

Fonctions pour le traitement du signal

BTS | Mathématiques | Groupements B1, B2, B3

Objectifs du chapitre :

- Maîtriser les fonctions trigonométriques et les formules d'addition, de duplication et de linéarisation
- Décrire et analyser un signal sinusoïdal : amplitude, pulsation, phase, fréquence, période
- Calculer la valeur efficace d'un signal sinusoïdal par intégration
- Comprendre la notion de décomposition harmonique (analyse de Fourier, niveau introductif)
- Étudier les fonctions hyperboliques et leurs propriétés (groupements B2, B3)
- Analyser un signal amorti de la forme $f(t) = A e^{at} \cos(\omega t + \varphi)$
- Appliquer ces outils au courant alternatif, à la puissance électrique et à l'acoustique du bâtiment

Situation professionnelle

Signaux en électrotechnique et en acoustique du bâtiment

Un technicien en électrotechnique mesure à l'oscilloscope la tension d'alimentation d'un moteur industriel. L'écran affiche une courbe périodique sinusoïdale de fréquence 50 Hz. Comment lire l'amplitude, la période et la phase de ce signal ? Comment calculer la valeur efficace utilisée dans les calculs de puissance ?

Un ingénieur acousticien étudie la propagation sonore dans une salle de concert dont les murs sont traités par des panneaux absorbants. Le niveau sonore décroît en suivant un signal amorti : l'amplitude diminue exponentiellement après l'arrêt de la source. Quel modèle mathématique décrit ce phénomène ?

Un bureau d'études en génie climatique (chauffage, ventilation, climatisation) doit analyser les harmoniques du courant absorbé par un variateur de fréquence. Cette analyse repose sur la décomposition de Fourier d'un signal périodique non sinusoïdal.

Tous ces problèmes font appel aux **fonctions trigonométriques**, aux **fonctions exponentielles complexes** et aux outils du **traitement du signal**.

1. Fonctions trigonométriques — Rappels et compléments

1.1 Définitions sur le cercle trigonométrique

DÉFINITION — COSINUS ET SINUS

Soit M le point du **cercle trigonométrique** (cercle de centre O et de rayon 1) associé à l'angle orienté θ (en radians). On définit :

$$\cos \theta = \text{abscisse de } M, \quad \sin \theta = \text{ordonnée de } M$$

On a toujours $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ (relation fondamentale de la trigonométrie).

DÉFINITION — TANGENTE

Pour $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), on définit :

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

1.2 Valeurs remarquables

Valeurs remarquables à connaître

Angle θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	non défini	0

1.3 Formules d'addition

PROPRIÉTÉ — FORMULES D'ADDITION

Pour tous réels a et b :

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

Formules d'addition — à mémoriser

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

EXEMPLE — VALEUR EXACTE DE $\cos(75^\circ)$

On écrit $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$, soit $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$.

$$\cos(75^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \approx 0,259$$

1.4 Formules de duplication

PROPRIÉTÉ — FORMULES DE DUPLICATION

En posant $b = a$ dans les formules d'addition :

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$$

$$\tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} \quad (\text{si } \tan a \neq \pm 1)$$

ATTENTION

Les trois expressions de $\cos(2a)$ sont toutes correctes. Selon le contexte (linéarisation, simplification), on choisit la forme la plus utile :

- $2 \cos^2 a - 1$ pour exprimer $\cos^2 a$ en fonction de $\cos(2a)$
- $1 - 2 \sin^2 a$ pour exprimer $\sin^2 a$ en fonction de $\cos(2a)$

1.5 Formules de linéarisation**PROPRIÉTÉ — LINÉARISATION DE $\cos^2 A$, $\sin^2 A$ ET $\cos A \sin A$**

Des formules de duplication, on tire directement :

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$$

$$\cos a \sin a = \frac{\sin(2a)}{2}$$

Linéarisation — à mémoriser

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2}, \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$$

MÉTHODE — LINÉARISER UNE EXPRESSION TRIGONOMÉTRIQUE

1. Repérer les puissances ou produits de fonctions trigonométriques.
2. Appliquer les formules de linéarisation pour les remplacer par des sommes de cosinus ou sinus à angle simple ou double.
3. Simplifier l'expression obtenue.

La linéarisation est particulièrement utile pour calculer des intégrales de fonctions trigonométriques ou pour identifier les fréquences présentes dans un signal.

EXEMPLE — LINÉARISATION DE $\cos^2(\omega t)$

On applique la formule : $\cos^2(\omega t) = \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2}$.

Ce résultat montre qu'un signal de la forme $\cos^2(\omega t)$ est composé d'une composante continue ($\frac{1}{2}$) et d'une harmonique de fréquence double ($\frac{1}{2}\cos(2\omega t)$).

2. Signal sinusoïdal — Forme générale

2.1 Définition et paramètres

DÉFINITION — SIGNAL SINUSOÏDAL

Un **signal sinusoïdal** est une fonction du temps de la forme :

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$$

où :

- $U_m > 0$ est la **valeur maximale** (ou amplitude) — en volts (V), ampères (A), pascals (Pa)...
- $\omega > 0$ est la **pulsation** (ou vitesse angulaire) — en radians par seconde (rad/s)
- φ est la **phase à l'origine** (ou déphasage initial) — en radians (rad)
- t est le temps — en secondes (s)

PROPRIÉTÉ — FRÉQUENCE ET PÉRIODE

Le signal $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ est périodique. Sa **période** T et sa **fréquence** f sont liées à la pulsation par :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

On a donc : $\omega = 2\pi f$.

Relations fondamentales signal sinusoïdal

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi), \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f, \quad f = \frac{1}{T}$$

EXEMPLE — TENSION DU RÉSEAU 50 HZ

Le réseau électrique français fournit une tension sinusoïdale de fréquence $f = 50$ Hz et de valeur efficace $U = 230$ V (valeur efficace, voir §3).

La valeur maximale est $U_m = U\sqrt{2} = 230\sqrt{2} \approx 325$ V.

La pulsation : $\omega = 2\pi \times 50 = 100\pi \approx 314,2$ rad/s.

La période : $T = \frac{1}{50} = 0,02$ s = 20 ms.

Avec une phase nulle : $u(t) = 325 \cos(100\pi t)$ V.

2.2 Interprétation graphique des paramètres

MÉTHODE — LIRE LES PARAMÈTRES D'UN SIGNAL SINUSOÏDAL SUR UN GRAPHE

1. **Amplitude** U_m : demi-écart entre le maximum et le minimum de la courbe ($U_m = \frac{u_{\max} - u_{\min}}{2}$).
2. **Période** T : durée d'un cycle complet (entre deux maxima consécutifs, par exemple).
3. **Pulsation** ω : calculée par $\omega = \frac{2\pi}{T}$.
4. **Phase** φ : déterminée par la valeur à l'origine $u(0) = U_m \cos \varphi$. Si $u(0) = 0$ et u est croissant en $t = 0$, alors $\varphi = -\pi/2$ (signal en sinus).

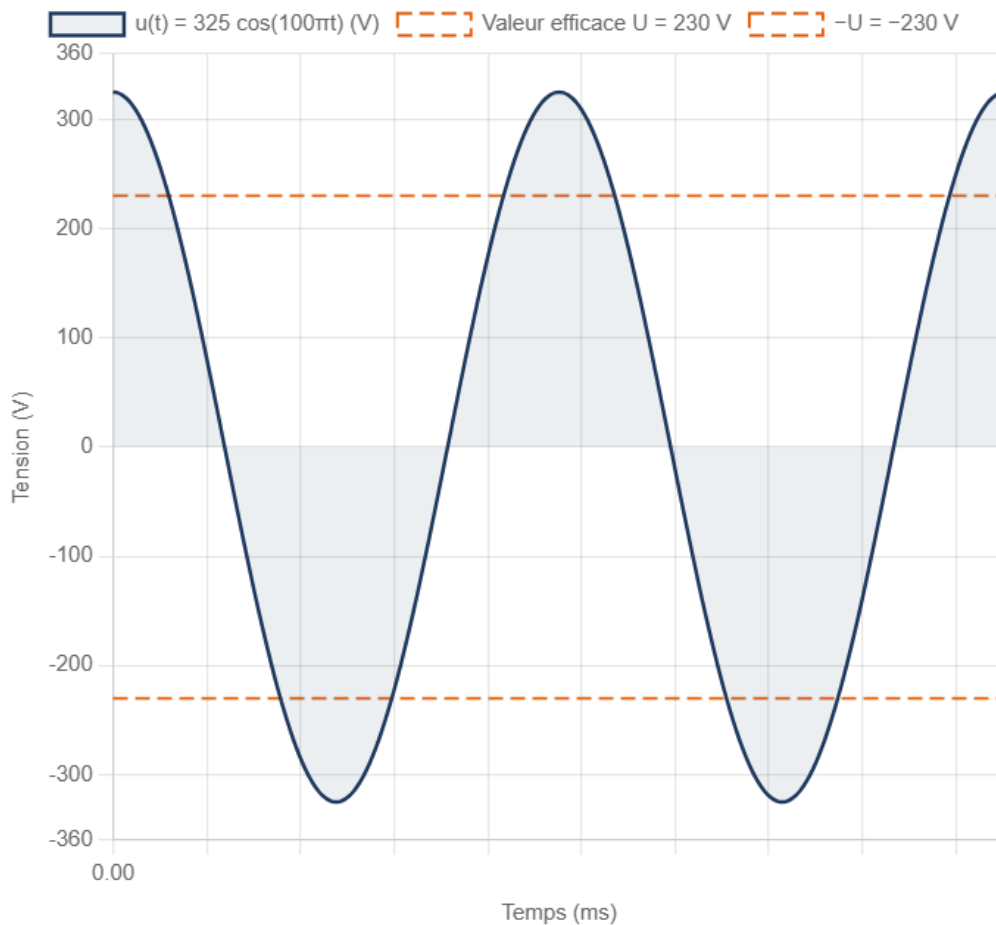
ATTENTION — COSINUS OU SINUS ?

Par convention, on utilise ici $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$. On peut aussi écrire avec le sinus :

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi) = U_m \cos\left(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2}\right)$$

Les deux formes sont équivalentes. En électrotechnique, la convention cosinus est dominante.

Signal sinusoïdal $u(t) = 325 \cos(100\pi t)$ — réseau 50 Hz



2.3 Déphasage entre deux signaux

DÉFINITION — DÉPHASAGE

Soient deux signaux sinusoïdaux de même pulsation ω :

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u), \quad i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$$

Le déphasage de i par rapport à u est $\Delta\varphi = \varphi_i - \varphi_u$.

- Si $\Delta\varphi > 0$: i est **en avance** sur u .
- Si $\Delta\varphi < 0$: i est **en retard** sur u .
- Si $\Delta\varphi = 0$: i et u sont **en phase**.
- Si $\Delta\varphi = \pm\pi/2$: les signaux sont **en quadrature**.

EXEMPLE — CIRCUIT RL (ÉLECTROTECHNIQUE)

Dans un circuit RL alimenté par une tension sinusoïdale, le courant est en retard sur la tension d'un angle $\varphi = \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)$.

Pour $R = 100 \Omega$, $L = 0,2 \text{ H}$, $\omega = 100\pi \text{ rad/s}$:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{0,2 \times 100\pi}{100}\right) = \arctan(0,2\pi) \approx \arctan(0,628) \approx 32^\circ$$

Le courant est donc en retard de 32° sur la tension.

3. Valeur efficace d'un signal sinusoïdal

3.1 Définition par intégrale

DÉFINITION — VALEUR EFFICACE

La **valeur efficace** (ou RMS, *Root Mean Square*) d'un signal périodique $u(t)$ de période T est définie par :

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u(t)^2 dt}$$

C'est la racine carrée de la **moyenne du carré** du signal sur une période.

3.2 Calcul pour un signal sinusoïdal

PROPRIÉTÉ — VALEUR EFFICACE D'UN SIGNAL SINUSOÏDAL

Pour $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$, la valeur efficace est :

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

MÉTHODE — DÉMONSTRATION PAR LINÉARISATION

On calcule :

$$U^2 = \frac{1}{T} \int_0^T U_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt$$

On utilise la linéarisation $\cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$:

$$\begin{aligned} U^2 &= \frac{U_m^2}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos(2\omega t + 2\varphi)}{2} dt \\ &= \frac{U_m^2}{2T} \left[\int_0^T dt + \int_0^T \cos(2\omega t + 2\varphi) dt \right] \end{aligned}$$

Or l'intégrale d'un cosinus sur une période complète est nulle :

$$\int_0^T \cos(2\omega t + 2\varphi) dt = 0$$

Donc :

$$U^2 = \frac{U_m^2}{2T} \times T = \frac{U_m^2}{2} \quad \Rightarrow \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

Valeur efficace — Relation entre valeur maximale et valeur efficace

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707 U_m \quad \Leftrightarrow \quad U_m = U\sqrt{2} \approx 1,414 U$$

EXEMPLE — RÉSEAU 230 V

Le réseau électrique fournit $U = 230 \text{ V}$ (valeur efficace). La valeur maximale est :

$$U_m = 230\sqrt{2} \approx 325 \text{ V}$$

Inversement, si on lit $U_m = 311 \text{ V}$ à l'oscilloscope, la valeur efficace est :

$$U = \frac{311}{\sqrt{2}} \approx 220 \text{ V}$$

3.3 Valeur moyenne

DÉFINITION — VALEUR MOYENNE

La **valeur moyenne** d'un signal périodique $u(t)$ de période T est :

$$\langle u \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$$

Pour un signal sinusoïdal pur $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$, la valeur moyenne est **nulle** sur une période entière :

$$\langle u \rangle = 0$$

ATTENTION — VALEUR MOYENNE D'UN SIGNAL REDRESSÉ

La valeur moyenne d'un signal sinusoïdal est nulle, mais la valeur moyenne du **signal redressé** $|u(t)|$ est non nulle :

$$\langle |u| \rangle = \frac{2U_m}{\pi} \approx 0,637 U_m$$

Ne pas confondre valeur moyenne, valeur efficace et valeur maximale.

3.4 Application — Puissance électrique

PROPRIÉTÉ — PUISSANCE ACTIVE EN ALTERNATIF SINUSOÏDAL

Dans un circuit monophasé alimenté par $u(t) = U_m \cos(\omega t)$ et parcouru par $i(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi)$, la **puissance active** (puissance moyenne dissipée) est :

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi$$

où U et I sont les valeurs efficaces de la tension et du courant, et φ est le déphasage courant/tension.

EXEMPLE — MOTEUR ÉLECTRIQUE (B2 ÉLECTROTECHNIQUE)

Un moteur est alimenté sous $U = 230 \text{ V}$ (efficace), absorbe un courant $I = 8 \text{ A}$ (efficace) avec un déphasage $\varphi = 30^\circ$ ($\cos\varphi = 0,866$).

Puissance active : $P = 230 \times 8 \times 0,866 \approx 1\,594 \text{ W} \approx 1,6 \text{ kW}$.

Puissance apparente : $S = U \times I = 230 \times 8 = 1\,840 \text{ VA}$.

Puissance réactive : $Q = U \times I \times \sin\varphi = 1\,840 \times 0,5 = 920 \text{ VAR}$.

MINI-EXERCICE 1

Analyse d'un signal sinusoïdal

Un signal électrique a pour expression $u(t) = 48 \cos(200\pi t - \pi/3)$ (en volts).

- 1) Identifier l'amplitude, la pulsation et la phase à l'origine.
- 2) Calculer la fréquence et la période.
- 3) Calculer la valeur efficace.
- 4) Calculer $u(0)$ et $u\left(\frac{1}{200}\right)$.

4. Décomposition harmonique — Introduction à l'analyse de Fourier

4.1 Idée générale

DÉFINITION — DÉCOMPOSITION EN SÉRIE DE FOURIER

Tout signal **périodique** de période T , sous des conditions techniques assez peu restrictives (théorème de Dirichlet), peut être décomposé en une somme (éventuellement infinie) de sinusoïdes :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

où $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ est la **pulsation fondamentale**.

- a_0 : composante continue (valeur moyenne)
- Pour $n = 1$: **fondamental** (fréquence $f_0 = 1/T$)
- Pour $n \geq 2$: **harmoniques de rang n** (fréquences multiples de f_0)

PROPRIÉTÉ — COEFFICIENTS DE FOURIER

Les coefficients sont calculés par intégration sur une période :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

ATTENTION — NIVEAU BTS

Au niveau BTS, on ne calcule généralement pas les coefficients de Fourier (c'est un niveau licence). Ce qui est attendu :

- Comprendre qu'un signal périodique non sinusoïdal contient plusieurs harmoniques
- Interpréter un spectre de fréquences fourni
- Savoir que les harmoniques peuvent perturber des équipements électriques (perturbations harmoniques en électrotechnique)

Application — Harmoniques en électrotechnique (B2)

Un variateur de fréquence industriel absorbe un courant dont la forme d'onde n'est pas sinusoïdale mais ressemble à une série d'impulsions. En réalité, ce courant est composé du fondamental (50 Hz) et d'harmoniques (150 Hz, 250 Hz, 350 Hz...). Ces harmoniques peuvent perturber d'autres appareils sur le même réseau.

Un ingénieur peut représenter le **spectre harmonique** du courant : un diagramme en barres donnant l'amplitude de chaque harmonique en fonction de sa fréquence. On cherche à vérifier que les harmoniques respectent les normes en vigueur (CEI 61000).

EXEMPLE — SIGNAL CRÉNEAU (ONDE CARRÉE)

Un signal créneau d'amplitude A et de période T a pour décomposition de Fourier :

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{4A}{\pi} \left[\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega_0 t) + \dots \right] \\ &= \frac{4A}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)\omega_0 t)}{2k+1} \end{aligned}$$

Ce signal ne contient que les harmoniques impaires. L'amplitude de l'harmonique de rang n est $\frac{4A}{n\pi}$ (décroissante en $1/n$).

5. Fonctions hyperboliques (groupements B2, B3)

5.1 Définitions

DÉFINITION — COSINUS HYPERBOLIQUE ET SINUS HYPERBOLIQUE

Pour tout réel x , on définit :

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Mémoire : \cosh est une moyenne des exponentielles (e^x et e^{-x}) ; \sinh est leur demi-différence.

PROPRIÉTÉ — RELATION FONDAMENTALE

Pour tout réel x :

$$\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1}$$

Démonstration :

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

ATTENTION — ANALOGIE AVEC LES FONCTIONS CIRCULAIRES

On rapproche souvent les fonctions hyperboliques des fonctions trigonométriques :

- Trigo : $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$; Hyperbolique : $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
- Le signe change (soustraction au lieu d'addition) !

5.2 Parité et variations

PROPRIÉTÉ — PARITÉ DES FONCTIONS HYPERBOLIQUES

- \cosh est une fonction **paire** : $\cosh(-x) = \cosh(x)$
- \sinh est une fonction **impaire** : $\sinh(-x) = -\sinh(x)$
- \tanh est une fonction **impaire** : $\tanh(-x) = -\tanh(x)$

PROPRIÉTÉ — DÉRIVÉES DES FONCTIONS HYPERBOLIQUES

$$\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$$

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$$

$$\frac{d}{dx} \tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$$

Dérivées des fonctions hyperboliques

$$(\cosh x)' = \sinh x \quad (\sinh x)' = \cosh x \quad (\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

PROPRIÉTÉ — FORMULES D'ADDITION HYPERBOLIQUES

$$\cosh(a + b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b$$

$$\sinh(a + b) = \sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b$$

EXEMPLE — APPLICATION À LA CHÂÎNETTE (B1 BÂTIMENT)

Le profil d'un câble suspendu entre deux points (câble d'une ligne électrique, arche d'un pont) suit une **chaînette**, dont l'équation est :

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

où a est un paramètre dépendant de la tension et de la densité linéique du câble.

$$\text{Pour } a = 10 \text{ m et } x = 5 \text{ m : } y = 10 \cosh(0,5) = 10 \times \frac{e^{0,5} + e^{-0,5}}{2} \approx 10 \times 1,1276 \approx 11,3 \text{ m.}$$

5.3 Tableau de valeurs remarquables

Valeurs remarquables des fonctions hyperboliques

x	$\cosh x$	$\sinh x$	$\tanh x$
0	1	0	0
1	$\approx 1,543$	$\approx 1,175$	$\approx 0,762$
2	$\approx 3,762$	$\approx 3,627$	$\approx 0,964$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	1

Remarque : $\tanh x \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow +\infty$ (la tangente hyperbolique est bornée entre -1 et 1).

MINI-EXERCICE 2

Calculs avec les fonctions hyperboliques

- 1) Calculer $\cosh(0)$, $\sinh(0)$ et $\tanh(0)$ à partir des définitions.
- 2) Vérifier la relation $\cosh^2(1) - \sinh^2(1) = 1$ numériquement (utiliser $e \approx 2,718$).
- 3) Montrer que $\cosh(x) + \sinh(x) = e^x$ et que $\cosh(x) - \sinh(x) = e^{-x}$.

6. Signal sinusoïdal amorti

6.1 Définition et interprétation physique

DÉFINITION — SIGNAL SINUSOÏDAL AMORTI

Un signal sinusoïdal amorti est une fonction de la forme :

$$f(t) = A e^{at} \cos(\omega t + \varphi)$$

où :

- $A > 0$: amplitude initiale
- $a < 0$: coefficient d'amortissement (en s^{-1}) — négatif pour que le signal s'atténue
- $\omega > 0$: pulsation propre amortie (en rad/s)
- φ : phase initiale (en rad)

L'enveloppe du signal est $A e^{at}$, qui décroît exponentiellement vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$ (si $a < 0$).

PROPRIÉTÉ — COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

Si $a < 0$, alors $e^{at} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$, donc :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} A e^{at} \cos(\omega t + \varphi) = 0$$

Le signal **s'amortit et s'éteint** asymptotiquement. Le temps caractéristique d'amortissement est $\tau = -\frac{1}{a} > 0$.

Temps caractéristique d'amortissement

$$\tau = -\frac{1}{a} = \frac{1}{|a|}$$

Au bout de $t = \tau$, l'amplitude est réduite à $A/e \approx 0,368 A$.

6.2 Exemples physiques

Réponse d'un circuit RLC en électrotechnique (B2)

Un circuit RLC série (résistance R , inductance L , condensateur C) soumis à un échelon de tension produit une tension oscillante amortie :

$$u_C(t) = E \left[1 - e^{-\alpha t} \left(\cos(\omega_d t) + \frac{\alpha}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right) \right]$$

où $\alpha = R/(2L)$ est le coefficient d'amortissement et $\omega_d = \sqrt{1/(LC) - \alpha^2}$ est la pulsation propre amortie. Ce comportement est typique d'un circuit sous-amorti ($\alpha < \omega_0$).

Réverbération sonore en acoustique du bâtiment (B1)

Lorsqu'une source sonore cesse d'émettre dans une salle, le son se réverbère et s'atténue. Le niveau sonore, après arrêt de la source, peut être modélisé localement par un signal amorti. Le **temps de réverbération T60** est le temps nécessaire pour que le niveau sonore chute de 60 dB. Il est lié au coefficient d'absorption des parois (formule de Sabine). Des panneaux acoustiques absorbants réduisent T60 et améliorent l'intelligibilité de la parole.

EXEMPLE — CIRCUIT RLC SOUS-AMORTI

Un circuit RLC a les paramètres suivants : $R = 20 \Omega$, $L = 10 \text{ mH}$, $C = 10 \mu\text{F}$.

$$\text{Pulsation propre : } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-2} \times 10^{-5}}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-7}}} = \frac{1}{10^{-3,5}} \approx 3162 \text{ rad/s.}$$

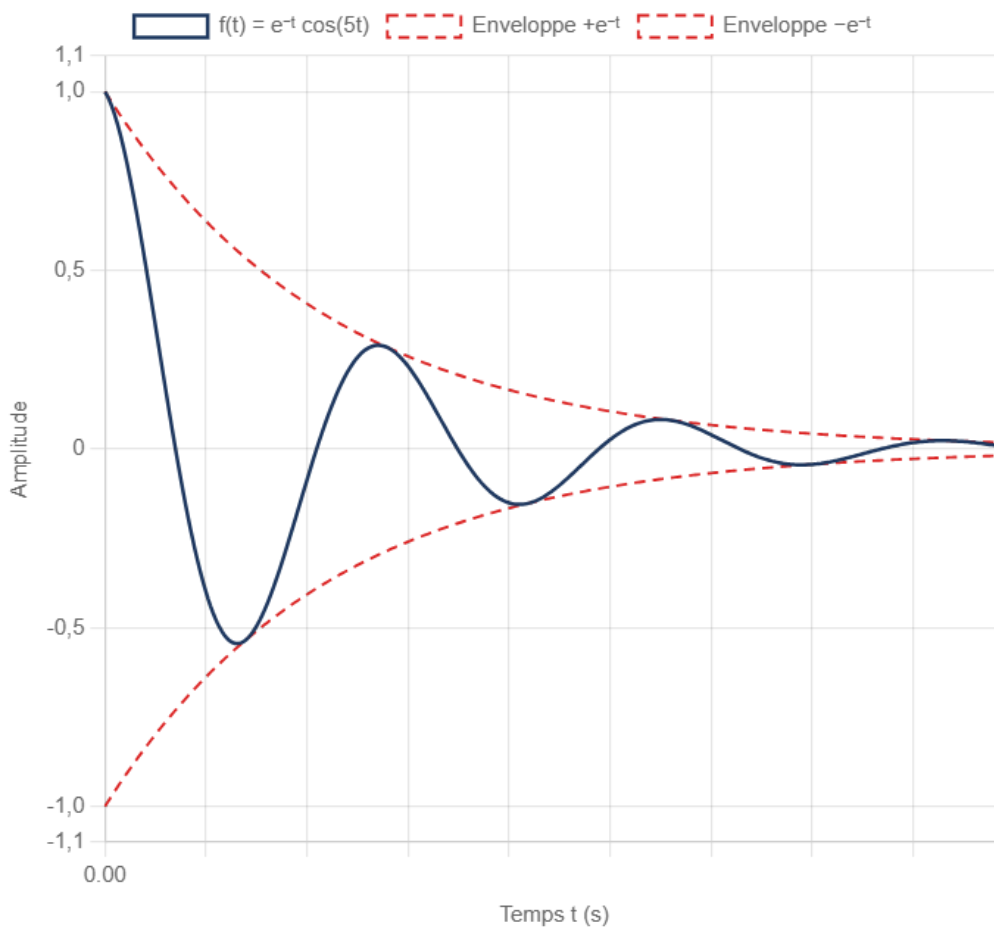
$$\text{Coefficient d'amortissement : } \alpha = \frac{R}{2L} = \frac{20}{2 \times 10^{-2}} = 1000 \text{ s}^{-1}.$$

$$\text{Temps caractéristique : } \tau = 1/\alpha = 1 \text{ ms.}$$

$$\text{Pulsation amortie : } \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{3162^2 - 1000^2} \approx 3000 \text{ rad/s.}$$

La tension oscillante amortie a pour expression approximative : $u(t) \approx E e^{-1000 t} \cos(3000 t)$.

Signal amorti $f(t) = e^{-t} \cos(5t)$ — enveloppe $\pm e^{-t}$



6.3 Dérivée d'un signal amorti

PROPRIÉTÉ — DÉRIVÉE DE $F(T) = A e^{aT} \cos(\omega T + \varphi)$

Par la règle du produit ($(uv)' = u'v + uv'$) :

$$\begin{aligned} f'(t) &= A a e^{at} \cos(\omega t + \varphi) - A \omega e^{at} \sin(\omega t + \varphi) \\ &= A e^{at} [a \cos(\omega t + \varphi) - \omega \sin(\omega t + \varphi)] \end{aligned}$$

On peut mettre sous forme $A e^{at} R \cos(\omega t + \varphi + \psi)$ avec :

$$R = \sqrt{a^2 + \omega^2}, \quad \tan \psi = \frac{\omega}{-a} = \frac{\omega}{|a|}$$

MINI-EXERCICE 3

Signal amorti — Paramètres et dérivée

On donne $f(t) = 5 e^{-2t} \cos(3t)$ pour $t \geq 0$.

- 1) Identifier A , a , ω et φ . Calculer le temps caractéristique τ .
- 2) Calculer $f(0)$, $f(\tau)$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$.
- 3) Calculer $f'(t)$.

7. Écriture canonique $A \cos(\omega t + \varphi)$ — Synthèse

7.1 Somme de deux sinusoides de même pulsation

PROPRIÉTÉ — SOMME DE DEUX SIGNAUX SINUSOÏDAUX DE MÊME PULSATION

La somme de deux signaux sinusoidaux de **même pulsation** ω est un signal sinusoidal de même pulsation :

$$a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) = R \cos(\omega t - \psi)$$

avec $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\tan \psi = \frac{b}{a}$.

MÉTHODE — METTRE SOUS LA FORME $R \cos(\omega t + \varphi)$

Pour transformer $A \cos(\omega t) + B \cos(\omega t + \alpha)$ en $R \cos(\omega t + \varphi)$:

1. Développer $B \cos(\omega t + \alpha) = B \cos \alpha \cos(\omega t) - B \sin \alpha \sin(\omega t)$.
2. Regrouper les termes en $\cos(\omega t)$ et en $\sin(\omega t)$:

$$(A + B \cos \alpha) \cos(\omega t) + (-B \sin \alpha) \sin(\omega t)$$

3. Identifier $a = A + B \cos \alpha$ et $b = -B \sin \alpha$.
4. Calculer $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\tan \varphi = -b/a$ (attention aux quadrants).

EXEMPLE — SUPERPOSITION DE DEUX TENSIONS

On additionne $u_1(t) = 10 \cos(100\pi t)$ et $u_2(t) = 10 \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$.

Développement :

$$u_2 = 10 \left(\cos \frac{\pi}{3} \cos(100\pi t) - \sin \frac{\pi}{3} \sin(100\pi t) \right) = 5 \cos(100\pi t) - 5\sqrt{3} \sin(100\pi t).$$

Somme : $u = u_1 + u_2 = (10 + 5) \cos(100\pi t) - 5\sqrt{3} \sin(100\pi t) = 15 \cos(100\pi t) - 5\sqrt{3} \sin(100\pi t)$.

Amplitude : $R = \sqrt{15^2 + (5\sqrt{3})^2} = \sqrt{225 + 75} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3} \approx 17,3$.

Phase : $\tan \varphi = \frac{5\sqrt{3}}{15} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, donc $\varphi = \frac{\pi}{6}$ (premier quadrant, $a > 0, b < 0$).

Résultat : $u(t) = 10\sqrt{3} \cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$ V.

7.2 Phaseurs et représentation de Fresnel

DÉFINITION — REPRÉSENTATION DE FRESNEL (PHASEUR)

Un signal sinusoïdal $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ est représenté dans le plan complexe par un **phaseur** (vecteur tournant) :

$$\underline{U} = U_m e^{j\varphi} = U_m (\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

La partie réelle de $\underline{U} e^{j\omega t}$ redonne le signal temporel :

$$u(t) = \operatorname{Re}[\underline{U} e^{j\omega t}] = U_m \cos(\omega t + \varphi)$$

PROPRIÉTÉ — ADDITION DE PHASEURS

Additionner deux signaux sinusoïdaux de même pulsation revient à additionner leurs phaseurs :

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2$$

L'amplitude résultante est $|\underline{U}_{12}|$ et la phase est $\arg(\underline{U}_{12})$.

ATTENTION — PHASEURS ET FRÉQUENCES DIFFÉRENTES

La représentation par phaseurs n'est valable que pour des signaux de **même fréquence**. On ne peut pas additionner les phaseurs de deux signaux de fréquences différentes.

8. Applications — Signal électrique et acoustique

8.1 Courant alternatif 50 Hz — Récapitulatif

Caractéristiques du réseau électrique monophasé 230 V / 50 Hz

Grandeur	Symbole	Valeur	Formule
Fréquence	f	50 Hz	—
Période	T	20 ms	$T = 1/f$
Pulsation	ω	$100\pi \approx 314 \text{ rad/s}$	$\omega = 2\pi f$
Valeur efficace	U	230 V	norme européenne
Valeur maximale	U_m	$\approx 325 \text{ V}$	$U_m = U\sqrt{2}$
Expression	$u(t)$	$325 \cos(100\pi t) \text{ V}$	(phase nulle)

8.2 Calcul de puissance — Synthèse

PROPRIÉTÉ — TRIANGLE DES PUISSANCES

En régime alternatif sinusoïdal, on définit :

- **Puissance apparente** : $S = U \cdot I$ (en VA)
- **Puissance active** : $P = U \cdot I \cdot \cos \varphi$ (en W) — puissance réellement consommée
- **Puissance réactive** : $Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi$ (en VAR)
- Relation : $S^2 = P^2 + Q^2$
- Facteur de puissance : $\cos \varphi = P/S$

MINI-EXERCICE 4

Calcul de puissance — Installation électrique industrielle (B2)

Un atelier de menuiserie est alimenté sous 230 V (efficace). Il comporte un moteur de raboteuse qui absorbe 12 A avec un facteur de puissance $\cos \varphi = 0,8$.

- 1) Calculer les puissances apparente, active et réactive du moteur.
- 2) Calculer le déphasage φ en degrés.
- 3) Pour améliorer le facteur de puissance à $\cos \varphi' = 0,95$, quelle puissance réactive Q_C doit fournir le condensateur de compensation ?

8.3 Signal acoustique — Niveau sonore

DÉFINITION — NIVEAU SONORE EN DÉCIBELS

Le **niveau sonore** (ou niveau de pression acoustique) est défini par :

$$L = 10 \log_{10} \left(\frac{P}{P_0} \right) \text{ dB}$$

où P est la pression acoustique efficace et $P_0 = 20 \mu\text{Pa}$ est le seuil d'audibilité de référence.

On utilise aussi le niveau en intensité : $L_I = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right)$ avec $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$.

EXEMPLE — ACOUSTIQUE D'UNE SALLE (B1 BÂTIMENT)

Une salle de réunion présente un niveau sonore de 65 dB lors d'une conversation. Après installation de panneaux acoustiques absorbants, le niveau chute à 55 dB. De quel facteur l'intensité sonore a-t-elle diminué ?

Différence : $\Delta L = 65 - 55 = 10 \text{ dB}$.

$$10 = 10 \log_{10} \left(\frac{I_1}{I_2} \right) \Rightarrow \log_{10} \left(\frac{I_1}{I_2} \right) = 1 \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = 10.$$

L'intensité sonore a été divisée par **10**. Une réduction de 10 dB correspond toujours à un facteur 10 sur l'intensité.

Modulation d'amplitude en optique (B3 Systèmes photoniques)

En systèmes photoniques, la modulation d'amplitude d'un signal lumineux consiste à faire varier l'intensité d'un faisceau laser en fonction d'un signal informatif $m(t)$. Un modulateur acousto-optique ou électro-optique produit un signal modulé :

$$s(t) = A [1 + m \cdot m(t)] \cos(\omega_c t)$$

où ω_c est la pulsation de la porteuse optique et m est l'indice de modulation. Si $m(t) = \cos(\omega_m t)$ (signal sinusoïdal), le spectre du signal modulé fait apparaître trois raies : la porteuse à f_c et deux raies latérales à $f_c \pm f_m$. Ce mécanisme est identique à la modulation AM (amplitude modulation) en radio.

L'essentiel du chapitre**Fonctions trigonométriques**

- $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$
- $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$
- $\cos(2a) = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$
- $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$,
 $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$

Signal sinusoïdal

- $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$
- $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$
- Valeur efficace : $U = U_m/\sqrt{2}$
- Puissance active : $P = UI \cos \varphi$

Fonctions hyperboliques (B2, B3)

- $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
- $(\cosh x)' = \sinh x$, $(\sinh x)' = \cosh x$

Signal amorti

- $f(t) = A e^{at} \cos(\omega t + \varphi)$, $a < 0$
- Temps caractéristique : $\tau = 1/|a|$
- $f'(t) = A e^{at} [a \cos(\omega t + \varphi) - \omega \sin(\omega t + \varphi)]$

Fonctions pour le traitement du signal

BTS | Mathématiques | Durée : 40 min | /20

Nom : _____ Prénom : _____ Date : _____

Exercice 1 — Trigonométrie (4 pts)

- À l'aide d'une formule d'addition, calculer la valeur exacte de $\cos(75^\circ)$ en partant de $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$. (2 pts)
- Linéariser $\sin^2(\omega t)$ à l'aide d'une formule de duplication. (2 pts)

Exercice 2 — Analyse d'un signal sinusoïdal (5 pts)

Un signal électrique a pour expression $u(t) = 30 \cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$ (en volts, t en secondes).

- Identifier l'amplitude U_m , la pulsation ω et la phase à l'origine φ . (1,5 pt)
- Calculer la fréquence f et la période T . (1,5 pt)
- Calculer la valeur efficace U (valeur exacte puis approchée). (1 pt)
- Calculer $u(0)$. (1 pt)

Exercice 3 — Valeur efficace et puissance (4 pts)

Un moteur monophasé est alimenté sous une tension efficace $U = 230$ V et absorbe un courant efficace $I = 5$ A avec un facteur de puissance $\cos \varphi = 0,8$.

- Calculer la puissance apparente S et la puissance active P . (2 pts)
- Calculer la valeur maximale U_m de la tension (arrondir au volt). (1 pt)
- Calculer la puissance réactive Q (on prendra $\sin \varphi = 0,6$). (1 pt)

Exercice 4 — Fonctions hyperboliques (3 pts)

On rappelle $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

- Calculer $\cosh(0)$ et $\sinh(0)$ à partir des définitions. (1 pt)
- Montrer que $\cosh(x) + \sinh(x) = e^x$. (2 pts)

Exercice 5 — Signal sinusoidal amorti (4 pts)

On donne le signal amorti $f(t) = 4e^{-2t} \cos(3t)$ pour $t \geq 0$.

- Identifier A , a , ω et φ . Calculer le temps caractéristique $\tau = \frac{1}{|a|}$. (2 pts)
 - Calculer $f(0)$ et déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ en justifiant. (2 pts)
-