

Feuille d'exercices 24

Géométrie dans l'espace

Sauf mention contraire, les coordonnées sont données dans un repère orthonormé fixé.

— **Exercice 1** ●○○ — **Points coplanaires (ou pas)** Soient les points $A(3, 3, 5)$, $B(0, 4, 1)$, $C(4, 2, 11)$, $D(2, 3, 6)$ et $E(3, 0, -1)$.

- Vérifiez que les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux.
- On veut savoir si les droites (BE) et (CD) sont perpendiculaires, c'est-à-dire si elles se coupent selon un angle droit.
 - (Méthode du lycée) Donner une équation paramétrique de ces deux droites. Conclure.
 - (Méthode de cette année). Les points B, C, D et E sont-ils coplanaires? Conclure.
Idée : Quel nouveau outil permet de savoir si des vecteurs sont coplanaires?
- On veut savoir si A, B, C et D sont coplanaires.
 - (Méthode du lycée) Donner une équation cartésienne du plan (ABC) . Conclure.
 - (Méthode de cette année). Voir idée précédente.
- Donner une équation paramétrique de la droite orthogonale au plan (ABC) et passant par E .

— **Exercice 2** ●○○ — **Distance à un plan ou à une droite**

- Calculer la distance du point $A(1, 2, 1)$ au plan $\mathcal{P}$ d'équation $x - y + z - 2 = 0$, et déterminer les coordonnées de H , le projeté orthogonal de H sur $\mathcal{P}$.
- Calculer la distance du point $B(1, 2, 3)$ à la droite $\mathcal{D}$ passant par $C(1, -1, 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-2, 1, 4)$, et déterminer les coordonnées de H , le projeté orthogonal de H sur $\mathcal{D}$.

— **Exercice 3** ●○○ — **Intersection de droites à paramètre** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et soient les deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ définies par les équations suivantes :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x + \lambda z = 1 \\ y - z = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}' : \begin{cases} y + 2z = 0 \\ -x + z = 3 \end{cases}.$$

Déterminer les réels λ tels que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ont un point en commun.

— **Exercice 4** ●●○ — **Points equistants à deux plans** Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x + 6y - 3z + 10 = 0$ et $\mathcal{P}'$ le plan d'équation $-4x + 7y - 4z + 8 = 0$. Déterminer l'ensemble des points équidistants à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

Correction :

Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace. Ecrivons les distances de M aux plans :

$$\begin{cases} d(M, \mathcal{P}) = \frac{|2x+6y-3z+10|}{\sqrt{2^2+6^2+9^2}} = \frac{|2x+6y-3z+10|}{7} \\ d(M, \mathcal{P}') = \frac{|-4x+7y-4z+8|}{\sqrt{4^2+7^2+8^2}} = \frac{|-4x+7y-4z+8|}{9} \end{cases}.$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} d(M, \mathcal{P}) = d(M, \mathcal{P}') &\iff \frac{|2x + 6y - 3z + 10|}{7} = \frac{|-4x + 7y - 4z|}{9} \\ &\iff |18x + 54y - 27z + 90| = |-28x + 49y - 28z + 56|. \end{aligned}$$

Or on a $|a| = |b|$ si et seulement si $a = \pm b$. Ainsi, on a après calculs :

$$d(M, \mathcal{P}) = d(M, \mathcal{P}') \iff 46x + 5y + z + 34 = 0 \quad \text{ou} \quad -10x + 103y - 55z + 146 = 0$$

Notons $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ les deux plans d'équation ci-dessus. Alors l'ensemble des points à égale distance de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ est $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$.

Pensez à le visualiser avec des feuilles de papier ! Notez que ces deux plans sont perpendiculaires (le vérifier en faisant le produit scalaire des normales), ce que l'on peut montrer facilement dans un plan : étant données deux droites fixées, les deux bissectrices se coupent perpendiculairement.

— **Exercice 5** ●○○ — **Angles entre deux plans** Reprenons les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ de l'exercice précédent. Déterminer l'angle entre $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ (on pourra noter que c'est l'angle entre leurs vecteurs normaux).

Correction : On détermine des normales via les équations des plans :

$$\vec{n} = (2, 6, -3) \quad \text{et} \quad \vec{n}' = (-4, 7, 4).$$

leur produit scalaire vaut $\vec{n} \cdot \vec{n}' = -8 + 42 - 12 = 22$, puis l'angle θ entre ces deux normales vérifie :

$$22 = \|\vec{n}\| \|\vec{n}'\| \cos(\theta) \iff 22 = 72 \cos(\theta) \iff \cos(\theta) = \frac{22}{72}.$$

si on choisit la mesure dans $[0, \pi]$, alors l'angle entre les deux normales, qui est aussi l'angle entre les deux plans, est : $\theta = \arccos(\frac{22}{72})$. Notez que l'énoncé parle de « l'angle entre les plans » sans préciser l'orientation, ce qui est normale, car sans fixer de repère de l'espace, on ne peut pas parler d'orientation.

— Exercice 6 ●●○ — Equation de sphère

On considère l'ensemble $\mathcal{S}$ des points $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ qui vérifient

$$x^2 - 6x + y^2 + 4y + z^2 - 2z = 35.$$

1. Décrire $\mathcal{S}$ géométriquement, en donnant ses éléments caractéristiques.
2. Montrer que $B(5, 1, 7)$ appartient à $\mathcal{S}$.
3. Déterminer une équation du plan tangent à $\mathcal{S}$ en B .
4. Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de $\alpha \in \mathbb{R}$, la section de $\mathcal{S}$ avec le plan d'équation $2x + 3y + 6z + \alpha = 0$ est un cercle de rayon 3.

Correction :

1. On utilise la forme canonique, à maîtriser absolument :

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + y^2 + 4y + z^2 - 2z = 35 &\iff (x-3)^2 - 9 + (y+2)^2 - 4 + (z-1)^2 - 1 = 35 \\ &\iff (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 49 \end{aligned}$$

Il s'agit donc de la sphère de centre de $\Omega(3, -2, 1)$ et de rayon $\sqrt{49} = 7$.

2. On vérifie (de préférence dans la forme canonique) que B satisfait les équations de $\mathcal{S}$.
3. Soit $\mathcal{P}$ ce plan tangent, on a :

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in \mathcal{P} &\iff \overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{B\Omega} \iff \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{B\Omega} = 0 \iff \begin{pmatrix} x-5 \\ y-1 \\ z-7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff -2x - 3y - 6z + 55 = 0 \end{aligned}$$

4. Notons E_α le plan concerné. Il faut voir les choses avec un dessin (voir cours) : l'intersection est un cercle (éventuellement vide) contenu dans le plan E_α . Son

centre C est le projeté de Ω sur le plan E_α , et $\|\overrightarrow{WC}\| = d(\Omega, E_\alpha)$ (la distance du point Ω au plan E_α). On calcule cette distance avec la formule du cours :

$$d(\Omega, E_\alpha) = \frac{|2 \times 3 + 3 \times (-2) + 6 \times 1 + \alpha|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = \frac{|6 + \alpha|}{7}.$$

Ensuite, on voit que le rayon r de ce cercle et le rayon $R = 7$ de la sphère vérifie, d'après Pythagore :

$$d(\Omega, E_\alpha) + r^2 = R^2 \iff r^2 = 49 - \frac{(6 + \alpha)^2}{49}$$

Ainsi

$$r = 3 \iff 9 = 49 - \frac{(6 + \alpha)^2}{49}.$$

On résout facilement cette équation de degré 2 : $\alpha = -6 \pm 14\sqrt{10}$. Géométriquement, on a deux plans qui conviennent, ce qui est cohérent. Notez qu'on n'a pas eu à déterminer le point C !

— Exercice 7 ●●○ — Etudier un tétraèdre

Soit $\mathcal{T}$ un tétraèdre régulier de côté 1.

1. Calculer sa hauteur et son volume (rappel : ce volume vaut $\frac{1}{3} \text{base} \times \text{hauteur}$).
2. Combien d'arêtes a ce solide ? Déterminer la distance entre deux arêtes non coplanaires. (On pourra d'abord montrer que cette distance est celle entre les milieux des arêtes).

— Exercice 8 ●●● — Une equation originale

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On s'intéresse à l'équation

$$\vec{u} \wedge \vec{x} = \vec{v}, \text{ d'inconnue } \vec{x} \in \mathbb{R}^3.$$

1.
 - a. Résoudre le problème si $\vec{u} = \vec{v} = \vec{0}$.
 - b. Résoudre le problème si $\vec{u} = \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
 - c. Résoudre le problème si $\vec{v} = \vec{0}$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$.
2. On suppose désormais $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
 - a. Résoudre le problème si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.
 - b. On suppose désormais $\vec{u} \perp \vec{v}$.
 - (i) Justifier que $\vec{x}$ appartient au plan engendré par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$.
Idée : Quelle est une normale à ce plan ?

(ii) En déduire l'existence d'un couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\vec{x} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{u} \wedge \vec{v}.$$

(iii) Montrer que si $\vec{x}$ est solution, alors

$$\beta \vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{v}.$$

(iv) Montrer que $\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v})$ est colinéaire à $\vec{v}$, et que

$$\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = -\|\vec{u}\|^2 \vec{v}.$$

En déduire que $\beta = -\frac{1}{\|\vec{u}\|^2}$.

(v) Conclure que l'ensemble des solutions est

$$\left\{ \alpha \vec{u} - \frac{1}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} \wedge \vec{v}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Décrire cet ensemble.

Correction :

1.
 - a. N'importe quel $x \in \mathbb{R}^3$ est solution.
 - b. Il n'y a pas de solution car on aurait alors $\vec{0} = \vec{v} \neq \vec{0}$.
 - c. Dans ce cas, on $\vec{x}$ solution si et seulement si $\vec{u} \wedge \vec{x} = \vec{0}$, il s'agit donc des vecteurs orthogonaux à $\vec{u}$. L'ensemble des solutions est le plan vectoriel de vecteur normal $\vec{u}$.
2. On suppose désormais $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
 - a. Puisque $\vec{u} \wedge \vec{x}$ est orthogonal à $\vec{u}$, il n'y a pas de solution.
 - b. On suppose désormais $\vec{u} \perp \vec{v}$.
 - (i) Le vecteur $\vec{v}$ est orthogonal au vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ par définition du produit vectoriel, et il est aussi orthogonal à $\vec{u}$. Ainsi, le vecteur $\vec{v}$ est une normale au plan $\mathcal{P}$ engendré par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$. Mais, le vecteur $\vec{x}$ est orthogonal à $\vec{u} \wedge \vec{x} = \vec{v}$, il est donc contenu dans le plan $\mathcal{P}$.
 - (ii) Direct puisque $\vec{x}$ est contenu dans le plan.
 - (iii) Direct en injectant $\vec{x} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{u} \wedge \vec{v}$ dans l'équation et en utilisant que $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$.
 - (iv) Le vecteur $\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v})$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{u} \wedge \vec{v}$. Mais $\vec{v}$ aussi. Ainsi, ils sont colinéaires. On déduit la formule en prenant la norme et en pensant à l'orientation.
 - (v) Direct

Remarque : Un autre angle d'attaque est de résoudre l'équation homogène, l'ensemble des solutions est $\text{Vect}(\vec{u})$, puis de chercher une solution particulière, orthogonale à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$, donc colinéaire à $\vec{u} \wedge \vec{v}$, puis de trouver sa norme. On conclut ensuite par superposition.