

Exercice 1 : Champ de pression dans l'atmosphère (Oral CCINP)

On cherche à estimer la pression en haut de l'Everest à l'aide de deux modèles.

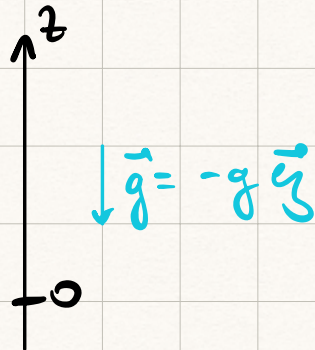
Dans un premier temps, on considère un modèle d'atmosphère isotherme dans lequel l'air, assimilé à un gaz parfait de masse molaire $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$ est au repos dans le champ de pesanteur uniforme g . On considérera que $T_0 = 293 \text{ K}$.

1. Rappeler la loi fondamentale de la statique des fluides.
2. Etablir la pression $P(z)$ en fonction de l'altitude z . Tracer P en fonction de z et faire apparaître une hauteur caractéristique H dont on donnera l'expression.
3. En déduire la pression en haut de l'Everest ($h = 8807 \text{ m}$).

Dans un deuxième modèle, on considère que la température T décroît avec l'altitude z suivant une relation affine du type : $T(z) = T_0(1 - az)$.

4. Au sommet de l'Everest, la température est $t_1 = -40^\circ \text{C}$. En déduire la constante a .
5. Déterminer la nouvelle loi de pression $p(z)$ en fonction de l'altitude z . On posera $H = \frac{RT_0}{Mg}$.
6. En déduire la pression au sommet de l'Everest.
7. La pression en haut de l'Everest est en réalité d'environ un tiers de la pression atmosphérique. Conclure.

1)2) Voir cours : $\rho \vec{g} = \text{grad } P \text{ (S)}$



$$(S) : -\rho g = \frac{dP}{dz}$$

Pour un GP: $\rho = \frac{MP}{RT}$

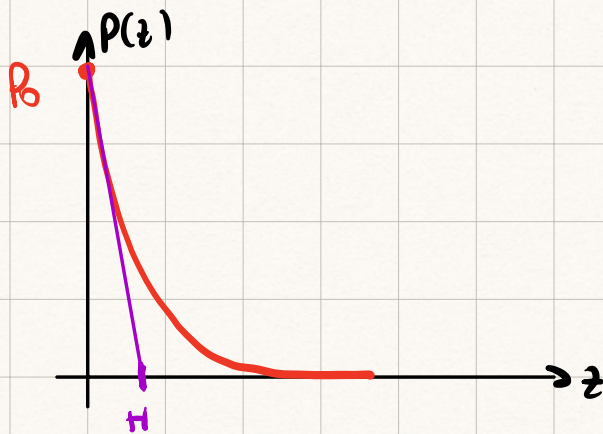
D'où : $-\frac{MPg}{RT} = \frac{dP}{dz}$

$$\Leftrightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT} dz$$

On pose $P_0 = P(z=0)$

Alors : $P = P_0 e^{-\frac{\rho g z}{RT}}$

On pose $H = \frac{RT_0}{\rho g}$ tel que $P(z) = P_0 e^{-\frac{z}{H}}$



3) A.N. $H = 8,57 \text{ km}$

$P(\text{excur}) = P(8807) = \underline{0,358 \text{ bar}}$

4) $T(z) = T_0 (1 - \alpha z)$

Or $T(8807) = -40^\circ\text{C} = 233 \text{ K}$
 $\quad \quad \quad \uparrow$
 $\quad \quad \quad T_1$

$$\Rightarrow T_1 = T_0 (1 - \alpha z_1)$$

$$\hookrightarrow T_1 - T_0 = -\alpha T_0 z_1$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \alpha &= -\frac{(T_1 - T_0)}{T_0 z_1} = \frac{T_0 - T_1}{T_0 z_1} \\ &= \underline{2,3 \cdot 10^{-5} \text{ m}^{-1}} \end{aligned}$$

$$\text{S) On repart de } \frac{dP}{dz} = -\rho g = -\frac{\pi P}{RT} g$$

$$\hookrightarrow \frac{dP}{dz} = -\frac{\pi P g}{RT_0(1-\alpha z)}$$

Séparation des variables:

$$\frac{dP}{P} = -\frac{\pi g}{RT_0} \frac{dz}{1-\alpha z} = -\frac{1}{H} \frac{dz}{1-\alpha z}$$

$$\int \frac{dP}{P} = + \frac{1}{Ha} \ln(1-\alpha z) + \text{cte}$$

$$\text{à } z=0 \quad p = p_0$$

$$\hookrightarrow \ln p_0 = \frac{1}{Ha} \ln(1) + \text{cte}$$

$$\hookrightarrow \ln p = \frac{1}{Ha} \ln(1 - \alpha z) + \ln p_0$$

$$\hookrightarrow \ln \left(\frac{p}{p_0} \right) = \ln \left((1 - \alpha z)^{\frac{1}{Ha}} \right)$$

BILAN :

$$p(z) = p_0 (1 - \alpha z)^{\frac{1}{Ha}}$$

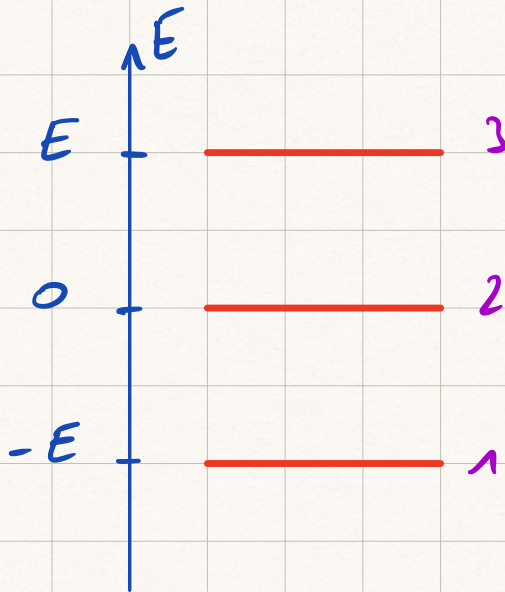
$$6) \quad p(8807) = 0,317 \text{ bar.}$$

7) $p_{\text{ Everest }} \sim \frac{1}{3} p_0$ Les deux modèles
donnent des résultats
conduisant peu à déterminer
la pression en haut de l'Everest.

Exercice 2 : Système à trois niveaux (Oral CCINP)

On considère un système dont les N atomes peuvent occuper trois niveaux d'énergie non dégénérés $E_1 = -E$, $E_2 = 0$ et $E_3 = E$ où E est une constante positive. Ce système est en équilibre avec un thermostat à la température T . Une telle situation se rencontre en Physique dans des problèmes de magnétisme.

1. Déterminer la probabilité d'occupation de chaque niveau d'énergie à la température T . On calculera la constante de normalisation.
2. Calculer les nombres moyens $\bar{N}_i$, pour $i = (1, 2, 3)$ d'atomes dans les trois états. Déterminer et commenter les limites de basse et de haute température. Représenter $\bar{N}_1(T)$, $\bar{N}_2(T)$ et $\bar{N}_3(T)$ sur un même graphe.
3. Calculer l'énergie moyenne $\bar{\epsilon}$ d'un atome. En déduire l'énergie moyenne $\bar{E}$ du système.
4. Représenter l'énergie moyenne du système en fonction de la température et commenter les limites haute et basse température.
5. Déterminer la capacité thermique à volume constant C_V du système et la représenter en fonction de la température. Commenter.



1) Thermostat T : on utilise le facteur de Boltzmann :

$$P(E_\mu) = \frac{1}{Z} e^{-\frac{E_\mu}{k_B T}}$$

$$\text{ou } Z = \sum_{\mu} e^{-\frac{E_\mu}{k_B T}}$$

$$\text{Ici : } Z = e^{+\frac{E}{k_B T}} + 1 + e^{-\frac{E}{k_B T}}$$

$$= 1 + 2\text{ch}\left(\frac{E}{k_B T}\right)$$

$$p(-E) = \frac{e^{+\frac{E}{k_B T}}}{1 + 2\text{ch}\left(\frac{E}{k_B T}\right)}$$

$$p(0) = \frac{1}{1 + 2\text{ch}\left(\frac{E}{k_B T}\right)}$$

$$p(E) = \frac{e^{-\frac{E}{k_B T}}}{1 + 2\text{ch}\left(\frac{E}{k_B T}\right)}$$

2) Par definition $\bar{N}_i = N p_i$

$$\rightarrow N_1 = \frac{N e^{+\frac{E}{k_B T}}}{1 + 2\text{ch}\left(\frac{E}{k_B T}\right)}$$

$$N_2 = \frac{N}{1 + 2 \operatorname{ch}(E/k_B T)}$$

$$N_3 = \frac{N e^{-\frac{E}{k_B T}}}{1 + 2 \operatorname{ch}(E/k_B T)}$$

Limite haute température : $k_B T \gg E$

donc $E/k_B T \rightarrow 0$ donc $\operatorname{ch}(E/k_B T) \rightarrow 1$

d'où $N_1 \xrightarrow{HT} \frac{N}{3}$

$$N_2 \xrightarrow{HT} \frac{N}{3}$$

$$N_3 \xrightarrow{HT} \frac{N}{3}$$

Limite basse température : $k_B T \ll E$

$$\Leftrightarrow \frac{E}{k_B T} \gg 1$$

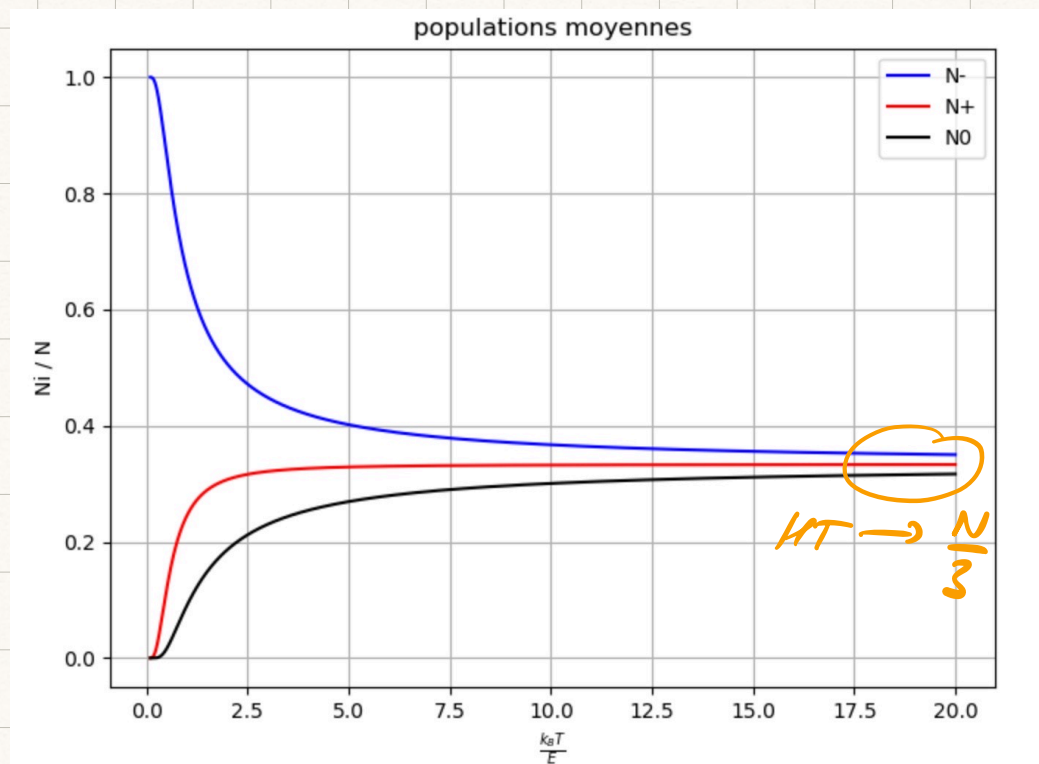
D'où $e^{-\frac{E}{k_B T}} \rightarrow 0 \iff N_3 \rightarrow 0$

et $\text{ch}\left(\frac{E}{k_B T}\right) \sim \frac{e^{\frac{E}{k_B T}}}{2}$

donc $N_2 \sim \frac{N}{1 + e^{\frac{E}{k_B T}}} = 0$

et $N_1 = \frac{N e^{\frac{E}{k_B T}}}{1 + e^{\frac{E}{k_B T}}} = N$

Tous les atomes sont dans le fondamental.



$$3) \quad \bar{\epsilon} = \sum_{\mu} \epsilon_{\mu} p_{\mu}$$

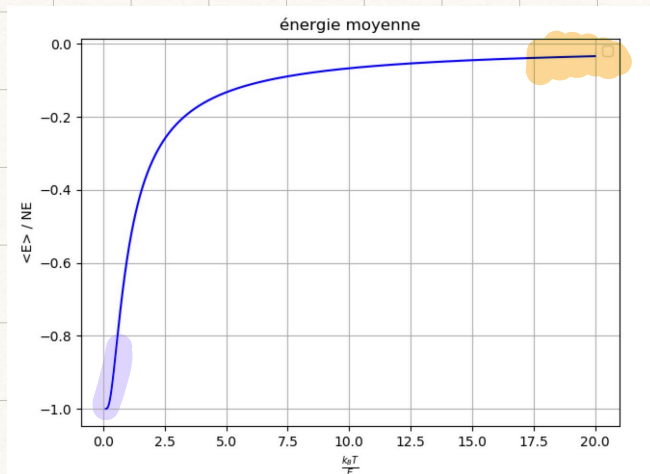
$$= -E \exp(-E) + 0 \times p(0) + E \exp(E)$$

$$= \frac{-E e^{\frac{E}{k_B T}} + E e^{-\frac{E}{k_B T}}}{1 + 2 \operatorname{ch}\left(\frac{E}{k_B T}\right)}$$

$$\bar{\epsilon} = \frac{-2E \operatorname{sh}\left(\frac{E}{k_B T}\right)}{1 + 2 \operatorname{ch}\left(\frac{E}{k_B T}\right)}$$

$$\bar{E} = N \bar{\epsilon} = \frac{-N E \operatorname{sh}\left(E/k_B T\right)}{\frac{1}{2} + \operatorname{ch}\left(E/k_B T\right)}$$

4)



Très basse température : $\bar{E} \rightarrow -NE$

$$\text{sh}\left(\frac{E}{k_B T}\right) \# \frac{e^{\frac{E}{k_B T}}}{2}$$

$$\text{ch}\left(\frac{E}{k_B T}\right) \# \frac{e^{E/k_B T}}{2}$$

Haute température : $k_B T \gg E \Leftrightarrow \frac{E}{k_B T} \ll 1$

$$\rightarrow \text{sh}\left(\frac{E}{k_B T}\right) \sim 0$$

$$\rightarrow \bar{E} \rightarrow 0$$

autour d'atomes de
chaque niveau.

$$5) C_V = \left. \frac{\partial \bar{E}}{\partial T} \right|_V$$

$$\bar{E} = N \bar{E} = \frac{-NE \text{sh}(E/k_B T)}{\frac{1}{2} + \text{ch}(E/k_B T)}$$

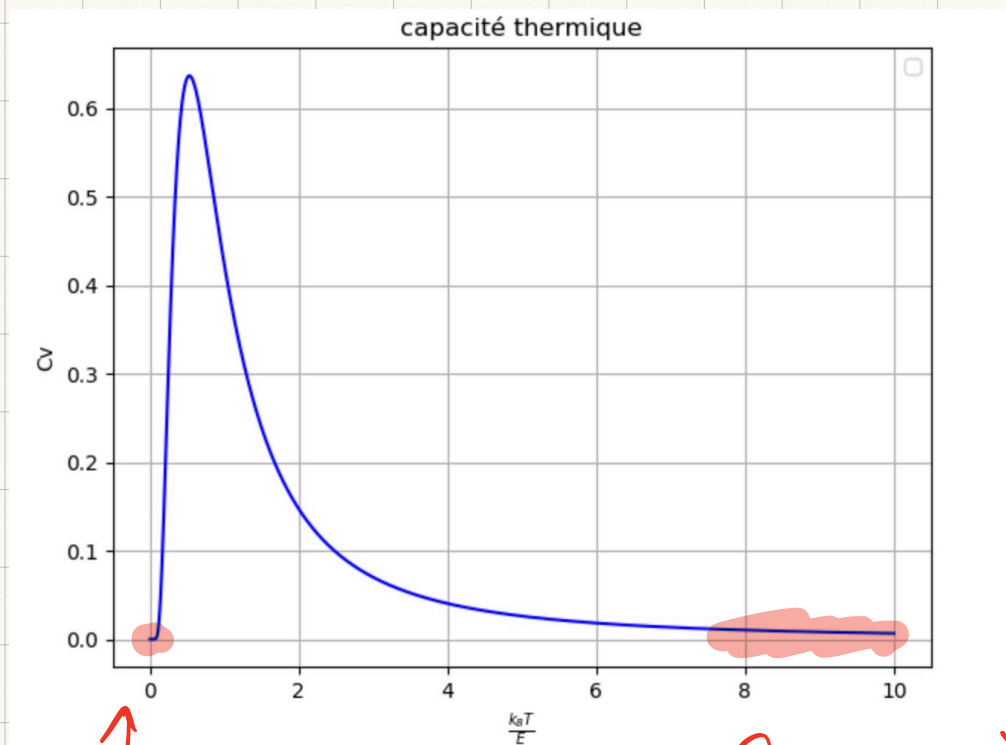
On pose $n = \frac{E}{\hbar \beta T}$

$$\rightarrow \bar{E}(x) = \frac{-NE \operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x) + 1/2}$$

$$C_V = \frac{\partial \bar{E}}{\partial T} = \frac{\partial \bar{E}}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial T} = \frac{\partial \bar{E}}{\partial x} \left(-\frac{E}{\hbar \beta T^2} \right)$$

D'où
$$C_V = \frac{NE^2}{\hbar \beta T^2} \times \left(\frac{\operatorname{ch}(x) (\operatorname{ch}(x) + \frac{1}{2}) - \operatorname{sh}^2 x}{(\frac{1}{2} + \operatorname{ch}(x))^2} \right)$$

$$C_V = \frac{NE^2}{\hbar \beta T^2} \frac{1 - \frac{1}{2} \operatorname{ch}(x)}{(\frac{1}{2} + \operatorname{ch}(x))^2}$$



$C_V \rightarrow 0$
Trop peu d'énergie
thermique pour
changer de niveau

$C_V \rightarrow 0$ à HT
(T n'a plus d'effet
sur les populations)

Exercice 3 : Quantique ou classique ? (Centrale)

On considère un compartiment contenant du dioxygène que l'on modélisera comme un gaz parfait diatomique.

1. En utilisant le théorème d'équipartition de l'énergie, déterminer la vitesse quadratique moyenne $u = \sqrt{\langle \|\vec{v}\|^2 \rangle}$ d'une molécule de dioxygène. Faire l'application numérique à température ambiante.
2. En déduire la longueur d'onde de de Broglie d'une molécule de dioxygène.
3. Estimer la distance moyenne entre deux molécules de dioxygène. *On commencera par déterminer la densité particulière du gaz.*
4. Devons-nous traiter l'étude du gaz de manière classique ou quantique ?

1) On s'intéresse à l'énergie cinétique de translation de la molécule de O_2 :

$$E_c = E_{cx} + E_{cy} + E_{cz}$$

$$= \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} m v_y^2 + \frac{1}{2} m v_z^2$$

Théorème d'équipartition : $\langle \frac{1}{2} m v_i^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T$

$$\rightarrow \langle E_c \rangle = 3 \times \frac{1}{2} k_B T$$

$$\text{Or } E_c = \frac{1}{2} m \|\vec{v}\|^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m \langle \|\vec{v}\|^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

$$\rightarrow \langle \|\vec{v}\| \rangle = \sqrt{\frac{3 k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3 R T}{M}}$$

$$R = k_B c \hbar A$$

$$T_0 = 300 \text{ K} :$$

$$M(\text{O}_2) = 32 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\langle \|\vec{v}\| \rangle = 4,8 \cdot 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$2) \lambda_{dB} = \frac{h}{\|\vec{p}\|} = \frac{h}{m \|\vec{v}\|} = 2,6 \cdot 10^{-14} \text{ m}$$

$$\text{avec } m = \frac{M}{cA}$$

$$\hbar = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

$$3) \text{ On rappelle } n^* = \frac{P}{k_B T_0} \quad k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$\text{avec } P = P_{\text{atm}} = 1 \text{ bar} \quad n^* = 2,4 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

$$n^* = \frac{N}{V}$$

Pour 1 molécule, le volume "accessible" est $V = \frac{1}{n^*}$

$$= 4,14 \cdot 10^{-26} \text{ m}^3$$

Soit un cube de côté $a = \sqrt[3]{V} = 3,5 \text{ nm}$.

4) $a \gg \lambda_{dB}$ Pas besoin d'un traitement quantique

Exercice 4 : Modèle d'Einstein des solides (*Oral Mines-Ponts*)

Afin de pouvoir évaluer précisément la capacité thermique d'un solide, on utilise le modèle unidimensionnel d'Einstein de 1907. Chaque atome de masse m est considéré comme un oscillateur harmonique au sens quantique à une dimension. Les niveaux d'énergie d'un tel système d'énergie potentielle $E_P(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ sont quantifiés : $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega$. On posera $u = \frac{\hbar\omega}{k_B T}$.

Le solide est modélisé par un ensemble de N atomes indépendants. Chaque atome pouvant se déplacer dans les trois directions de l'espace, on modélise le solide par $3N$ oscillateurs harmoniques à une dimension.

1. Déterminer l'énergie moyenne du solide $\bar{E}$ par application du théorème d'équipartition de l'énergie.
2. En déduire la capacité thermique du solide C_V et montrer que l'on obtient la loi de Dulong-Petit : $C_{V,m} = 3R$ où $C_{V,m}$ est la capacité thermique molaire du système.

Ce résultat constitue en réalité la limite haute température du modèle d'Einstein. Effectuons le calcul complet de la capacité thermique.

3. Pour un solide en équilibre thermique avec un thermostat de température T , exprimer la probabilité $p_n(u)$ qu'un atome soit dans l'état d'énergie E_n .
4. Montrer que l'énergie moyenne $\bar{e}$ d'un atome vaut : $\bar{e}(T) = \frac{\hbar\omega}{2} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right)$.
On donne : $\sum_{n=0}^{\infty} n \exp(-\alpha n) = \frac{1}{4\text{sh}^2 \frac{\alpha}{2}}$ pour $\alpha > 0$.
5. Evaluer la capacité thermique molaire $C_{V,mol}(T)$ du solide. On rappelle la relation $\frac{d\coth x}{dx} = -\frac{1}{\text{sh}^2 x}$.
6. Discuter des limites haute et basse température. Retrouver la loi de Dulong-Petit à haute température.
7. Tracer l'allure de $C_{V,mol}(T)$.

$$1) \quad E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega \quad n \in \mathbb{N}.$$

Energie mécanique d'un at.

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

Equipartition énergie: deux termes quadratiques en moyenne, chacun contribue comme $\frac{k_B T}{2}$

$$\langle E \rangle_{\text{ch}} = 2 \times \frac{k_B T}{2} = k_B T$$

$$\bar{E} = 3N \times \langle E \rangle_{\text{ch}} = 3N k_B T$$

$$2) \quad C_V = \frac{\partial \bar{E}}{\partial T} = 3N k_B = 3N \frac{R}{N_A} = 3nR$$

$$\Rightarrow C_{\text{mol}} = \frac{C_V}{n} = 3R$$

$$\begin{aligned} 3) \quad p_n(u) &= \frac{1}{Z} e^{-\frac{E_n}{k_B T}} \\ &= \frac{1}{Z} e^{-(n+\frac{1}{2}) \frac{\hbar \omega}{k_B T}} \\ &= \frac{1}{Z} e^{-(n+\frac{1}{2}) u} \end{aligned}$$

$$\text{or } Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{E_n}{k_B T}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\frac{1}{2}) \frac{\hbar \omega}{k_B T} u}$$

$$\begin{aligned}
 z &= e^{-\frac{u}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nu} = e^{-\frac{u}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-u})^n \\
 &= e^{-\frac{u}{2}} \times \frac{1 \times e^{\frac{u}{2}}}{(1 - e^{-u}) e^{\frac{u}{2}}}
 \end{aligned}$$

$$\rightarrow z = \frac{1}{e^{\frac{u}{2}} - e^{-\frac{u}{2}}} = \frac{1}{2 \operatorname{sh}\left(\frac{u}{2}\right)}$$

$$\rightarrow p_n(u) = 2 \operatorname{sh}\left(\frac{u}{2}\right) e^{-\frac{u}{2}} e^{-nu}$$

$$4) \quad \sum_{n=0}^{\infty} n \exp(-\alpha n) = \frac{1}{4 \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha}{2}} \text{ pour } \alpha > 0.$$

$$\bar{E} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n p_n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_x p_n$$

$$= \hbar \omega 2 \operatorname{sh}\left(\frac{u}{2}\right) e^{-\frac{u}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) e^{-nu}$$

$$= \hbar \omega 2 \operatorname{sh}\left(\frac{u}{2}\right) e^{-\frac{u}{2}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-nu} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nu} \right]$$

$$= \hbar \omega \times 2 \operatorname{sh}\left(\frac{u}{2}\right) e^{-\frac{u}{2}} \left[\frac{1}{4 \operatorname{sh}^2\left(\frac{u}{2}\right)} + \frac{1}{2} \frac{1}{1-e^{-u}} \right]$$

$$= \hbar \omega e^{-\frac{u}{2}} \left[\frac{1}{2 \operatorname{sh}\left(\frac{u}{2}\right)} + \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{u}{2}\right)}{1-e^{-u}} \times \frac{e^{u/2}}{e^{u/2}} \right]$$

$$= \hbar \omega e^{-\frac{u}{2}} \left[\frac{1}{2 \operatorname{sh}\left(\frac{u}{2}\right)} + \frac{e^{\frac{u}{2}} \operatorname{sh}(u/2)}{2 \operatorname{sh}(u/2)} \right]$$

$$= \hbar \omega \left[\frac{e^{-u/2} + \operatorname{sh}(u/2)}{2 \operatorname{sh}(u/2)} \right]$$

$$= \frac{\hbar \omega}{2} \left[\frac{e^{-\frac{u}{2}} + \frac{e^{\frac{u}{2}} - e^{-\frac{u}{2}}}{2}}{\operatorname{sh}(u/2)} \right]$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\hbar \omega}{2} \coth(u/2)$$

Pour le solide : $\bar{E} = 3N\bar{\epsilon} = \frac{3N\hbar\omega}{2} \coth(\hbar\omega/2)$

5) $C_v = \frac{\partial \bar{E}}{\partial T}$

On pose $n = \frac{\hbar\omega}{2} = \frac{\hbar\omega}{2k_B T}$

$$C_v = \frac{\partial \bar{E}}{\partial T} = \frac{\partial \bar{E}}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial T} = \frac{\partial \bar{E}}{\partial n} \wedge \left(-\frac{\hbar\omega}{2k_B T^2} \right)$$

$$\rightarrow C_v = + \frac{3N \hbar^2 \omega^2}{4 k_B T^2} \frac{1}{\text{sh}^2 \left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T} \right)}$$

6) Bas de température :

$$\text{sh} \left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T} \right) \sim e^{\frac{\hbar\omega}{2k_B T}}$$

donc $\frac{1}{\text{sh} \left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T} \right)} \rightarrow 0$

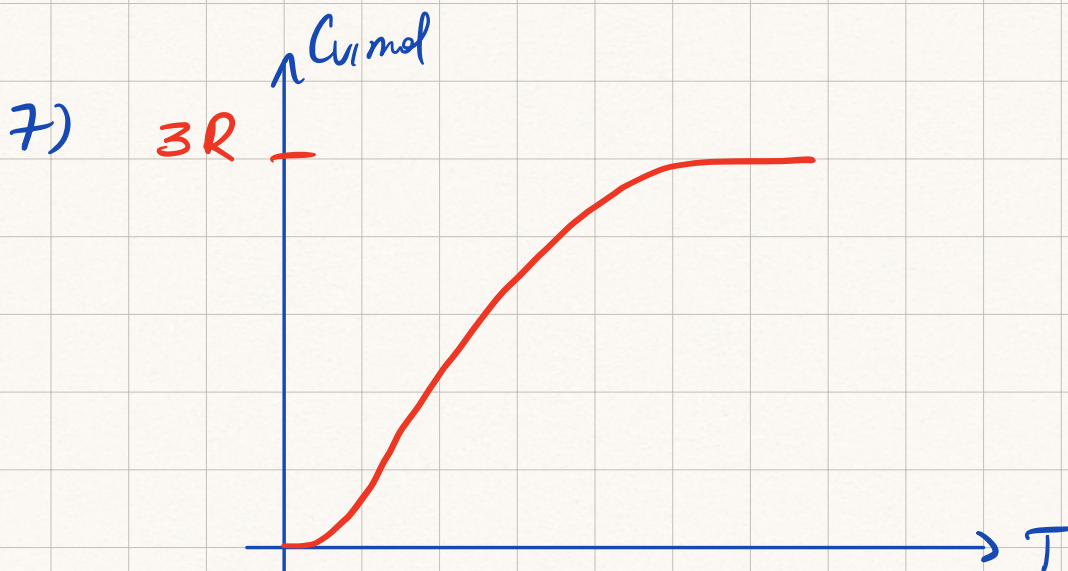
donc $C_v \rightarrow 0$ à BT.

Haute température: $\frac{\hbar\omega}{2k_B T} \rightarrow 0$

$$\sinh\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \sim \frac{\hbar\omega}{2k_B T}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow C_v(NT) &\sim \frac{3N \cancel{\hbar^2} \cancel{\omega^2}}{4k_B \cancel{T^2}} \times \left(\frac{2k_B T}{\cancel{\hbar\omega}}\right)^2 \\ &= 3Nk_B = 3nR \end{aligned}$$

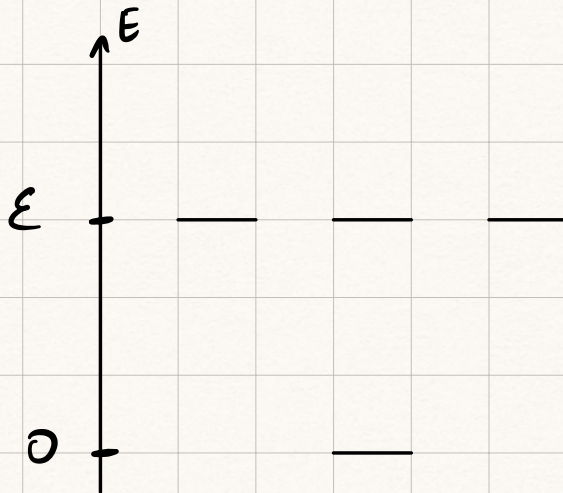
$$\Rightarrow C_{v,mol} = 3R \text{ (Dulong - Petit)}$$



Exercice 5 : Niveaux d'énergie dégénérés (*Oral CCINP*)

On considère un système de N particules indépendantes pouvant exister dans 4 états quantiques : un état pour lequel l'énergie est nulle, et les trois autres états pour lesquels l'énergie vaut ϵ . Le système est en contact avec un thermostat à la température T de sorte que la probabilité pour une particule d'être dans un état quantique est proportionnelle au facteur de Boltzmann à l'énergie correspondante.

1. Déterminer la dimension de la constante de Boltzmann k_B .
2. Exprimer la probabilité de trouver une particule dans l'état quantique d'énergie nulle puis dans un état quantique d'énergie ϵ .
3. Exprimer la probabilité de trouver une particule dans le **niveau** d'énergie nulle puis dans le **niveau** d'énergie ϵ .
4. En déduire les populations des différents niveaux d'énergie. Quelle est la condition pour avoir en moyenne plus de particules à l'énergie ϵ qu'à l'énergie nulle ?
5. Déterminer l'énergie moyenne du système. Discuter des cas limites haute et basse température.
6. Déterminer la capacité thermique C_V du système.



1) On sait $E = k_B T$

$\uparrow$ énergie

$\uparrow$ température

$$[k_B] = \frac{[\text{énergie}]}{[\text{température}]}$$

$$k_B \text{ en } \text{J} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$[\text{Énergie}] = \text{ML}^2\text{T}^{-2}$$

$$[k_B] = \text{ML}^2\text{T}^{-2}\Theta^{-1}$$

2) Facteur de Boltzmann:

$$p(0) = \frac{1}{z} e^0 = \frac{1}{z}$$

$$p(\varepsilon) = \frac{1}{z} e^{-\frac{\varepsilon}{k_B T}}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \text{On a } z &= e^0 \times 1 + 3 e^{-\frac{\varepsilon}{k_B T}} \\ &= 1 + 3 e^{-\varepsilon/k_B T} \end{aligned}$$

D'où

$$p(0) = \frac{1}{1 + 3 e^{-\varepsilon/k_B T}}$$

$$p(\varepsilon) = \frac{3 e^{-\frac{\varepsilon}{k_B T}}}{1 + 3 e^{-\varepsilon/k_B T}}$$

$$4) \quad N_0 = \frac{N}{1 + 3e^{-\epsilon/k_B T}}$$

$$N_\epsilon = \frac{3Ne^{-\frac{\epsilon}{k_B T}}}{1 + 3e^{-\epsilon/k_B T}}$$

Limite HT: $\frac{\epsilon}{k_B T} \ll 1 \rightarrow N_0 = \frac{N}{1+3} = \frac{N}{4}$
 $e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}} \sim 1 \rightarrow N_\epsilon = \frac{3N}{4}$

Limite BT $\frac{\epsilon}{k_B T} \gg 1 \quad N_0 \sim N$
 $N_\epsilon \sim 0$

On veut $N_\epsilon > N_0$

Soit $\frac{3Ne^{-\frac{\epsilon}{k_B T}}}{\cancel{2}} > \frac{N}{\cancel{2}}$

$\Leftrightarrow e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}} > \frac{N}{3N} = \frac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{\varepsilon}{k_B T}} > \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\varepsilon}{k_B T} > -\ln 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{\varepsilon}{k_B T} < \ln 3 \Rightarrow \boxed{k_B T > \frac{\varepsilon}{\ln 3}}$$

$$\begin{aligned} 5) \quad \bar{\varepsilon} &= \sum_{\mu} p_{\mu} E_{\mu} = \varepsilon p(\varepsilon) \\ &= \frac{3\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon}{k_B T}}}{1 + 3e^{-\varepsilon/k_B T}} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \bar{E} = N\bar{\varepsilon} = \frac{3N\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon}{k_B T}}}{1 + 3e^{-\varepsilon/k_B T}}$$

$$\begin{aligned} \nearrow \text{BT: } \frac{\varepsilon}{k_B T} \gg 1 &\Leftrightarrow e^{-\frac{\varepsilon}{k_B T}} \rightarrow 0 \\ &\rightarrow \bar{E} = 0 \end{aligned}$$

$$\searrow \text{HT: } \bar{E} \simeq \frac{3N\varepsilon}{4} = \frac{3}{4}N\varepsilon$$

$$6) \quad \bar{E} = \frac{3N\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon}{k_B T}}}{1 + 3e^{-\frac{\varepsilon}{k_B T}}} = 3N\varepsilon \frac{e^{-x}}{1 + 3e^{-x}}$$

On pose $x = \frac{\varepsilon}{k_B T}$

$$C_V = \frac{\partial \bar{E}}{\partial T} = \frac{\partial \bar{E}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial T} = -\frac{\varepsilon}{k_B T^2} \frac{\partial \bar{E}}{\partial x}$$

$$\Rightarrow C_V = -\frac{3N\varepsilon^2}{k_B T^2} \left(\frac{-e^{-x}(1+3e^{-x}) + 3e^{-x}e^{-x}}{(1+3e^{-x})^2} \right)$$

$$= -\frac{3N\varepsilon^2}{k_B T^2} \left(\frac{-e^{-x} - \cancel{3e^{-2x}} + \cancel{3e^{-2x}}}{(1+3e^{-x})^2} \right)$$

$$= + \frac{3N\varepsilon^2 e^{-x}}{k_B T^2 (1+3e^{-x})^2}$$

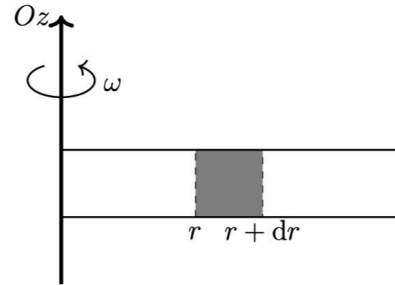
HT : $x \rightarrow 0$ donc $e^{-x} \sim 1$

donc $C_V \rightarrow 0$

BT : $x \rightarrow \infty$ $C_V \rightarrow 0$

Exercice 6 : Centrifugeuse (Oral Mines-Telecom)

Une centrifugeuse est constituée d'un cylindre de rayon R et de longueur L , tournant autour d'un axe vertical Oz à la vitesse angulaire constante ω . Un gaz parfait est contenu dans le cylindre. Le but est d'étudier la densité particulaire n^* de gaz dans le cylindre en fonction de la distance r à l'axe Oz lorsque ce gaz est en équilibre relatif dans le cylindre. Les molécules de gaz sont identiques, de masse m et le système est thermostaté à la température T . On note $P(r)$ et $\rho(r)$ la pression et la masse volumique du gaz à la distance r de l'axe de rotation.

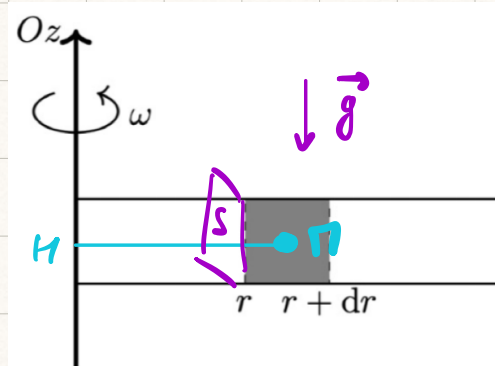


1. Faire un bilan des forces qui s'appliquent à une tranche de gaz de masse M comprise entre r et $r+dr$, dans le référentiel lié au cylindre. Exprimer la résultante des forces de pression sous la forme d'une dérivée de $P(r)$.
2. De la condition d'équilibre relatif de la tranche de fluide, déduire la densité $n^*(r)$ des molécules dans le cylindre. On notera n_0^* la densité particulaire sur l'axe de rotation.
3. Montrer que $n^*(r)$ obéit à une statistique de Boltzmann.

1) Le référentiel lié au cylindre est non-galiléien et il est en rotation uniforme autour d'un axe fixe.

Il faut prendre en compte les forces d'inertie - centrifuge et de Coriolis.

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_{ic} &= dm \omega^2 H \vec{\Pi} \\
 &= dm \omega^2 r \vec{e}_r \\
 &= \rho(r) \omega^2 r dV \vec{e}_r \\
 &= \rho(r) \omega^2 r S dr \vec{e}_r
 \end{aligned}$$



$$\vec{F}_{ic} = -2dm \vec{\omega} \wedge \vec{v}_z$$

$$= \vec{0}$$

Equilibre relatif
ds le référentiel
lié au cylindre
 $\rightarrow \vec{F}_{ic} = \vec{0}$

Autres actions: poids : $\vec{P} = dm \vec{g}$

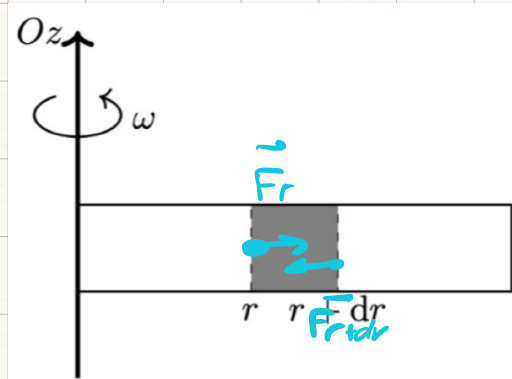
$$= \rho(r) S dr \vec{g}.$$

Résultate des forces de premier:

Selon r:

$$\vec{F}_p = P(r) S \vec{e}_r - P(r+dr) S \vec{e}_r$$

$$= - \frac{\partial P}{\partial r} dr S \vec{e}_r$$



Selon z: $\vec{F}_p = P(z) S' \vec{e}_z - P(z+dz) S' \vec{e}_z$

$$= - \frac{\partial P}{\partial z} S' \vec{e}_z.$$

2) Equilibre relatif de Rn-gal: $\Sigma \vec{F} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \rho(r) \omega^2 r S dr \vec{e}_r + \rho \vec{g} - \frac{\partial \rho}{\partial r} dr S \vec{e}_r - \frac{\partial \rho}{\partial z} S' \vec{e}_z = \vec{0}$$

Sur $\vec{e}_r$:

$$\rho(r) \omega^2 r \cancel{S dr} - \frac{\partial \rho}{\partial r} \cancel{S dr} = 0$$

$$\Leftrightarrow \rho(r) \omega^2 r = \frac{\partial \rho}{\partial r} \quad (1)$$

Or, le système est un gaz parfait donc:

$$\rho(r) = \frac{n P}{R T} \quad \text{et} \quad n^* = \frac{P}{k_B T}$$

$$\rightarrow \rho(r) = \frac{n n^* k_B T}{R T}$$

$$(1): \frac{n n^* \cancel{k_B T}}{R T} \omega^2 r = \cancel{k_B T} \frac{\partial n^*}{\partial r}$$

On sépare les variables:

$$\frac{dn^*}{n^*} = \frac{\rho \omega^2}{RT} r dr \rightarrow \ln n^* = \frac{\rho \omega^2}{RT} \frac{r^2}{2} + \text{cte}$$

$$\Rightarrow n^* = n_0^* e^{\frac{\rho \omega^2 r^2}{2RT}} \quad (*)$$

3)

$$\text{On a } \vec{F}_{\text{ic}} = m \omega^2 r \vec{e}_r = -\vec{\text{grad}} E_p$$

$$\Leftrightarrow -\frac{dE_p}{dr} = m \omega^2 r$$

$$\downarrow E_p(r) = -\frac{1}{2} m \omega^2 r^2$$

Avec $\frac{M}{R} = \frac{m}{k_B}$ ← masse d'une molécule

$$(*) : n^* = n_0^* e^{\frac{m \omega^2 r^2}{2 k_B T}} = n_0^* e^{-\frac{E_p}{k_B T}}$$

$$\Rightarrow n^*(r) = n_0^* e^{-\frac{E_p}{k_B T}}$$

Exercice 7 : Loi de Curie (Oral CCINP)

1. Expliquer qualitativement ce qu'on entend par basse et haute température pour une particule à deux niveaux d'énergie $-\epsilon$ et $+\epsilon$

Dans la question suivante, on prendra comme critère $x \ll y \leftrightarrow x \leq y/10$

2. On considère $N \gg 1$ atomes d'argent, tous dans leur état fondamental dont on prendra l'énergie égale à 0 ($E_{fond} = 0$). Ces atomes possèdent un moment magnétique permanent $\vec{m}$ dont la composante m_z sur Oz ne peut prendre que deux valeurs : $\pm m$ avec $m = 1,0 \times 10^{-23} \text{ A.m}^{-2}$.

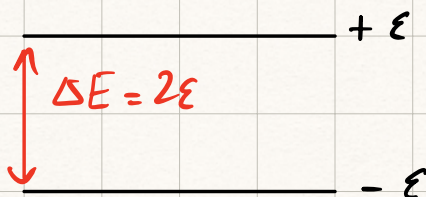
Placés dans un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{u}_z$, il possède une énergie magnétique dont l'expression est $E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$. On suppose $B = 1 \text{ T}$. Déterminer deux températures caractéristiques T_b et T_h telle que :

- Si $T \leq T_b$ on est dans l'approximation basse température.
- Si $T \geq T_h$ on est dans l'approximation haute température.

Donner les valeurs numériques de T_b et T_h et conclure.

3. On définit le moment magnétique $\vec{M}$ d'une assemblée de N atomes d'argent comme la somme des moments magnétiques individuels $\vec{m}_i$ des différents atomes qui la constitue. Calculer la valeur moyenne $\langle M_z \rangle$ de $\vec{M}$ pour une température T.
4. Selon la loi de Curie, établie expérimentalement, $\langle M_z \rangle$ est de la forme : $\langle M_z \rangle = \frac{\alpha}{T} B$ où α est une constante et B la composante du champ magnétique sur Oz. Compte-tenu de l'étude précédente, montrer que l'on retrouve la loi de Curie et déterminer la constante α .

1)



Haute température: $k_B T \gg \Delta E = 2\epsilon$

Basse température: $k_B T \ll \Delta E = 2\epsilon$

2) $E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$ prend 2 valeurs

$$E_p = -mB \quad \text{ou} \quad E_p = +mB \quad (\vec{m} = -m\vec{u}) \\ (\vec{m} = m\vec{u})$$

$$BT: \quad \hbar \omega_B T \ll 2\epsilon \text{ soit ici } \hbar \omega_B T \ll 2mB$$

$$\Leftrightarrow T \leq \boxed{\frac{2mB}{10\hbar \omega_B}} \quad T_b = 0,14K$$

$$HT \quad \hbar \omega_B T \gg 2mB$$

$$\Leftrightarrow 2mB \leq \frac{\hbar \omega_B T}{10}$$

$$\Leftrightarrow T \geq \boxed{\frac{20mB}{\hbar \omega_B}} \quad T_h = 14,5K$$

A T_{amb} , on est à très haute température.

3) Moyenne de m pour un atome:

$$\begin{aligned} \langle m_z \rangle &= \sum_{\mu} m_{\mu} p_{\mu} \\ &= \frac{+m e^{+\frac{mB}{\hbar \omega_B T}} - m e^{-\frac{mB}{\hbar \omega_B T}}}{2} \quad (*) \end{aligned}$$

$$p(+m) = \frac{e^{+\frac{mB}{\hbar \omega_B T}}}{2} \quad p(-m) = \frac{e^{-\frac{mB}{\hbar \omega_B T}}}{2}$$

$$\text{ou } z = e^{\frac{mB}{k_B T}} + e^{-\frac{mB}{k_B T}} = 2 \cosh\left(\frac{mB}{k_B T}\right)$$

$$(*) \quad \langle m_z \rangle = \frac{m \, 2 \sinh\left(\frac{mB}{k_B T}\right)}{2 \cosh\left(\frac{mB}{k_B T}\right)}$$

$$\rightarrow \langle m_z \rangle = m \tanh\left(\frac{mB}{k_B T}\right)$$

$$\langle M_z \rangle = N \langle m_z \rangle = Nm \tanh\left(\frac{mB}{k_B T}\right)$$

4) Basse température $\frac{mB}{k_B T} \gg 1$ donc $\tanh\left(\frac{mB}{k_B T}\right) \rightarrow 1$

$\rightarrow \langle M_z \rangle_{BT} = Nm$ Loi de Curie non vérifiée
 $\rightarrow$ gel magnétique

Haute température $\frac{mB}{k_B T} \ll 1 \Leftrightarrow \tanh\left(\frac{mB}{k_B T}\right) \sim \frac{mB}{k_B T}$

Donc $\langle M_z \rangle = \frac{Nm^2}{k_B} \frac{B}{T} = \alpha \frac{B}{T}$ Loi Curie vérifiée à HT.

Exercice 8 : Effusion d'un gaz (*Oral Mines-Ponts*)

On étudie un gaz parfait monoatomique formé d'atomes assimilés à des points matériels de masse m . Le gaz est thermostaté à la température T et il est enfermé dans un récipient de volume V . On suppose que les atomes ont un mouvement unidimensionnel d'axe Ox .

Dans cet exercice, l'énergie potentielle d'un atome sera supposée nulle : $E_P = 0$. On note v_x la vitesse de l'atome.

On admet que les atomes suivent une distribution statistique de Maxwell-Boltzmann. Ainsi, la probabilité qu'un atome ait une vitesse comprise entre v_x et $v_x + dv_x$ s'écrit $dP = C \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2k_B T}\right) dv_x$ où C est une constante de normalisation et $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$ la constante de Boltzmann.

Formulaire : pour $\alpha > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha u^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \text{ et } \int_{-\infty}^{\infty} u^2 e^{-\alpha u^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{4\alpha^3}}$$

1. En utilisant le théorème d'équipartition de l'énergie, déterminer la vitesse quadratique moyenne $u = \sqrt{\langle v_x^2 \rangle}$ des atomes. Faire l'application numérique pour l'hélium gazeux à 25° avec $M(\text{He}) = 4 \text{ g.mol}^{-1}$.
2. Déterminer la constante de normalisation dans la statistique de Maxwell-Boltzmann.
3. Déterminer la vitesse moyenne $\langle v_x \rangle$ puis la vitesse quadratique moyenne $u = \sqrt{\langle v_x^2 \rangle}$ en utilisant la statistique de Maxwell-Boltzmann. Conclure.

L'une des parois du récipient est percée d'un petit trou circulaire de centre O et de diamètre d suffisamment petit pour ne pas perturber l'équilibre du gaz. On suppose que les atomes ne peuvent que sortir du récipient (aucun atome ne peut y entrer). On note $N(t)$ le nombre d'atomes dans le récipient à l'instant t . On supposera que tous les atomes se déplacent à la vitesse quadratique moyenne u et que la probabilité de se déplacer vers la gauche ou vers la droite est la même ($1/2$ dans chaque cas).

4. Déterminer le nombre δN d'atomes quittant le récipient entre t et $t + dt$. On représentera le cylindre dans lequel doivent se trouver les atomes ayant une chance de quitter le récipient entre t et $t + dt$.
5. En déduire que le nombre d'atomes dans le récipient $N(t)$ est solution de l'équation différentielle $\frac{dN}{dt} + \frac{1}{\tau} N = 0$ où τ est à exprimer en fonction de u , V et d .
6. Calculer en fonction de τ la durée Δt au bout de laquelle la pression $P(t)$ dans le récipient est divisée par 2.
7. Faire l'application numérique pour $V = 5L$ et $d = 0,1 \text{ mm}$. Commenter.

1) L'énergie des atomes s'écrit :

$$E = E_c + \cancel{E_p} = \frac{1}{2} m v_x^2$$

1 atome quadratique d'énergie $\rightarrow \langle E \rangle = 1 \times \frac{k_B T}{2}$

$$\text{Or } \langle E \rangle = \langle E_c \rangle = \frac{1}{2} m \langle v_x^2 \rangle = \frac{k_B T}{2}$$

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{k_B T}{m}$$

$$u = \sqrt{\langle v_x^2 \rangle} = \sqrt{\frac{k_B T}{m}}$$

lg: en 3D

$$u = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

$$k_B = \frac{R}{N_A} \xrightarrow{8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}} \Rightarrow u = \sqrt{\frac{RT}{N_A m}} = \sqrt{\frac{RT}{M}}$$

A.N.

$$u = 7,9 \cdot 10^2 \text{ m.s}^{-1}$$

$$2) \quad dP = C e^{-\frac{m v_x^2}{2k_B T}} dv_x$$

On a la normalisation :

$$\int_{-\infty}^{\infty} C e^{-\frac{m v_x^2}{2k_B T}} dv_x = 1$$

On est la composante de $\vec{v}$ selon $\vec{e}_x$.

Formulaire :

$$\alpha = \frac{m}{2k_B T}$$

$$C \sqrt{\frac{2k_B T \pi}{m}} = 1 \Rightarrow C = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}}$$

$$\rightarrow \frac{dP}{dv_x} = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} e^{-\frac{m v_x^2}{2k_B T}}$$

$$3) \langle v_x \rangle = C \int_{-\infty}^{\infty} v_x e^{-\frac{m v_x^2}{2k_B T}} dv_x$$

$$= C \left[-\frac{k_B T}{m} e^{-\frac{m v_x^2}{2k_B T}} \right]_{-\infty}^{\infty} = 0$$

$$\langle v_x \rangle = 0$$

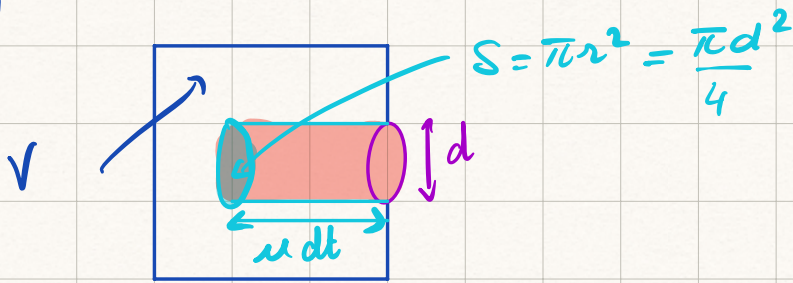
$$\langle v_x^2 \rangle = C \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 e^{-\frac{m v_x^2}{2k_B T}} dv_x$$

$$\langle v_x^2 \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \sqrt{\frac{\pi (2k_B T)^{3/2}}{4 m^{3/2}}}$$

$$= \frac{2k_B T}{m} \times \frac{1}{2} = \frac{k_B T}{m}$$

Même résultat qu'avec l'équipartition.

4)



En dt secondes, les atomes parcourent $u dt$ mètres. Bien sûr, ils doivent se trouver à une distance inférieure ou égale à $u dt$ du trou **ET** se déplacer vers la droite

$$\delta N_{t, \text{trou}} = \underbrace{n^*(t) dV}_{\substack{\text{Nombre} \\ \text{atomes de cylindre} \\ \text{rouge}}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\substack{\text{proba} \frac{1}{2} \text{ d'aller vers la} \\ \text{droite}}}$$

$$\text{Avec } n^*(t) = \frac{N(t)}{V}$$

$$\Leftrightarrow \delta N = \frac{N(t)}{V} \times u dt \times \frac{\pi d^2}{4} \times \frac{1}{2}$$

$$\delta N = \frac{\pi d^2 u}{8 V} N(t) dt$$

5) Bilan de particules entre t et $t+dt$:

$$N(t+dt) = N(t) - \delta N \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{nbre de particules} \\ \text{parties entre } t \text{ et } t+dt \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \frac{N(t+dt) - N(t)}{dt} = - \frac{\pi d^2 u}{8V} N(t) \quad \cancel{dt}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dN(t)}{dt} + \frac{\pi d^2 u}{8V} N(t) = 0 \quad (*)$$

$\frac{1}{\tau}$

$$\Rightarrow \tau = \frac{8V}{u \pi d^2}$$

6) On a, pour un gaz parfait:

$$PV = nRT$$

$$\Leftrightarrow PV = \frac{N}{N_A} RT \quad \Leftrightarrow N = \frac{N_A PV}{RT}$$

(*) deviant $\frac{dP}{dt} + \frac{1}{\tau} P = 0$

$\Leftrightarrow P(t) = P(0) e^{-\frac{t}{\tau}}$

On cherche $t_{1/2}$ tel que $P(t_{1/2}) = \frac{P(0)}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{\cancel{P(0)}}{2} = \cancel{P(0)} e^{-\frac{t_{1/2}}{\tau}}$

$\Leftrightarrow e^{-\frac{t_{1/2}}{\tau}} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -\frac{t_{1/2}}{\tau} = -\ln 2 \Rightarrow t_{1/2} = \tau \ln 2$

7) $V = SL = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$

$d = 0,1 \text{ mm}$

$\tau = \frac{8V}{\mu \pi d^2} = 1,6 \cdot 10^3 \text{ s}$

et $t_{1/2} = \tau \ln 2 = 19 \text{ min}$