices B de $\mathcal{M}_n$ vérifiant les conditions :

- les valeurs propres négatives de B sont de multiplicité paire,
- il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}$ et $T \in \mathcal{SO}_n$ telles que $B = ST = TS$.

Q33. Démontrer que $\text{Exp}(\mathcal{E}_n) = \mathcal{F}_n$.

Q34. La matrice $B = (B_{i,j}) \in \mathcal{M}_n$ définie par :

$$B_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq i+1 = j \leq n \text{ ou } (i,j) = (n,1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est-elle l'exponentielle d'une matrice de $\mathcal{E}_n$?