

1 Le condensateur

1.1 Présentation

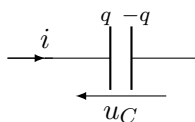
Définition. Un condensateur est constituée de deux surfaces conductrices, appelées armatures, séparées par un isolant (air sec, alumine, polyéthylène, etc.). Son symbole est :



Après les résistances, les condensateurs sont les composants les plus répandus en électronique. Le condensateur est un composant électronique couramment utilisé dans les circuits les plus divers : microprocesseurs, mémoires, horloges électroniques, émetteurs et récepteurs radio, amplificateurs, etc.

1.2 Relation fondamentale

Lorsqu'un condensateur est soumis à une différence de potentiel, les charges opposées s'accumulent sur les deux armatures (attention au fléchage !)



Définition. La tension aux bornes d'un condensateur est proportionnelle à la charge qui s'accumule sur ses armatures. Le coefficient de proportionnalité entre charge et tension est noté C et s'appelle la **capacité** du condensateur :

$$q = C u_C$$

C est une grandeur positive et s'exprime en farad (F).

Ordres de grandeur : le Farad est une « grande » unité : on exprime souvent les valeurs de capacité en sous-multiples du Farad : le mF (10^{-3} F), le μ F (10^{-6} F), le nF (10^{-9} F) et le pF (10^{-12} F).

- Les valeurs rencontrées en électronique s'échelonnent du nF au μ F.
- En électronique de puissance, les valeurs peuvent atteindre plusieurs dizaines de mF voire plus.
- Une capacité parasite est de l'ordre du pF.

Relation courant-tension. Remarquons que :

- si $i > 0$, des charges arrivent sur l'armature de gauche, la charge augmente donc la tension aussi ;
- si $i < 0$, des charges repartent, la charge diminue donc la tension aussi ;
- si $i = 0$, aucune charge ne bouge, la quantité de charge sur l'armature de gauche ne varie pas, la tension est constante.

Cette relation entre le **signe de i** et la **variation de u** suggère que i est relié à la dérivée de u . Démontrons-le. Le courant est :

$$i = \frac{\delta q}{dt}$$

où δq est la charge qui est passée à travers le fil pendant dt . Cette charge s'est accumulée sur les armatures donc :

$$q(t + dt) = q(t) + \delta q$$

Donc :

$$i = \frac{q(t + dt) - q(t)}{dt}$$

dt étant infinitésimal, on vient d'écrire la définition de la dérivée de q (c'est le taux d'accroissement) :

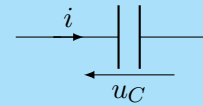
$$i = \frac{dq}{dt}$$

Ainsi :

$$i = \frac{d(Cu_C)}{dt} = C \frac{du_C}{dt}$$

En convention **récepteur**, la relation courant-tension d'un condensateur est :

$$i = C \frac{du_C}{dt}$$



Cette relation fait intervenir la **dérivée** de la tension en fonction du temps.

1.3 Continuité de la tension aux bornes d'un condensateur

Supposons que u_C présente une variation brusque (une discontinuité) : cela impliquerait que $\frac{du_C}{dt}$ soit infini.
Or :

$$i = C \frac{du_C}{dt}$$

Donc la dérivée de u_C ne peut pas être infinie, puisque ça impliquerait que le courant le soit.

La tension u_C aux bornes d'un condensateur ne peut pas varier instantanément : c'est une fonction continue.

1.4 Régime permanent

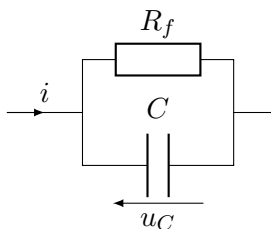
Si les tensions et courants ne dépendent pas du temps, alors :

$$i = C \frac{du_C}{dt} = 0$$

On dit que l'on est en **régime permanent**.

En régime permanent, un condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert : **le courant est nul**.

1.5 Modélisation d'un condensateur réel



Les deux armatures d'un condensateur réel sont séparées par un matériau qui conduit très légèrement le courant. Ainsi, un condensateur réel se modélise par un condensateur idéal en parallèle avec une résistance R_f , nommée résistance de fuite (schéma ci-contre).

L'ordre de grandeur de R_f est $10^8 \Omega$.

1.6 Aspect énergétique

La puissance reçue par le condensateur est $u_C i$ soit :

$$\mathcal{P} = u_C \times C \frac{du_C}{dt}$$

Or :

$$f' \times f = \left(\frac{1}{2} f^2 \right)'$$

Donc :

$$\mathcal{P} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_C^2 \right)$$

La puissance s'écrit comme la dérivée d'une quantité, autrement dit comme la variation d'un stock.

- Si $\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} C u_C^2$ croît, alors $\mathcal{P} > 0$: le condensateur est récepteur ;
- si $\mathcal{E}_C$ décroît, alors $\mathcal{P} < 0$: le condensateur est générateur.

L'énergie emmagasinée dans un condensateur soumis à la tension u est :

$$\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} C u_C^2$$

Ainsi, un condensateur peut emmagasiner de l'énergie et la restituer ultérieurement. Ceci est utilisé dans les flashes des appareils photos par exemple.

2 Le circuit RC série

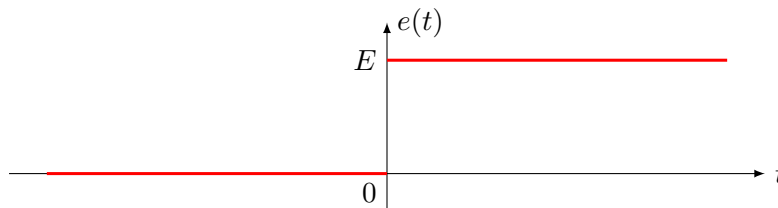
Définition. On appelle dipôle RC l'association en série d'un condensateur de capacité C et d'un conducteur ohmique de résistance R .

2.1 Échelon de tension

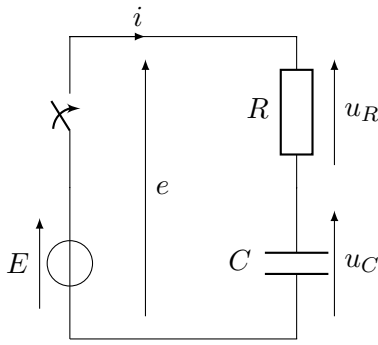
2.1.1 Définition

Définition. Un échelon de tension montant est un signal électrique de la forme :

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ E & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$



Un échelon de tension peut être obtenu avec un générateur basse fréquence délivrant un signal créneau (avec un offset et de fréquence assez basse), ou avec le circuit ci-dessous, le condensateur étant initialement déchargé :



$e = 0$ à $t \leq 0$ (condensateur déchargé donc $u_C = 0$, pas de courant donc $u_R = 0$).

Lorsque l'interrupteur est fermé, $e = E$.

2.1.2 Équation différentielle du circuit

On cherche à connaître la tension aux bornes du condensateur à partir du moment où l'on ferme l'interrupteur, soit à $t \geq 0$. On écrit la loi des mailles :

$$u_C + u_R = e = E$$

Or, la loi d'Ohm nous dit que :

$$u_R = Ri \quad \text{en convention récepteur}$$

Puis, la relation courant-tension d'un condensateur stipule que :

$$i = C \frac{du_C}{dt} \quad \text{en convention récepteur}$$

Donc :

$$u_C + RC \frac{du_C}{dt} = E \quad \text{soit} \quad \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{RC} = \frac{E}{RC}$$

L'équation différentielle de la tension u_C aux bornes d'un condensateur, dans un circuit RC soumis à un échelon de tension, s'écrit :

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau} u_C = \frac{E}{\tau}$$

On a introduit le temps $\tau = RC$.

C'est une **équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants**. Le second membre est également indépendant du temps.

Définition. Le temps $\tau = RC$ est appelée constante de temps du circuit RC.

On a supposé le condensateur déchargé avant la fermeture de l'interrupteur donc :

$$u_C(0^-) = \frac{q(0^-)}{C} = 0$$

Or la tension aux bornes du condensateur ne peut pas varier brutalement, donc elle est encore nulle juste après la fermeture de l'interrupteur :

$$u_C(0^+) = 0$$

2.1.3 Résolution de l'équation différentielle

Pour résoudre une équation différentielle linéaire à coefficients constants, et second membre constant :

❶ On écrit l'**équation homogène** associée à l'équation différentielle obtenue.

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau} u_C = 0$$

❷ On écrit la **forme générale de la solution de l'équation homogène**.

$$u_C(t) = K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

❸ On recherche une **solution particulière constante**.

$$0 + \frac{\lambda}{\tau} = \frac{E}{\tau} \quad \text{soit} \quad \lambda = E$$

$u_C(t) = E$ est donc solution de l'équation différentielle.

❹ On écrit la **solution générale**.

$$u_C(t) = E + K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

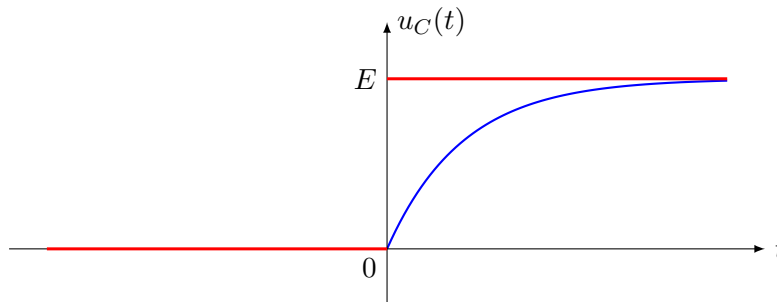
❺ On détermine la constante à l'aide des **conditions initiales**.

On a vu que $u_C(0) = 0$. Or $u_C(0) = K + E \exp(0) = K + E$ donc $K = -E$ d'où :

$$u_C(t) = E - E \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

La solution de l'équation différentielle de la réponse d'un dipôle RC à un échelon de tension est :

$$u_C(t) = E \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$



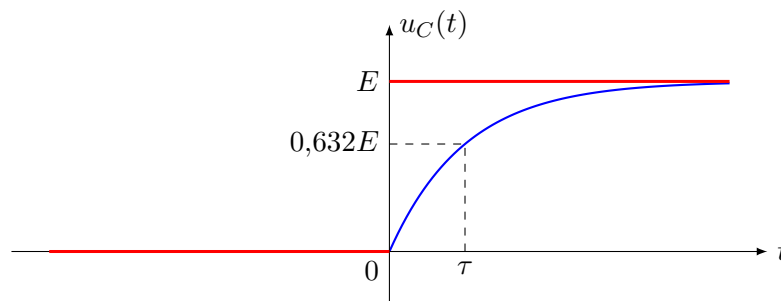
2.1.4 Détermination de la constante de temps du dipôle RC

Si l'on dispose d'une courbe expérimentale de $u_C(t)$, il est possible de déterminer τ de trois façons (entres autres).

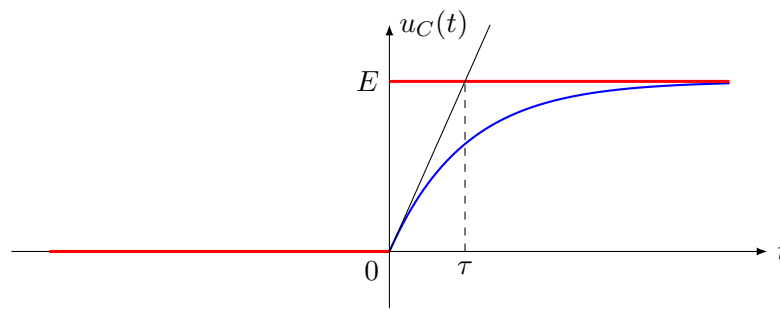
1. Premièrement, remarquons que

$$u_C(\tau) = E \left(1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau}\right)\right) = E (1 - e^{-1}) \approx 0,632 \times E$$

Il faut repérer l'endroit sur la courbe où $u_C(t) \approx 0,632E$.



2. On peut aussi tracer la tangente à la courbe : elle croise l'asymptote en $t = \tau$.



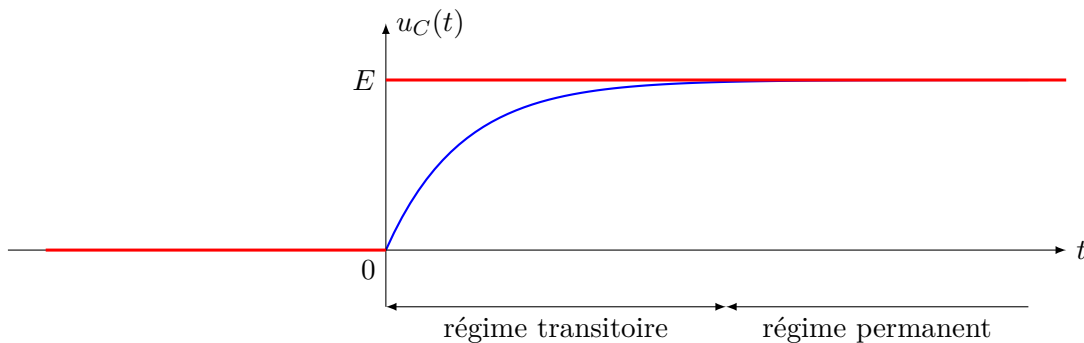
3. On peut également utiliser les fonctions de modélisation (Python, Latis-Pro).

Remarque. Pour tracer proprement le graphique de u_C :

- nommer les axes, repérer E en ordonnée et τ en abscisse ;
- repérer le point $(t = \tau, u_C = 0,632E)$;
- tracer la droite allant de $(t = 0, u_C = 0)$ à $(t = \tau, u_C = E)$;
- tracer l'asymptote d'équation $u_C = E$;
- tracer u_C : suivre la tangente aux premiers instants, passer par le point $(t = \tau, u_C = 0,632E)$ et tendre vers l'asymptote.

2.1.5 Durée du régime transitoire

On distingue sur la courbe deux zones (qui ne sont pas rigoureusement séparées) :



Il s'agit de fixer un seuil arbitraire à partir duquel le régime permanent est considéré comme atteint. Prenons 99%. On cherche t_{99} tel que :

$$u_C(t_{99}) = 0,99E$$

Soit :

$$E \left(1 - \exp \left(-\frac{t_{99}}{\tau} \right) \right) = 0,99E$$

$$1 - \exp \left(-\frac{t_{99}}{\tau} \right) = 0,99$$

$$\exp \left(-\frac{t_{99}}{\tau} \right) = 0,01$$

$$-\frac{t_{99}}{\tau} = \ln(0,01) = -\ln(100)$$

$$\boxed{t_{99} = \tau \ln(100)}$$

Le temps de réponse à 99% est $4,6\tau$.

Remarque. On peut obtenir des valeurs légèrement différentes selon le critère défini pour le régime transitoire.

2.1.6 Évolution de la charge de l'armature et du courant électrique

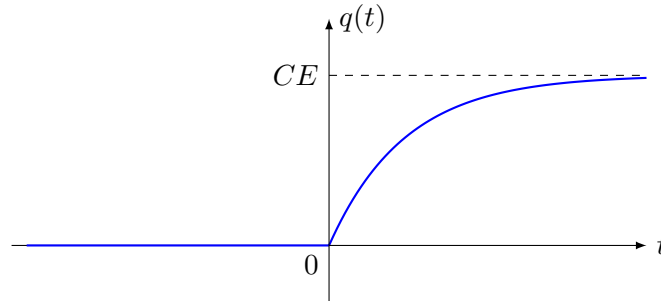
Charge. La charge sur l'armature du condensateur est reliée à la tension aux bornes du condensateur ainsi :

$$q = Cu_C$$

Donc on a immédiatement :

$$q(t) = CE \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right) \right)$$

La charge q de l'armature augmente jusqu'à la valeur CE qui correspond à une tension E aux bornes du condensateur.



Intensité.

— **Méthode 1 :** on sait que :

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt}(t)$$

Donc :

$$i(t) = CE \left(0 - \left(-\frac{1}{\tau} \right) \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right) \right)$$

Comme $C/\tau = 1/R$, l'intensité dans le circuit vaut :

$$i(t) = \frac{E}{R} \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right)$$

Elle présente une discontinuité en $t = 0$, au moment de la fermeture du circuit.

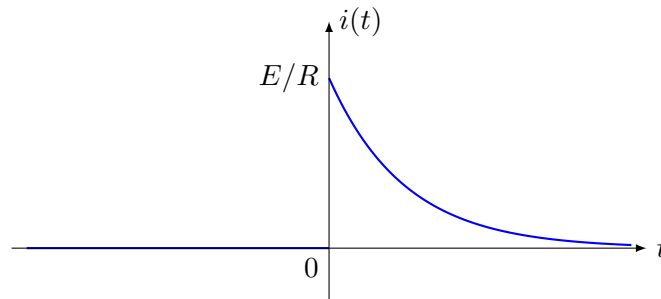
— **Méthode 2 :** d'après la loi des mailles :

$$Ri = E - u_C$$

$$Ri(t) = E - E + E \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right)$$

$$i(t) = \frac{E}{R} \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right)$$

On trouve bien sûr le même résultat.



2.1.7 Bilan de puissance

On écrit la loi des mailles :

$$u_C + Ri = E$$

On multiplie l'égalité par i :

$$u_C i + Ri^2 = Ei$$

Donc :

$$u_C C \frac{du_C}{dt} + Ri^2 = Ei$$

D'où le bilan de puissance :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_C^2 \right) + Ri^2 = Ei$$

Ou encore :

$$\boxed{\mathcal{P}_g = \frac{d\mathcal{E}_C}{dt} + \mathcal{P}_J}$$

La puissance générée par le générateur permet d'augmenter la puissance emmagasinée par le condensateur ou est dissipée par effet Joule.

Méthode. Pour effectuer un bilan de puissance :

- On écrit la loi des mailles (ou des nœuds).
- On multiplie l'égalité par i (ou par u).
- On fait intervenir les différentes puissances en jeu : puissance délivrée par le générateur, dissipée par la résistance, etc.

2.1.8 Bilan d'énergie

L'énergie fournie par le GBF pendant la totalité de la charge est :

$$W_{\text{GBF}} = \int_0^{+\infty} \mathcal{P}_g dt$$

avec :

$$\mathcal{P}_g = Ei = E \times \frac{E}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Ainsi :

$$W_{\text{GBF}} = \frac{E^2}{R} \left[-\tau \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]_0^{+\infty} = \tau \frac{E^2}{R} = CE^2$$

L'énergie stockée par le condensateur pendant la charge est :

$$\Delta\mathcal{E}_C = \int_0^{+\infty} \frac{d\mathcal{E}_C}{dt} dt = \mathcal{E}_C(\infty) - \mathcal{E}_C(0) = \frac{1}{2} CE^2$$

L'énergie fournie par le générateur pendant la charge est CE^2 . Le condensateur ayant stocké $\frac{1}{2} CE^2$, la résistance a dissipé le reste par effet Joule, soit $\frac{1}{2} CE^2$.

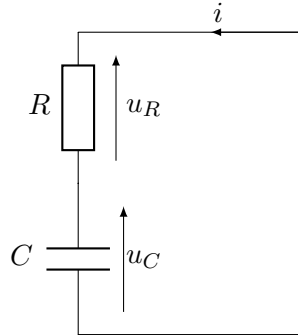
Remarque. On peut calculer W_{GBF} ainsi :

$$\begin{aligned} W_{\text{GBF}} &= \int_0^{+\infty} Ei(t) dt = CE \int_0^{+\infty} \frac{du_C}{dt}(t) dt \\ &= CE [u_C(t)]_0^{+\infty} \\ &= CE (E - 0) = CE^2 \end{aligned}$$

2.2 Le circuit RC en régime libre (décharge)

2.2.1 Équation différentielle

On considère un échelon descendant : le générateur impose désormais une tension nulle, tout se passe comme s'il n'était plus dans le circuit. On suppose par ailleurs que le condensateur est initialement chargé $u_C(0^-) = E$. Le circuit étudié est donc le suivant :



On écrit la loi des mailles :

$$u_C + u_R = 0$$

Or, la loi d'Ohm nous dit que :

$$u_R = Ri \quad \text{en convention récepteur}$$

Puis, la relation courant-tension d'un condensateur stipule que :

$$i = C \frac{du_C}{dt} \quad \text{en convention récepteur}$$

Donc :

$$\begin{aligned} u_C + RC \frac{du_C}{dt} &= 0 \\ \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C &= 0 \end{aligned}$$

L'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ aux bornes d'un condensateur, lors de sa décharge dans une résistance R , s'écrit :

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau} u_C = 0$$

On a introduit le temps $\tau = RC$.

C'est une **équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants, sans second membre**.

Condition initiale. La tension u_C aux bornes d'un condensateur ne peut pas varier brusquement, donc, juste après le basculement de e , $u_C(0^+) = E$.

2.2.2 Résolution de l'équation différentielle

Pour résoudre une équation différentielle linéaire à coefficients constants sans second membre :

❶ On écrit la forme générale de la solution de cette équation différentielle.

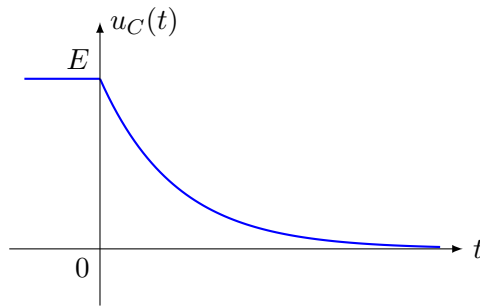
$$u_C(t) = K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

❷ On détermine la constante à l'aide des conditions initiales. On sait que $u_C(0) = E$. Or $u_C(0) = K$ donc $K = E$, ainsi :

$$u_C(t) = E \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

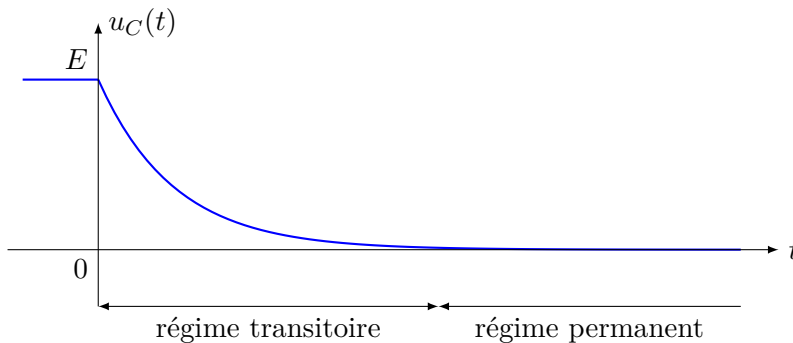
La solution de l'équation différentielle de la décharge d'un dipôle RC dans une résistance R est :

$$u_C(t) = E \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$



2.2.3 Durée du régime transitoire

On distingue sur la courbe deux zones (qui ne sont pas rigoureusement séparées) :



On peut montrer là encore que :

Le temps de réponse à 99% est $4,6\tau$.

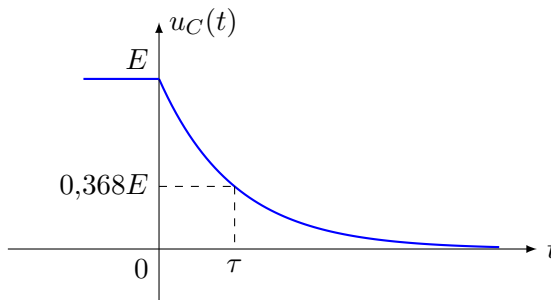
2.2.4 Détermination de la constante de temps du dipôle RC

Si l'on dispose d'une courbe expérimentale de $u_C(t)$ lors de sa décharge, il est possible de déterminer τ .

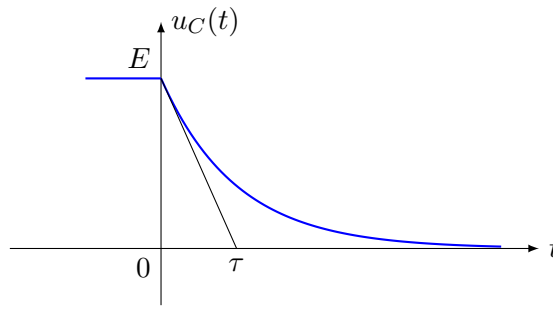
1. Premièrement, remarquons que

$$u_C(\tau) = E \exp\left(-\frac{\tau}{\tau}\right) = E e^{-1} \approx 0,368 \times E$$

Il faut repérer l'endroit sur la courbe où $u_C(t) \approx 0,368E$.



2. On peut aussi tracer la tangente à la courbe : elle croise l'asymptote $u_C = 0$ en $t = \tau$.



3. On peut là aussi utiliser les fonctions de modélisation (Python, Latis-Pro).

2.2.5 Évolution de la charge de l'armature et du courant électrique

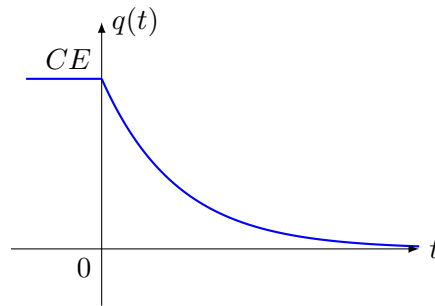
Charge. La charge sur l'armature du condensateur est reliée à la tension aux bornes du condensateur ainsi :

$$q = C u_C$$

Donc on a immédiatement :

$$q(t) = CE \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

La charge q de l'armature diminue jusqu'à s'annuler.



Intensité.

— **Méthode 1 :** on sait que :

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt}(t)$$

Donc :

$$i(t) = -\frac{CE}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

L'intensité dans le circuit vaut donc :

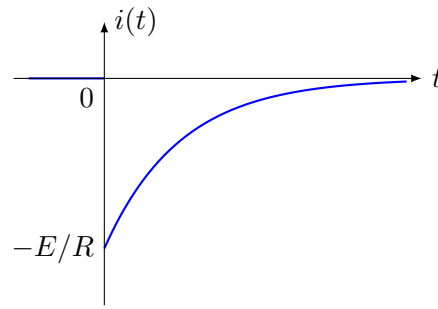
$$i(t) = -\frac{E}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Elle présente une discontinuité en $t = 0$.

— **Méthode 2 :** d'après la loi des mailles :

$$Ri = -u_C$$

$$i(t) = -\frac{u_C(t)}{R} = -\frac{E}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$



2.2.6 Bilan de puissance et d'énergie

La loi des mailles multipliée par i donne :

$$u_C i + R i^2 = 0$$

La puissance générée par le condensateur $-u_C i$ est dissipée par effet Joule :

$$-\frac{d\mathcal{E}_C}{dt} = -R i^2$$

L'intégration de ce bilan donne simplement :

$$W_J = -(\mathcal{E}_C(\infty) - \mathcal{E}_C(0)) = \frac{1}{2} C E^2$$

L'énergie initialement stockée dans le condensateur a été dissipée par effet Joule pendant la décharge.

2.3 Circuits à plusieurs mailles

Nous en verrons quelques exemples en TD. La méthode est la suivante :

- ❶ écrire les différentes lois du circuit (loi des nœuds, lois des mailles, loi d'Ohm, caractéristique du condensateur) ;
- ❷ à partir de la loi des mailles : à l'aide des autres lois, éliminer les grandeurs variables sauf celle dont on veut obtenir l'équation différentielle ;
- ❸ mettre l'équation sous forme canonique :

$$\frac{df}{dt} + \frac{f}{\tau} = \frac{F}{\tau}$$

en identifiant F et τ ;

- ❹ établir les conditions initiales en utilisant l'énoncé et la continuité de la tension aux bornes du condensateur ;
- ❺ résoudre l'équation différentielle.

3 Bobines et circuit RL

3.1 Description d'une bobine et relation tension-intensité

3.1.1 Présentation

Définition. Une bobine est constituée de l'enroulement régulier d'un fil métallique recouvert d'une gaine ou d'un vernis isolant. Son symbole est :



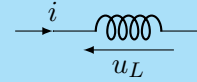
Les bobines sont fréquemment utilisées dans les applications électrotechniques (moteurs électriques, transformateurs). Comme elles sont lourdes et encombrantes, elles sont plus rares en électronique.

3.1.2 Relation fondamentale

Quand du courant circule dans la bobine, un **champ magnétique** apparaît, proportionnel au courant. Si ce champ est variable, apparaît aux bornes de la bobine une tension liée à la dérivée du champ magnétique. Nous étudierons ce phénomène, nommé **induction électromagnétique**, en fin d'année.

En convention récepteur, la tension aux bornes d'une bobine idéale est donnée par la relation :

$$u_L = L \frac{di}{dt}$$



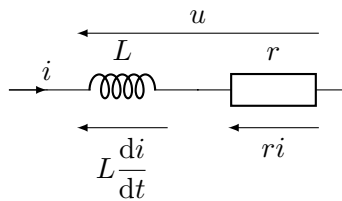
Le coefficient L est nommée **inductance** et s'exprime en henry (H).

On fera attention au fléchage, en convention récepteur. Cette relation fait intervenir la **dérivée** de l'intensité en fonction du temps. Le terme $L \frac{di}{dt}$ est caractéristique du comportement d'une bobine : il est d'autant plus grand que la variation du courant dans la bobine est rapide.

Les inductances courantes se situent entre le mH et le H.

3.2 Modélisation d'une bobine réelle

En réalité, le fil de cuivre enroulé possède une résistance non nulle. Une bobine réelle se modélise donc par l'association en série d'une bobine idéale et d'une résistance électrique r .



Par additivité des tensions, la tension aux bornes de la bobine réelle est :

$$u = L \frac{di}{dt} + ri$$

3.3 Continuité du courant dans une bobine

On sait que :

$$u_L = L \frac{di}{dt}$$

Si i présentait une variation très brusque, cela signifierait une valeur infinie de la tension, ce qui est impossible.

Le **courant traversant une bobine** ne peut pas varier instantanément : c'est une fonction continue du temps.

3.4 Comportement d'une bobine idéale en régime permanent

En régime permanent, le courant ne dépend pas du temps donc :

$$\frac{di}{dt} = 0$$

Donc :

$$u_L = 0$$

En régime permanent, une bobine se comporte comme un fil : la tension à ses bornes est nulle.

3.5 Aspect énergétique

La puissance reçue par la bobine est $u_L i$ donc :

$$\mathcal{P} = L \frac{di}{dt} \times i$$

Or $f' \times f = \left(\frac{1}{2}f^2\right)'$ donc :

$$\mathcal{P} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2 \right)$$

La puissance s'écrit comme la dérivée d'une quantité, autrement dit comme la variation d'un stock.

- Si $\mathcal{E}_L = \frac{1}{2} L i^2$ croît, alors $\mathcal{P} > 0$: la bobine est réceptrice ;
- si $\mathcal{E}_L$ décroît, alors $\mathcal{P} < 0$: la bobine est génératrice.

L'énergie emmagasinée dans une bobine traversée par l'intensité i est :

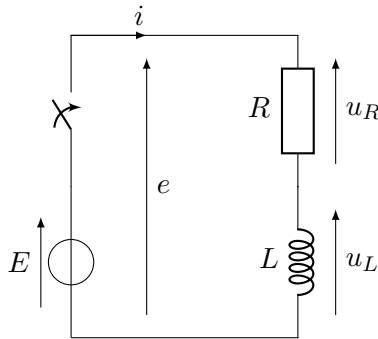
$$\mathcal{E}_L = \frac{1}{2} L i^2$$

3.6 Réponse d'un circuit RL à un échelon de tension

3.6.1 Équation différentielle du circuit

Définition. On appelle dipôle RL l'association en série d'une bobine d'inductance L et d'un conducteur ohmique de résistance R .

Comme lors de l'étude du circuit RC, un échelon de tension peut être obtenu en constituant le circuit suivant :



$e = 0$ à $t \leq 0$ (courant identiquement nul donc $u_R = u_L = 0$).

Lorsque l'interrupteur est fermé, $e = E$.

On cherche à étudier l'établissement du courant dans le circuit RL à partir du moment où l'on ferme l'interrupteur, soit à $t \geq 0$. On écrit la loi d'additivité des tensions :

$$u_L + u_R = E$$

Or, la loi d'Ohm nous dit que :

$$u_R = Ri \quad \text{en convention récepteur}$$

Puis, la relation courant-tension d'une bobine stipule que :

$$u_L = L \frac{di}{dt} \quad \text{en convention récepteur}$$

Donc :

$$Ri + L \frac{di}{dt} = E \quad \text{soit} \quad \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}$$

Mettons cette équation sous forme canonique. On identifie $\tau = L/R$ puis on écrit :

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L} \times \frac{R}{L}$$

L'équation différentielle de l'intensité i dans une bobine, dans un circuit RL soumis à un échelon de tension, s'écrit :

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau}i = \frac{E}{R\tau}$$

C'est une **équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants**. Le second membre est également indépendant du temps.

Définition. Le temps $\tau = L/R$ est appelée constante de temps du circuit RL.

L'interrupteur est initialement ouvert donc le courant circulant dans le circuit est nul. Juste après la fermeture de l'interrupteur, il est encore nul car le courant traversant une bobine ne peut pas varier instantanément :

$$i(0^+) = 0$$

3.6.2 Résolution de l'équation différentielle

Pour résoudre une équation différentielle linéaire à coefficients constants, et second membre constant :

❶ On écrit l'**équation homogène** associée à l'équation différentielle obtenue.

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau}i = 0$$

❷ On écrit la **forme générale de la solution de l'équation homogène**.

$$i(t) = K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

❸ On recherche une **solution particulière constante**.

$$0 + \frac{\lambda}{\tau} = \frac{E}{R\tau} \quad \text{soit} \quad \lambda = \frac{E}{R}$$

$i(t) = E/R$ est une solution particulière de l'équation différentielle.

❹ On écrit la **solution générale**.

$$i(t) = \frac{E}{R} + K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

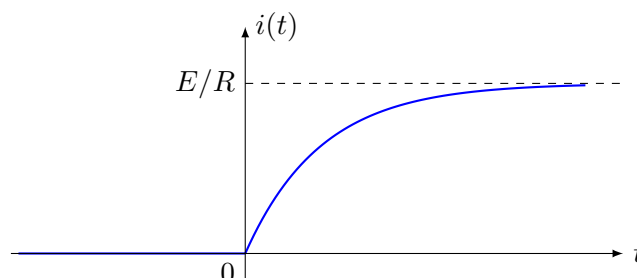
❺ On détermine la constante à l'aide des **conditions initiales**.

On a vu que $i(0) = 0$. Or $i(0) = K + E/R$ donc $K = -E/R$ d'où :

$$i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

La solution de l'équation différentielle de la réponse d'un dipôle RL à un échelon de tension est :

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$



3.6.3 Évolution de la tension aux bornes de la bobine

Méthode 1 : on sait que :

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt}(t)$$

Or :

$$\frac{di}{dt} = 0 - \frac{E}{R} \times \left(-\frac{1}{\tau}\right) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = \frac{E}{\tau \times R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Donc :

$$u_L(t) = L \frac{E}{R\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

La tension aux bornes de la bobine vaut donc :

$$u_L(t) = E \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

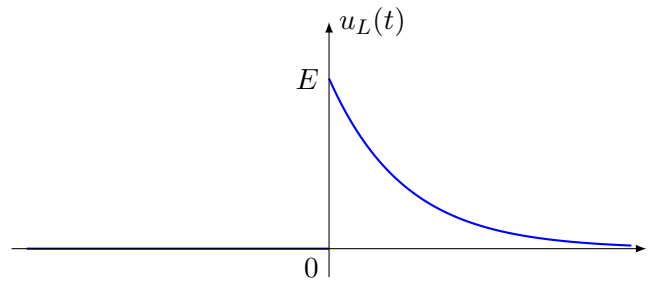
Elle présente une discontinuité en $t = 0$, au moment de la fermeture du circuit.

Méthode 2 : d'après la loi des mailles :

$$u_L = E - Ri$$

$$u_L(t) = E - R \frac{E}{R} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

$$u_L(t) = E \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$



3.6.4 Bilan de puissance

On écrit la loi des mailles :

$$u_L + Ri = E$$

On multiplie l'égalité par i :

$$u_L i + Ri^2 = Ei$$

Donc :

$$L \frac{di}{dt} i + Ri^2 = Ei$$

D'où le bilan énergétique :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) + Ri^2 = Ei$$

Ou encore :

$$\mathcal{P}_g = \frac{d\mathcal{E}_L}{dt} + \mathcal{P}_J$$

La puissance générée par le générateur permet d'augmenter la puissance emmagasinée par la bobine ou est dissipée par effet Joule.

Remarque. Au contraire du circuit RC, la puissance en régime permanent n'est pas nulle : le courant circule dans la résistance et une puissance E^2/R est dissipée en régime permanent. On ne peut pas intégrer ce bilan de puissance.