

Espaces vectoriels Chapitre 2

Corrections exercices types

Exercice 1. exo 2-1 On cherche $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que : $e_4 = ae_1 + be_2 + ce_3$.

On est ramené à résoudre un système d'équations linéaires de 3 équations à 3 inconnues :

$$\begin{cases} -a + 3b = 1 \\ 2a - 5b + c = -1 \\ -b - 2c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 3b = 1 \\ b + c = 1 \\ b + 2c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2 \\ b = 3 \\ a = 8 \end{cases}$$

Finalement : $e_4 = 8e_1 + 3e_2 - 2e_3$.

Exercice 2. exo 2-2 Soit $P_1(x) = x^2 + 1$, $P_2(x) = x^3 - x$, $P_3(x) = 2x$.

P_1 n'est pas combinaison linéaire de P_2 et P_3 car sinon il existerait $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, tels que $P_1 = aP_2 + bP_3$, or, $\deg(P_1) = 2$ et $\deg(P_2) = 3$ donc cette égalité est impossible.

Exercice 3. exo2-3

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 3y - z = 0\}$. Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

1- $F \subset \mathbb{R}^3$ par définition de F .

2- $(0, 0, 0) \in F$ car $0 + 3 \times 0 - 0 = 0$ donc F non vide.

3- $\forall (u, v) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, montrons que $\lambda u + v \in F$.

On pose $u = (x, y, z)$, $v = (x', y', z')$ alors on a par propriétés $\lambda u + v = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')$.

Il nous faut donc voir si $\lambda x + x' + 3(\lambda y + y') - (\lambda z + z') = 0$?

$$\text{On a : } \lambda x + x' + 3(\lambda y + y') - (\lambda z + z') = \underbrace{\lambda x + 3\lambda y - \lambda z}_{=0 \text{ car } u \in F} + \underbrace{x' + 3y' - z'}_{=0 \text{ car } v \in F} = 0.$$

Donc $\lambda u + v \in F$.

Par 1, 2, 3 on a montré que F est un sev de $\mathbb{R}^3$. Donc F est un ev.

Exercice 4. exo 2-4 Montrons que l'ensemble S des matrices symétriques à coefficients réels d'ordre n est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On a $S = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), {}^t M = M\}$.

1- $S \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par définition de S .

2- La matrice nulle O_n est symétrique ${}^t O_n = O_n$, donc $O_n \in S$ et S est non vide.

3- Soient (M, N) deux matrices de S et soit $\lambda \in \mathbb{R}$ alors montrons que $\lambda M + N \in S$.

On a

$${}^t(\lambda M + N) = \lambda {}^t M + {}^t N \text{ par linéarité de la transposition}$$

$$= \lambda M + N \text{ car } M \in S, N \in S$$

Donc $\lambda M + N \in S$ et par conséquent par 1, 2, 3, l'ensemble S des matrices symétriques à coefficients réels d'ordre n est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5. exo 2-5 Soit $E = \{f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f - f' = 0\}$

Montrons que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

1- $E \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par définition de E .

2- La fonction identiquement nulle notée θ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, sa dérivée est nulle et vérifie trivialement $\theta(x) = \theta'(x) = 0$. Donc $\theta \in E$ et E est non vide.

3- $\forall (f, g) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, montrons que $\lambda f + g \in E$.

On a par somme de fonctions C^1 sur $\mathbb{R}$ que $\lambda f + g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Puis,

$$\begin{aligned} (\lambda f + g)(x) - (\lambda f + g)'(x) &= \lambda f(x) + g(x) - \lambda f'(x) - g'(x) \text{ par propriétés des fonctions et par linéarité de la dérivation} \\ &= \lambda(f(x) - f'(x)) + g(x) - g'(x) \\ &= 0 + 0 \text{ car } f \in E, g \in E \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $\lambda f + g \in E$.

Par 1, 2, 3 on a montré que E est un sev de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Donc E est un ev.

Exercice 6. exo 2-6 Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $E = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.
Montrons que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

1. E est inclus dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par définition de E .
2. La matrice nulle $O_3 \in E$ car $AO_3 = O_3 = O_3A$ donc E non vide.
3. Soient M et N de E et α réel alors
 $A(\alpha M + N) = \alpha AM + AN$ (par opérations matricielles) $= \alpha MA + NA$ (car $M, N \in E$) $= (\alpha M + N)A$
 (par opérations matricielles).
 Donc $(\alpha M + N) \in E$
 Conclusion par 1,2,3 : E est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 7. exo 2-7

1. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 3y - z = 0\}$. Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

On a :

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 3y - z = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = -3y + z\} \\ &= \{(-3y, y, 0) + (z, 0, z), (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{y(-3, 1, 0) + z(1, 0, 1), (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{vect} \left(\underbrace{(-3, 1, 0)}_u, \underbrace{(1, 0, 1)}_v \right) \end{aligned}$$

Par conséquent $F = \text{vect}((u, v))$ avec (u, v) famille génératrice de F donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ en tant que sous-espace vectoriel engendré par la famille (u, v) .

2. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0, \text{ et } x + 2y - 3z = 0\}$. Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

On résout tout d'abord le système d'équation linéaire à deux équations et trois inconnues :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5z \\ y = 4z \end{cases}$$

$$\text{Donc } F = \text{vect} \left(\underbrace{(-5, 4, 1)}_u \right) = \text{vect}((u)).$$

Par conséquent F est sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ en tant que sous-espace vectoriel engendré par la famille (u) .

3. Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & b \\ b & a+b \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$. Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On a :

$$\begin{aligned} F &= \left\{ \begin{pmatrix} a+b & b \\ b & a+b \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{vect} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_J \right) \end{aligned}$$

Par conséquent F est sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ en tant que sous-espace vectoriel engendré par la famille (I_2, J) .

Exercice 8. exo 2-8 Montrer les propositions suivantes

- L'intersection de deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E , est un sous-espace vectoriel de E .
 Soient F_1 et F_2 deux sev de E . Montrons que $F_1 \cap F_2$ est un sev de E .
 $F_1 \cap F_2 \subset E$ car F_1 et F_2 sont inclus dans E .
 $0_E \in F_1 \cap F_2$ car $0_E \in F_1$ et $0_E \in F_2$ (car F_1 et F_2 deux sev de E).
 Soient x et y éléments de $F_1 \cap F_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
 Donc x et y sont éléments de F_1 et de F_2 et comme F_1 et F_2 sont deux sev de E , on a $\lambda x + y \in F_1$ et F_2 donc $\lambda x + y \in F_1 \cap F_2$.
 Conclusion : l'intersection de deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E , est un sous-espace vectoriel de E .

— Généralisation : toute intersection de sev de E est un sev de E .

On le montre par récurrence.

Montrons pour tout entier naturel n non nul que si $\forall i \in 1, \dots, n, F_i$ sev de E alors $\bigcap_{i=1}^n F_i$ est un sev de E .

Initialisation : $n = 1$ c'est trivial : F_1 est un sev de E et d'après 1) c'est vrai pour $n = 2$.

Hérédité : soit n un entier naturel non nul et supposons que si $F_1, \dots, F_n$ sont des sev de E alors $\bigcap_{i=1}^n F_i$ est un sev de E .

On a F_{n+1} sev de E et par HR on a $\bigcap_{i=1}^n F_i$ est un sev de E .

Alors d'après la question 1 : $F_{n+1} \cap \bigcap_{i=1}^n F_i$ est un sev de E .

Donc l'hérédité est vérifiée.

Conclusion : toute intersection de sev de E est un sev de E .

— Soit S un système linéaire homogène à n inconnues $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\mathcal{S}$ son ensemble solution.

Alors, $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On a le système homogène suivant p équations à n inconnus :

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 & (L_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 & (L_2) \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n = 0 & (L_p) \end{cases}$$

On a $(S_i) : a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = 0 \quad (L_i)$ on note alors $\mathcal{S}_i$ l'ensemble des solutions de la ligne i .

Alors $\mathcal{S}$ est l'intersection des $\mathcal{S}_i$: $\mathcal{S} = \bigcap_{i=1}^p \mathcal{S}_i$.

Les $\mathcal{S}_i$ qui sont des n -uplets sont des sev de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

- $\mathcal{S}_i \subset \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

- $(0, \dots, 0) \in \mathcal{S}_i$

- si X et Y sont solutions de (S_i) alors une combinaison linéaire de X et Y est encore solution de (S_i) .

Donc d'après la généralisation $\mathcal{S}$ étant l'intersection de sev, il est lui-même un sev $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 9. exo 2-9 Ecrivons les ensembles suivants sous forme de sous espace engendré, et précisons dans quel espace vectoriel.

Idée : il faut paramétrer les éléments.

$$\bullet E = \{x \mapsto \alpha \ln(x) + \beta \exp(x) \text{ pour } x \in \mathbb{R}_+^* / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \text{vect} \left(\underbrace{x \mapsto \ln(x)}_{f_1}, \underbrace{x \mapsto \exp(x)}_{f_2} \right).$$

Par conséquent E est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}), +, \cdot)$ en tant que sous-espace vectoriel engendré par la famille (f_1, f_2) .

$$\bullet F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / AM = MA\} \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il s'agit de trouver la forme des matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ telles que $AM = MA$.

On résout donc $AM = MA$:

$$\text{On trouve par calcul direct : } AM = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } MA = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $AM = MA \Leftrightarrow b = c = 0$.

$$\text{Les matrices } M \text{ de } F \text{ s'écrivent donc sous la forme : } M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, (a, d) \in \mathbb{R}^2 = \underbrace{a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_U + \underbrace{d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_V.$$

Par conséquent $F = \text{vect}((U, V))$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ en tant que sous-espace vectoriel engendré par la famille (U, V) .

$$\bullet G = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \right\}$$

On résout tout d'abord le système d'équation linéaire à deux équations et trois inconnues :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ z = y \end{cases}.$$

$$\text{Donc } G = \text{vect} \left(\underbrace{(-2, 1, 1)}_u \right) = \text{vect}((u)).$$

Par conséquent G est sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ en tant que sous-espace vectoriel engendré par la famille (u) .

• $H = \{P \in \mathbb{R}_2[x] / P - xP' = 0\}$ Il s'agit de trouver un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[x]$ donc de la forme $a_0 + a_1x + a_2x^2$ tel que : $P - xP' = 0$.

$$P - xP' = 0 \Leftrightarrow a_0 + a_1x + a_2x^2 - x(a_1 + 2a_2x) = 0 \Leftrightarrow a_0 - a_2x^2 = 0.$$

D'où par principe d'identification des coefficients cela entraîne que : $a_0 = a_2 = 0$.

D'où $P \in H \Leftrightarrow P = ax$ avec $a \in \mathbb{R}$.

D'où $H = \text{vect}((x))$.

Par conséquent H est sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[x]$ en tant que sous-espace vectoriel engendré par la famille (x) .

Exercice 10. exo 2-10 Soit $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrons que (I, J) est libre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Il est clair que I et J ne sont pas proportionnelles donc la famille (I, J) est libre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 11. exo 2-11

Soit $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Montrons que (I, J, K) est liée dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On voit à l'oeil nu que $K = 3J + I$ donc la famille (I, J, K) est liée dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 12. exo 2-12

Soient les trois fonctions polynomiales de $\mathbb{R}_2[x]$, définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 - x + x^2, g(x) = 3 + x - 2x^2, h(x) = -1 - 3x + 4x^2.$$

Montrons que la famille (f, g, h) est liée.

On peut voir directement que $h(x) = 2f(x) - g(x)$ (sinon on résout $af(x) + bg(x) = h(x)$). Donc la famille (f, g, h) est liée.

Exercice 13. exo 2-13

Dans l'espace S des matrices symétriques d'ordre 2 à coefficients réels, on considère :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ montrons que la famille } (A, B, C) \text{ est une base de } S.$$

Tout d'abord, (A, B, C) sont bien trois matrices symétriques.

Ensuite on résout l'équation de liberté :

Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, $\alpha A + \beta B + \gamma C = O_2$ ce qui donne immédiatement (au vu de la position des zéros dans ces matrices) que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Donc la famille (A, B, C) est libre.

De plus toute matrice symétrique est de la forme $M = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} = aA + bB + cC$, donc la famille (A, B, C) est génératrice de S .

Conclusion : la famille (A, B, C) est une base de S .

Exercice 14. exo 2-14

Soit $u = (-1, 2, 0), v = (3, -5, -1), w = (0, 1, -2)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Montrons que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Tout d'abord $\text{card}((u, v, w)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ donc il suffit de prouver que la famille (u, v, w) est libre.

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on résout l'équation de liberté :

$$au + bv + cw = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 3b = 0 \\ 2a - 5b + c = 0 \\ -b - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3b \\ b = -c \\ b = -2c \end{cases} \Leftrightarrow \{a = b = c = 0\}.$$

Donc la famille (u, v, w) est libre (2).

De (1) et (2) on en déduit que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 15. exo 2-15 Dans $(\mathcal{A}([0, +\infty[; \mathbb{R}), +, \cdot)$ montrons que la famille $(x \mapsto \ln(x), x \mapsto \exp(x))$ est libre.

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on résout l'équation de liberté :

$$\forall x > 0, \alpha \ln(x) + \beta e^x = 0.$$

Or, cette équation étant vraie pour tout réel $x > 0$, elle est vraie en particulier quand $x = 1$ et $x = e$, ce qui donne :

si $x = 1 : \beta = 0$ et si $x = e, \alpha = 0$.

Par conséquent la famille $(x \mapsto \ln(x), x \mapsto \exp(x))$ est libre.

Exercice 16. exo 2-16 Quelles sont les coordonnées de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$?

$$\text{On a } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent les coordonnées de la matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ sont $(1, 2, 0, 3, 1, 2)$.

Exercice 17. exo 2-17 Soit $\mathcal{B} = ((1, 2), (2, 1), (1, 1))$, est-elle libre dans $\mathbb{R}^2$?

La réponse est non car cette famille est constituée de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^2$ alors que la dimension de $\mathbb{R}^2$ est 2.

$$\text{card}(\mathcal{B}) = 3 \neq 2 = \dim(\mathbb{R}^2).$$

Soit $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (1, 2, 1))$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$? Là aussi c'est non car la famille est constituée de 2 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ ce qui est insuffisant car la dimension de $\mathbb{R}^3$ est 3.

$$\text{card}(\mathcal{B}) = 2 \neq 3 = \dim(\mathbb{R}^3).$$

Exercice 18. exo 2-18 Soit $F = \text{Vect}((1, 2), (2, 1))$. Montrons que $F = \mathbb{R}^2$.

Tout d'abord $F \subset \mathbb{R}^2$ (1).

Puis la famille $((1, 2), (2, 1))$ est une famille génératrice de F (par définition de F) et libre car $(1, 2)$ et $(2, 1)$ non colinéaires. C'est donc une base de F d'où $\dim(F) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$ (2).

De (1) et (2) on en tire alors que $F = \mathbb{R}^2$.

Exercice 19. exo 2-19 Soit $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$, et $\mathcal{B}' = (R_0, R_1, R_2)$, où $R_0(x) = 1, R_1(x) = x - 1$ et $R_2(x) = (x - 1)^2$, une autre base de cet espace. Déterminons la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ puis la matrice de passage Q de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

D'après le cours il suffit d'écrire en colonne, les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$.

On utilise aussi le fait que $R_0(x) = 1, R_1(x) = -1 + x$ et $R_2(x) = 1 - 2x + x^2$,

$$\text{D'où } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

P étant la matrice de passage entre les deux bases $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, P est donc inversible et on sait d'après le cours que la matrice de passage Q de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ est donnée par $Q = P^{-1}$.

$$\text{On inverse } P \text{ et on trouve par réduite de Gauss que } Q = P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $R(x) = 4x^2 - 3x + 7$. Pour avoir ses coordonnées dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$, on utilise la formule de changement de base, en notant X le vecteur colonne associé à R dans $\mathcal{B}$, X' le vecteur colonne associé à R dans $\mathcal{B}'$:

$$X' = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}^{-1} \cdot X.$$

$$\text{D'où : } X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}. \text{ D'où } R(x) = 4x^2 - 3x + 7 \text{ s'écrit dans la base } \mathcal{B}' \text{ par : } R'(x) = 8 + 5x + 4x^2.$$