MATHÉMATIQUES

05

Fonctions

CAP | Mathématiques | Module 5

Objectifs du chapitre :

- Lire l'image et l'antécédent sur un graphique
- Calculer l'image d'un nombre par une fonction donnée par une expression
- Lire et compléter un tableau de valeurs
- Reconnaître une fonction linéaire (et affine, en complément du programme)

1. Introduction — Les fonctions dans la vie courante

Situation professionnelle — Suivi de température

Situation 1 — Chauffagiste : Un installateur thermique met en service une chaudière. Il relève la température de l'eau toutes les 5 minutes pendant le préchauffage. À chaque instant t (en minutes), il associe une température T (en $^\circ$C). C'est un exemple de **fonction** : à chaque valeur de t, on associe une unique valeur de T.

Situation 2 — Coût de production : Un ébéniste achète des planches de chêne à 12 € le mètre linéaire. Le coût total C dépend de la longueur x commandée : $C(x) = 12x$. C'est une **fonction linéaire**.

2. Notion de fonction

Définition — Fonction :
Une **fonction** f est un procédé qui, à chaque nombre x, associe **un unique nombre** noté $f(x)$.

On note : $f : x \longmapsto f(x)$

Exemple : La fonction f définie par $f(x) = 2x + 3$ associe à $x = 4$ la valeur $f(4) = 2 \times 4 + 3 = 11$.

Définition — Image et antécédent :

- Le nombre $f(x)$ est l'**image** de x par la fonction f.
- Le nombre x est un **antécédent** de $f(x)$ par la fonction f.

Exemple : Si $f(x) = 3x - 1$, alors $f(2) = 5$. On dit que 5 est l'image de 2, et que 2 est un antécédent de 5.

Attention — Un nombre peut avoir plusieurs antécédents !

- Chaque nombre x a **une seule image** par f.
- Mais un nombre peut avoir **zéro, un ou plusieurs antécédents**.

3. Tableau de valeurs

Définition — Tableau de valeurs :
Un **tableau de valeurs** regroupe plusieurs valeurs de x et les images $f(x)$ correspondantes.

Exemple — Température en fonction du temps :
Un chauffagiste relève la température d'un ballon d'eau chaude toutes les 10 minutes :

Temps t (min)	0	10	20	30	40	50	60
Temp. T (°C)	18	28	37	44	50	54	56

Ici, T est une fonction de t. Par exemple : l'image de 20 est 37, donc $T(20) = 37\,°\mathrm{C}$.
L'antécédent de 50 est 40 min.

Méthode — Compléter un tableau de valeurs :

1. Identifier la formule de la fonction (si elle est donnée).
2. Remplacer x par chaque valeur du tableau.
3. Calculer l'image $f(x)$ et la noter dans le tableau.

Exemple — Coût en fonction de la quantité :
Un fournisseur de vis facture $C(x) = 0{,}05x + 4$ où x est le nombre de vis et 4 € le forfait de livraison.

x (nombre de vis)	0	50	100	200	500
$C(x)$ (en €)	4	6,50	9	14	29

Par exemple : $C(200) = 0{,}05 \times 200 + 4 = 10 + 4 = 14$ €.

4. Représentation graphique

Définition — Courbe représentative :
La **courbe représentative** d'une fonction f est l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;\,f(x))$ placés dans un repère.

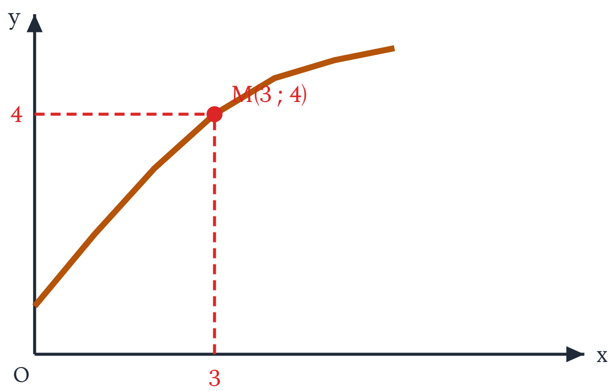
Chaque point M de la courbe a pour abscisse x et pour ordonnée $f(x)$.

Méthode — Tracer une courbe représentative :

1. Compléter un tableau de valeurs (au moins 5 à 7 valeurs).
2. Choisir des axes gradués adaptés (unités, échelles).
3. Placer chaque point $(x\,;\,f(x))$ dans le repère.
4. Relier les points par une courbe lisse (sans angles).

Méthode — Lire une image ou un antécédent sur un graphique :

- **Lire l'image de a :** partir de $x = a$ sur l'axe horizontal, monter (ou descendre) jusqu'à la courbe, puis lire la valeur sur l'axe vertical. C'est $f(a)$.
- **Lire un antécédent de b :** partir de $y = b$ sur l'axe vertical, aller horizontalement jusqu'à la courbe, puis lire la valeur sur l'axe horizontal.



Attention — Lecture graphique :

- La lecture graphique donne des valeurs **approchées** (pas toujours exactes).
- Un antécédent peut ne pas exister, ou il peut y en avoir plusieurs (la droite horizontale coupe la courbe en 0, 1 ou plusieurs points).

5. Variations d'une fonction

Définition — Fonction croissante, fonction décroissante :
Sur un intervalle $[a\,;\,b]$:

- Une fonction est **croissante** si, lorsque x augmente, $f(x)$ augmente aussi. La courbe « monte ».
- Une fonction est **décroissante** si, lorsque x augmente, $f(x)$ diminue. La courbe « descend ».

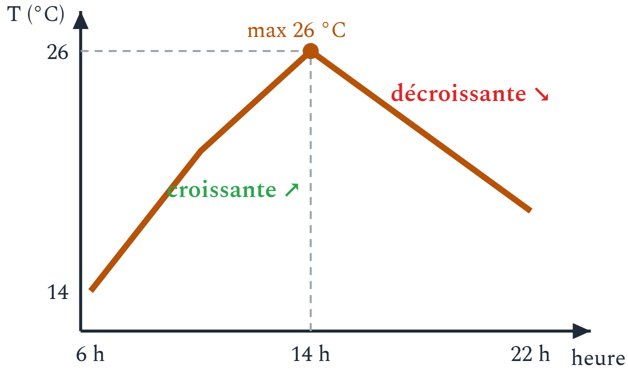
Définition — Tableau de variations :
Le **tableau de variations** résume le sens de variation d'une fonction sur chaque intervalle :

- Une flèche $\nearrow$ indique que la fonction est croissante.
- Une flèche $\searrow$ indique que la fonction est décroissante.

Exemple — Température dans un local :
Un technicien de maintenance énergétique observe la température d'un local au cours de la journée :

- De 6h à 14h : la température augmente de $14°C$ à $26°C$ $\longrightarrow$ fonction **croissante** sur $[6\,;\,14]$.
- De 14h à 22h : la température diminue de $26°C$ à $18°C$ $\longrightarrow$ fonction **décroissante** sur $[14\,;\,22]$.

Le maximum est $26°C$, atteint à 14h.



Méthode — Décrire les variations d'une fonction à partir d'un graphique :

1. Repérer les intervalles où la courbe « monte » (croissante) et « descend » (décroissante).
2. Identifier les valeurs de x où le sens change (maximums, minimums).
3. Compléter le tableau de variations avec les flèches $\nearrow$ ou $\searrow$.

6. Fonction linéaire

Définition — Fonction linéaire :

Une **fonction linéaire** est une fonction de la forme :

$$f(x) = ax$$

où a est un nombre réel non nul appelé **coefficient**.

La fonction linéaire traduit une situation de **proportionnalité** : le coefficient a est le coefficient de proportionnalité.

Propriétés de la fonction linéaire :

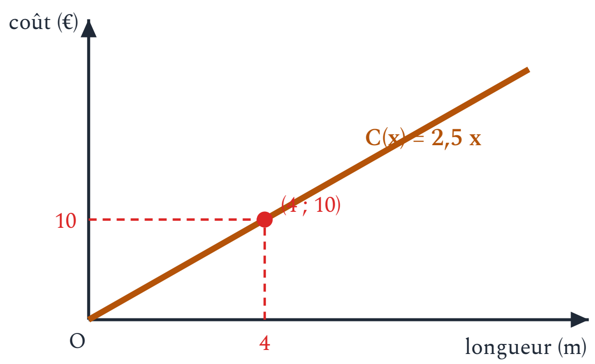
- Sa courbe représentative est une **droite passant par l'origine** $O(0\,;\,0)$.
- Si $a > 0$, la fonction est **croissante** (droite qui monte).
- Si $a < 0$, la fonction est **décroissante** (droite qui descend).
- Le coefficient a représente la **pente** de la droite.

Exemple — Coût proportionnel :
Un menuisier achète des tasseaux à 2,50 € le mètre. Le coût total est :

$$C(x) = 2{,}50\,x$$

x (en m)	0	1	2	4	10
$C(x)$ (en €)	0	2,50	5,00	10,00	25,00

C'est une fonction linéaire de coefficient $a = 2{,}50$. Sa représentation graphique est une droite passant par l'origine.



Méthode — Vérifier qu'une fonction est linéaire :

1. **À partir d'un tableau :** calculer $\frac{f(x)}{x}$ pour chaque valeur. Si le rapport est toujours le même, la fonction est linéaire et ce rapport est a.
2. **À partir d'un graphique :** vérifier que la courbe est une droite passant par l'origine.
3. **À partir d'une formule :** vérifier qu'elle s'écrit $f(x) = ax$ (pas de terme constant ajouté).

Attention — Linéaire ≠ affine :

- $f(x) = 3x$ est une fonction **linéaire** (passe par l'origine, proportionnalité).
- $g(x) = 3x + 5$ est une fonction **affine** (ne passe PAS par l'origine, pas de proportionnalité).

MINI-EXERCICE :

Soit $f(x) = 2x + 7$. Calcule f(0), f(3) et f(10).

MINI-EXERCICE :

Le coût de location d'une scie est C(h) = 15h + 30. Calcule C(4). Que représente C(0) ?

MINI-EXERCICE :

La fonction f(x) = 5x est-elle croissante ou décroissante ? Justifie.

Erreurs fréquentes à éviter

- **Confondre image et antécédent** — f(3) = 12 : l'image de 3 est 12. L'antécédent de 12 est 3.
- **Lire le graphique à l'envers** — Pour trouver f(x), on part de l'axe des x et on lit sur l'axe y. Pour l'antécédent, on fait l'inverse.
- **Dire qu'une droite qui monte est « positive »** — Elle est croissante, pas « positive ». Le signe fait référence aux valeurs, pas au sens de variation.

7. L'essentiel à retenir

À retenir :

- Une **fonction** associe à chaque nombre x une unique image $f(x)$.
- **Image :** on connaît x, on calcule $f(x)$. **Antécédent :** on connaît $f(x)$, on cherche x .
- Un **tableau de valeurs** regroupe des couples $(x\,;\,f(x))$.
- La **courbe représentative** est l'ensemble des points $(x\,;\,f(x))$ dans un repère.
- Une fonction est **croissante** si la courbe monte, **décroissante** si elle descend.
- La **fonction linéaire** $f(x) = ax$ traduit la proportionnalité. Sa courbe est une droite passant par l'origine.

MATHÉMATIQUES

05

Fonctions

CAP | Exercices | Module 5

Capacités travaillées :

- Obtenir l'image d'un nombre par une fonction donnée
- Obtenir un antécédent d'un nombre par une fonction donnée
- Compléter un tableau de valeurs
- Lire image et antécédent sur un graphique, décrire les variations
- Vérifier qu'une fonction est linéaire et déterminer son coefficient

Image et antécédent par le calcul

Exercice 1 — Calculer des images

Soit la fonction f définie par $f(x) = 3x - 5$.

Calculer :

a) $f(0)$ b) $f(2)$ c) $f(4)$ d) $f(-1)$ e) $f(10)$

Mes calculs :

Exercice 2 **Image et antécédent — Vocabulaire**

Soit $g(x) = 2x + 1$.

a) Calculer l'image de 3 par g.

b) Calculer l'image de -2 par g.

c) Quel est l'antécédent de 9 par g ? (Résoudre $g(x) = 9$.)

d) Quel est l'antécédent de -5 par g ?

Mes calculs :

Exercice 3 **Coût de tuyaux de cuivre**

Un plombier chauffagiste achète des tuyaux de cuivre à 8 € le mètre. Le coût total en euros est donné par la fonction $C(x) = 8x$ où x est la longueur en mètres.

a) Calculer le coût pour 3 m de tuyau.

b) Calculer le coût pour 12,5 m de tuyau.

c) Le plombier a dépensé 60 €. Quelle longueur de tuyau a-t-il achetée ?

d) Quelle est l'image de 7 par la fonction C ? Interpréter.

Mes calculs :

Exercice 4 — Coût de planches de chêne

Un ébéniste commande des planches de chêne. Le fournisseur facture un forfait de livraison de 15 € plus 6 € par mètre de planche. Le coût total est donné par $C(x) = 6x + 15$.

a) Calculer le coût pour 10 m de planches.

b) Calculer le coût pour 25 m de planches.

c) Le budget de l'ébéniste est de 100 €. Quelle longueur maximale peut-il commander ?

Mes calculs :

Tableau de valeurs

Exercice 5 **Compléter un tableau de valeurs**

Soit $f(x) = 4x - 2$. Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	0	1	2	3	5	10
$f(x)$	...	...	...	...	...	...

Mes calculs :

Exercice 6 **Température d'un ballon d'eau chaude**

Un installateur thermique met en service un ballon d'eau chaude. Il relève la température de l'eau toutes les 15 minutes :

Temps t (min)	0	15	30	45	60	75	90
Temp. T (°C)	15	27	38	47	53	57	59

a) Quelle est l'image de 30 par la fonction T ? Interpréter.

b) Quel est l'antécédent de 53 ? Interpréter.

c) La température de 40 °C est-elle atteinte ? Si oui, entre quels instants ?

d) La fonction T est-elle croissante ou décroissante sur l'intervalle $[0\,;\,90]$? Justifier.

Mes calculs :

Exercice 7

Distance de freinage

La distance de freinage d (en mètres) d'une voiture sur route sèche en fonction de sa vitesse v (en km/h) est donnée dans le tableau :

Vitesse v (km/h)	30	50	70	90	110	130
Distance d (m)	6	17	33	54	80	112

a) Quelle est la distance de freinage à 90 km/h ?

b) À quelle vitesse la distance de freinage est-elle de 33 m ?

c) La fonction d est-elle croissante ou décroissante ? Interpréter.

d) La distance de freinage est-elle proportionnelle à la vitesse ? Justifier.

Mes calculs :

Lecture graphique

Exercice 8 **Lecture d'images et d'antécédents**

On donne la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[0\,;\,8]$. La courbe passe par les points suivants : $(0\,;\,1)$, $(1\,;\,3)$, $(2\,;\,4)$, $(3\,;\,4)$, $(4\,;\,3)$, $(5\,;\,1)$, $(6\,;\,0)$, $(7\,;\,1)$, $(8\,;\,3)$.

En utilisant ces informations :

a) Quelle est l'image de 2 ?

b) Quelle est l'image de 5 ?

c) Quels sont les antécédents de 3 ?

d) Quels sont les antécédents de 1 ?

e) Le nombre 5 a-t-il un antécédent ? Justifier.

Mes calculs :

Exercice 9 Température d'un local chauffé

Un technicien de maintenance énergétique observe la température d'un local au cours de la journée. La fonction T donne la température en $^\circ$C en fonction de l'heure h (de 6h à 22h). Les relevés donnent :

h	6	8	10	12	14	16	18	20	22
$T(h)$ ($^\circ$C)	14	17	20	23	25	24	21	18	15

a) Quelle est la température à 10h ? À 18h ?

b) À quelle(s) heure(s) la température vaut-elle 18 $^\circ$C ?

c) Sur quel(s) intervalle(s) la fonction est-elle croissante ? Décroissante ?

d) Quelle est la température maximale ? À quelle heure est-elle atteinte ?

Mes calculs :

Exercice 10 Séchage d'un vernis

Un ébéniste applique un vernis sur un meuble. La dureté du film de vernis (notée D, en unités arbitraires) évolue en fonction du temps t (en heures) :

t (**h**)	0	1	2	4	6	8	12	24
$D(t)$	0	2	5	12	18	22	24	25

a) Quelle est la dureté après 4 heures ?

b) Au bout de combien d'heures la dureté dépasse-t-elle 20 ?

c) La fonction D est-elle croissante sur $[0\,;\,24]$? Justifier.

d) Un menuisier peut manipuler la pièce quand $D \geqslant 18$. Au bout de combien d'heures peut-il manipuler le meuble ?

Mes calculs :

Variations et tableau de variations

Exercice 11 **Consommation de chauffage**

La consommation mensuelle de gaz (en m^3) d'un immeuble en fonction du mois est donnée ci-dessous :

Mois	Jan	Fév	Mar	Avr	Mai	Juin	Juil	Août	Sep	Oct	Nov	Déc
C (m^3)	350	320	250	150	80	30	10	10	50	180	280	340

a) Pendant quel mois la consommation est-elle maximale ? Minimale ?

b) Sur quels mois la consommation est-elle décroissante ?

c) Sur quels mois la consommation est-elle croissante ?

d) Interpréter l'allure générale de la courbe (pourquoi cette forme ?).

Mes calculs :

Exercice 12 **Décrire les variations d'une fonction**

La courbe représentative d'une fonction f définie sur $[0\,;\,10]$ passe par les points suivants :

$(0\,;\,2)$, $(2\,;\,6)$, $(4\,;\,8)$, $(6\,;\,8)$, $(8\,;\,5)$, $(10\,;\,1)$.

a) Compléter le tableau de variations de f en indiquant les intervalles de croissance et de décroissance.

b) Quelle est la valeur maximale de f ? Pour quelle(s) valeur(s) de x est-elle atteinte ?

c) Quelle est la valeur minimale de f ? Pour quelle valeur de x ?

Mes calculs :

Fonction linéaire

Exercice 13 **Reconnaître une fonction linéaire**

Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont linéaires ? Justifier.

a) $f(x) = 5x$ b) $g(x) = 3x + 2$ c) $h(x) = -4x$ d) $k(x) = x^2$ e) $m(x) = \dfrac{x}{3}$

Mes calculs :

Exercice 14 Facturation à l'heure

Un plombier chauffagiste facture ses interventions 45 € de l'heure (sans frais de déplacement).

a) Écrire la fonction P qui donne le prix en fonction du nombre d'heures x.

b) Est-ce une fonction linéaire ? Justifier.

c) Compléter le tableau de valeurs :

x (h)	0	1	2	3	5
$P(x)$ (€)	...	...	...	...	...

d) Quel est le coefficient de proportionnalité ? Que représente-t-il ?

Mes calculs :

Exercice 15 **Vérifier la linéarité à partir d'un tableau**

Un artisan menuisier vend des étagères sur mesure. Le tableau donne le prix en fonction de la longueur :

Longueur x (m)	0,5	1	1,5	2	3
Prix (€)	20	40	60	80	120

a) Calculer le rapport $\dfrac{\text{Prix}}{x}$ pour chaque valeur. Que constate-t-on ?

b) En déduire que le prix est une fonction linéaire de la longueur. Donner son expression.

c) Quel serait le prix d'une étagère de 2,5 m ?

Mes calculs :

Exercice 16 **Proportionnalité ou non ?**

Un fournisseur propose deux tarifs pour la livraison de sable :

- **Tarif A :** 25 € par tonne (sans frais fixes).
- **Tarif B :** 20 € par tonne + 30 € de frais de livraison.

a) Écrire la fonction $A(x)$ et la fonction $B(x)$ donnant le coût en fonction du nombre de tonnes x.

b) Laquelle est une fonction linéaire ? Justifier.

c) Compléter le tableau pour chaque tarif :

x (tonnes)	1	2	5	10
$A(x)$ (€)	...	...	...	...
$B(x)$ (€)	...	...	...	...

d) À partir de combien de tonnes le tarif B devient-il plus avantageux ?

Mes calculs :

Exercice 17 **Déterminer le coefficient d'une fonction linéaire**

Pour chaque situation, déterminer le coefficient a de la fonction linéaire $f(x) = ax$:

a) $f(3) = 12$

b) $f(5) = -15$

c) La droite représentative passe par le point $(4\,;\,10)$.

d) 8 m de tuyau coûtent 52 €.

Mes calculs :

Problèmes de synthèse

Exercice 18 **Rendement d'une chaudière**

Le rendement R (en %) d'une chaudière à condensation dépend de la température de retour de l'eau t (en °C). Les relevés donnent :

t (°C)	30	35	40	45	50	55	60
R (%)	105	103	100	97	94	91	88

a) Quelle est l'image de 40 par la fonction R ? Interpréter.

b) Pour quelle température de retour le rendement est-il de 97 % ?

c) La fonction R est-elle croissante ou décroissante ? Interpréter.

d) Le rapport $\dfrac{R(t)}{t}$ est-il constant ? La fonction est-elle linéaire ?

Mes calculs :

Exercice 19 **Peinture et surface**

Un peintre en bâtiment utilise une peinture qui couvre 10 m^2 par litre. Le prix d'un litre est 8 €.

a) Écrire la fonction $V(S)$ qui donne le volume de peinture (en litres) nécessaire pour peindre une surface S (en m^2).

b) Est-ce une fonction linéaire ? Si oui, donner le coefficient.

c) Écrire la fonction $C(S)$ qui donne le coût de la peinture en fonction de la surface.

d) Calculer le coût pour peindre une pièce de 35 m^2 (deux couches nécessaires).

Mes calculs :

Exercice 20 **Abonnement à la salle de sport**

Une salle de sport propose deux formules :

- **Formule 1 :** 5 € par séance (pas d'abonnement).
- **Formule 2 :** abonnement de 20 € par mois + 2 € par séance.

On note x le nombre de séances dans le mois.

a) Écrire les fonctions $F_1(x)$ et $F_2(x)$ donnant le coût mensuel pour chaque formule.

b) Laquelle est une fonction linéaire ? Pourquoi ?

c) Compléter le tableau :

x (séances)	2	4	6	8	10	12
$F_1(x)$ (€)	...	...	...	...	...	...
$F_2(x)$ (€)	...	...	...	...	...	...

d) Les deux formules coûtent le même prix pour combien de séances ?

e) Quelle formule conseiller à quelqu'un qui va 3 fois par semaine (12 séances/mois) ?

Mes calculs :