

TD M1 - Description et paramétrage du mouvement d'un point

Table des matières

1	Tracé des vecteurs vitesse et accélération	1
1.1	Mouvement rectiligne uniforme	2
1.2	Mouvement rectiligne uniformément décéléré	2
1.3	Mouvement à vecteur accélération constant	2
2	Mouvement circulaire uniforme ou non uniforme	3
3	Test d'accélération d'une voiture	5
4	Interpellation pour vitesse excessive	5
5	Satellite géostationnaire	5

1 Tracé des vecteurs vitesse et accélération

On considère la trajectoire d'un mobile M dont on a relevé les positions à différents instants $t_i = t_0 + i \times \Delta t$ régulièrement espacés de $\Delta t = 0,1 \text{ s}$ à partir de l'instant initial t_0 qui correspond à la position M_0 du mobile. A l'instant t_i , le mobile est à la position $M(t_i) = M_i$. On note respectivement $\vec{v}_i = \vec{v}(t_i)$ et $\vec{a}_i = \vec{a}(t_i)$, le vecteur vitesse et le vecteur accélération à l'instant t_i .

Comme l'intervalle de temps Δt est suffisamment petit, on peut utiliser la méthode des différences finies symétriques et considérer avec une bonne approximation que :

$$\vec{v}_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \overrightarrow{OM}}{\Delta t} \approx \frac{\overrightarrow{OM_{i+1}} - \overrightarrow{OM_{i-1}}}{t_{i+1} - t_{i-1}} = \frac{\overrightarrow{M_{i-1}M_{i+1}}}{2\Delta t}$$

De la même manière, on pourra considérer que :

$$\vec{a}_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \approx \frac{\vec{v}_{i+1} - \vec{v}_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} \approx \frac{\vec{v}_{i+1} - \vec{v}_{i-1}}{2\Delta t}$$

On tracera les vecteurs vitesse avec l'échelle $1 \text{ cm} \Leftrightarrow 2 \text{ m.s}^{-1}$ et les vecteurs accélération avec l'échelle $1 \text{ cm} \Leftrightarrow 5 \text{ m.s}^{-2}$.

1.1 Mouvement rectiligne uniforme

On considère le mouvement d'un palet de hockey sur glace sur le figure 1 :

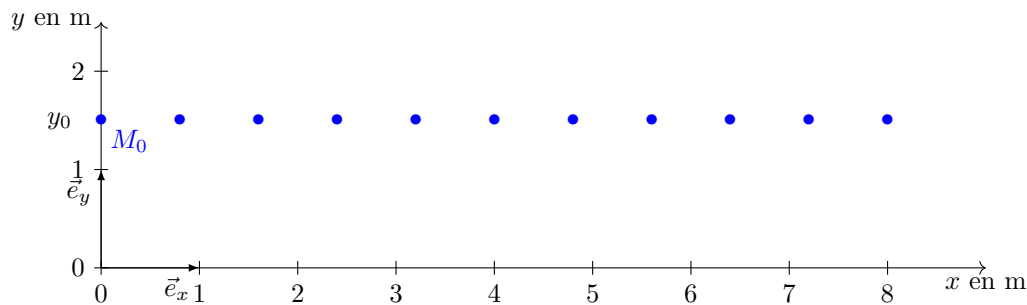


Figure 1 – Mouvement rectiligne uniforme

1.1.1. Tracer les vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$. Que remarque-t-on ?

1.1.2. En déduire les caractéristiques des vecteurs $\vec{a}_i$.

1.1.3. Sachant que la vitesse initiale est $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ avec $v_0 = 8 \text{ m.s}^{-1}$, trouver l'expression des équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ du mouvement du palet.

1.2 Mouvement rectiligne uniformément décéléré

On considère le mouvement d'un palet de hockey sur une surface rugueuse sur la figure 2 :

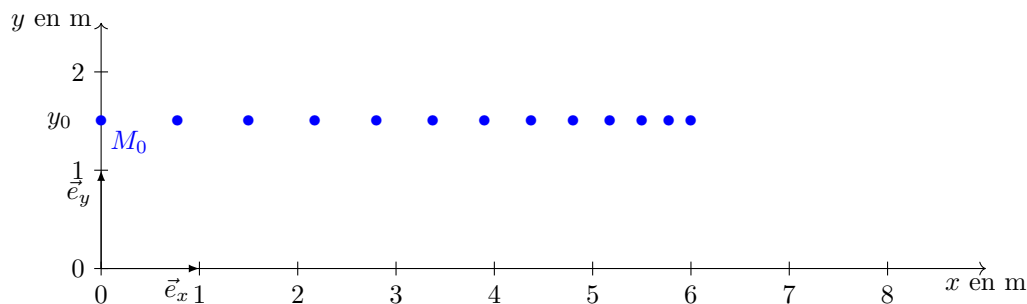


Figure 2 – Mouvement rectiligne décéléré

1.2.1. Tracer les vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ et $\vec{v}_4$.

1.2.2. En déduire les caractéristiques des vecteurs $\vec{a}_2$ et $\vec{a}_3$. Que remarque-t-on ?

1.2.3. Sachant que la vitesse initiale est $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ avec $v_0 = 8 \text{ m.s}^{-1}$ et que $\vec{a} = a \vec{u}_x$ avec $a = -5 \text{ m.s}^{-2}$, trouver l'expression des équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ du mouvement du palet.

1.3 Mouvement à vecteur accélération constant

On considère le mouvement d'un projectile M dans un plan vertical sur la figure 3 :

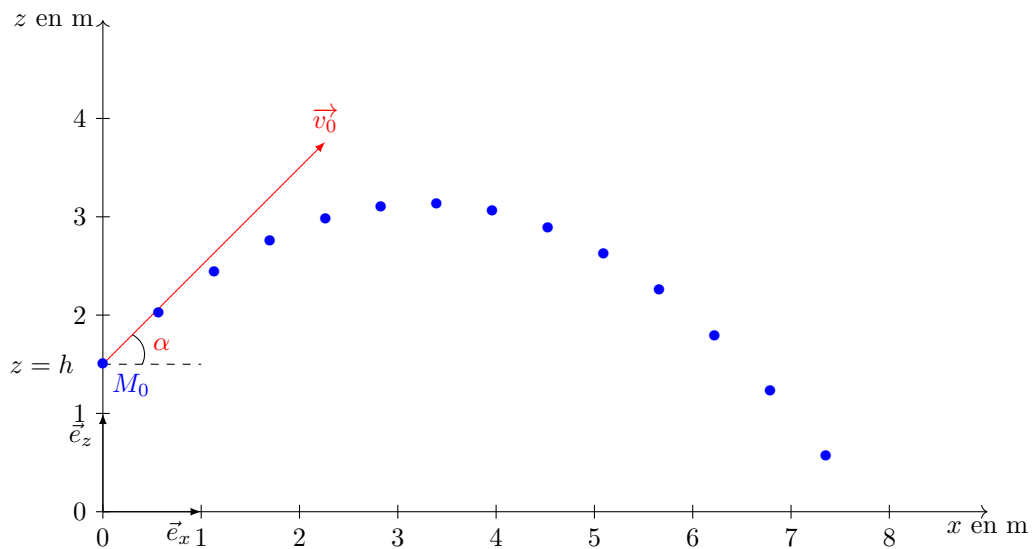


Figure 3 – Mouvement à vecteur accélération constant

1.3.1. Tracer les vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ et $\vec{v}_4$.

1.3.2. En déduire les caractéristiques des vecteurs $\vec{a}_2$ et $\vec{a}_3$. Que remarque-t-on ?

1.3.3. Sachant que la vitesse initiale $\vec{v}_0$ est telle que $v_0 = 8 \text{ m.s}^{-1}$ et $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\vec{a} = -g \vec{u}_z$ avec $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$, trouver l'expression des équations horaires $x(t)$ et $z(t)$ du mouvement du mobile.

1.3.4. En déduire l'équation de la trajectoire $z(x)$. Comment s'appelle ce type de courbe ?

2 Mouvement circulaire uniforme ou non uniforme

On se place dans la base polaire pour décrire le mouvement circulaire d'un point M repéré par $\rho(t) = R = 1 \text{ m}$ et $\theta(t)$, dont on donnera les caractéristiques plus loin, représenté sur la figure 4 :

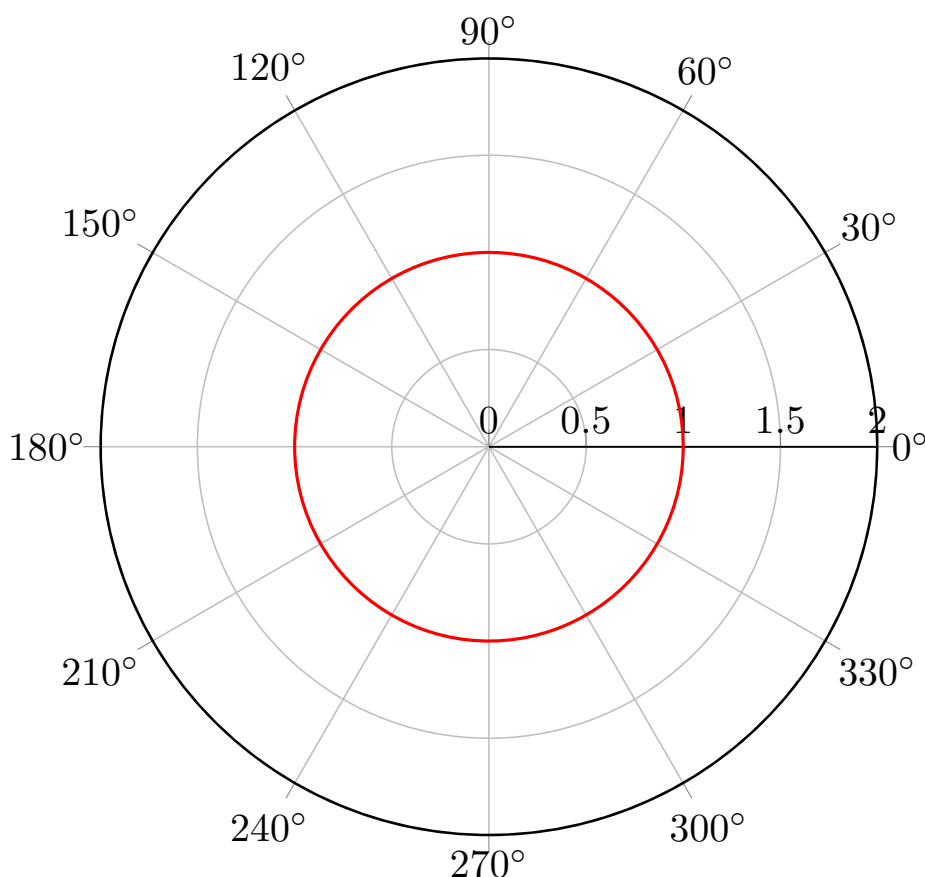


Figure 4 – Mouvement circulaire

2.1. Représenter les vecteurs $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ de la base cartésienne en O et les vecteurs $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$ de la base polaire en $M(1, \frac{\pi}{6})$.

2.2. Exprimer les vecteurs de la base polaire dans la base cartésienne.

2.3. Montrer que $\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta$ et $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{e}_\rho$.

2.4. En déduire l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ et du vecteur accélération $\vec{a}$ dans la base polaire en fonction de R , $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$.

2.5. On note $v = R\dot{\theta}$, montrer que $\vec{a} = -\frac{v^2}{R} \vec{e}_\rho + R\ddot{\theta} \vec{e}_\theta$.

Dans un premier temps, on considère un mouvement circulaire uniforme, c'est-à-dire tel que la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est constante. On donne $\dot{\theta} = 2\pi \text{ rad.s}^{-1}$.

2.6. En déduire que $\|\vec{v}\| = cst$ et calculer sa valeur.

2.7. En déduire que l'accélération est radiale, donner son expression et calculer sa norme, puis tracer son allure en $M(1, \frac{\pi}{6})$.

Dans un second temps, on considère un mouvement circulaire non uniforme, c'est-à-dire tel que la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ n'est pas constante. On donne $\ddot{\theta} > 0$.

2.8. Dans quel sens tourne le point M ?

2.9. Représenter l'allure de $\vec{a}$ en $M(1, \frac{7\pi}{6})$ dans le cas où $\ddot{\theta} > 0$ (mouvement accéléré) et dans le cas où $\ddot{\theta} < 0$ (mouvement décéléré)

3 Test d'accélération d'une voiture

Une voiture est chronométrée pour un test d'accélération en ligne droite avec départ arrêté (vitesse initiale nulle).

3.1. Elle est chronométrée à 26,6 s au bout d'une distance $D = 180$ m. Déterminer l'accélération (supposée constante) et la vitesse atteinte à la distance D .

3.2. Quelle est alors la distance d'arrêt pour une décélération de 7 m.s^{-2}

4 Interpellation pour vitesse excessive

Un conducteur roule à vitesse constante v_0 sur une route rectiligne. Comme il est en excès de vitesse à 100 km.h^{-1} , un gendarme à moto démarre à l'instant où la voiture passe à sa hauteur et accélère uniformément. Le gendarme atteint la vitesse de 90 km.h^{-1} au bout de 10 s.

4.1. Quel sera le temps nécessaire au motard pour rattraper la voiture ?

4.2. Quelle distance aura-t-il parcourue ?

4.3. Quelle vitesse aura-t-il alors atteinte ?

5 Satellite géostationnaire

Un satellite géostationnaire est en mouvement circulaire uniforme autour de la Terre. Il subit une accélération $a = g_0 \left(\frac{R}{r} \right)^2$, où $R = 6380$ km est le rayon de la Terre, $g_0 = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ et r est le rayon de l'orbite. La période de révolution du satellite est égale à la période de rotation de la Terre sur elle-même.

5.1. Calculer la période T de rotation de la Terre en secondes, puis sa vitesse angulaire Ω .

5.2. Déterminer l'altitude du satellite en orbite géostationnaire.

5.3. Déterminer sa vitesse sur sa trajectoire et calculer sa norme.