

Mathématiques – DS₂

Les problèmes sont indépendants. Ils peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. Les résultats doivent être justifiés et encadrés (ou soulignés). Numérotez chaque page de votre devoir. La calculatrice est interdite. Bon travail!

Problème 1 : Produits infinis (adapté de CCINP MP 2002)

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite de réels ou complexes non nuls, définie à partir du rang $n_0 \in \mathbb{N}$.

On définit la suite $(P_n)_{n \geq n_0}$ par :

$$\forall n \geq n_0, \quad P_n = \prod_{k=n_0}^n u_k = u_{n_0} \times u_{n_0+1} \times \cdots \times u_n.$$

On dit que le produit infini $\prod_{n \geq n_0} u_n$, de terme général, u_n , converge lorsque la suite des produits partiels $(P_n)_{n \geq n_0}$

converge vers un nombre fini non nul. On notera alors $\prod_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ sa limite.

Lorsque la suite $(P_n)_{n \geq n_0}$ n'admet pas de limite ou si elle converge vers 0, on dit que le produit infini $\prod_{n \geq n_0}$ diverge.

Partie I : Exemples de produits infinis

Exemple 1

Dans cet exemple, pour tout $n \geq 2$, on note $u_n = 1 - \frac{1}{n^2}$.

Q1. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $P_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$.

Q2. En déduire l'existence et calculer la valeur de : $\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

Réponse

Q1. On a :

$$P_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{(1 \times 2 \times \cdots \times (n-1)) \times (3 \times 4 \times \cdots \times (n+1))}{(1 \times 2 \times \cdots \times n)^2}.$$

Après simplification

$$P_n = \frac{n+1}{2n}.$$

Q2. On remarque que $P_n \sim \frac{n}{2n} \sim \frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \in \mathbb{R}^*$.

Donc,

$$\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \text{ existe et } \prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Exemple 2

Dans cet exemple, pour tout $n \geq 1$, on note $u_n = 1 - \frac{1}{4n^2}$.

Q3. Rappeler la formule de Stirling.

Q4. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $P_n = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) = \frac{((2n)!)^2}{2^{4n}(n!)^4} \times (2n+1)$.

Q5. En déduire que le produit $\prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$ converge et que $\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{2}{\pi}$.

Réponse

Q3. On a :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Q4. On a :

$$P_n = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) = \prod_{k=1}^n \frac{(2k-1)(2k+1)}{4k^2} = \frac{\left(\prod_{k=1}^n (2k-1)\right) \left(\prod_{k=1}^n (2k+1)\right)}{4^n \times (n!)^2}.$$

Or, $4^n = 2^{2n}$ et

$$\prod_{k=1}^n (2k-1) = 1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1) = \frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (2n-1) \times (2n)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n)} = \frac{(2n)!}{2^n \times n!}.$$

De même,

$$\prod_{k=1}^n (2k+1) = 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1) = \frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (2n-1) \times (2n)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n)} \times (2n+1) = \frac{(2n)!}{2^n \times n!} \times (2n+1).$$

Ainsi,

$$P_n = \frac{((2n)!)^2}{2^{4n} \times (n!)^4} \times (2n+1)$$

Q5. Par la formule de Stirling :

$$P_n \sim \frac{\left(\sqrt{2\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\right)^2}{2^{4n} \times (2\pi n)^2 \times \left(\frac{n}{e}\right)^{4n}} \times 2n \sim \frac{2^2 \pi \times n \times 2^{4n} \times n^{4n} \times \frac{1}{e^{4n}}}{2^{4n} \times 2^2 \pi^2 \times n^2 \times n^{4n} \times \frac{1}{e^{4n}}} \times 2n \sim \frac{2}{\pi} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \in \mathbb{R}^*.$$

Donc,

$$\text{le produit } \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) \text{ converge et que } \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{2}{\pi}.$$

Exemple 3

Dans cet exemple, pour tout $n \geq 2$, on note $u_n = 1 - \frac{(-1)^n}{n}$.

Q6. Soit $n \geq 1$. Simplifier les expressions de P_{2n} et P_{2n+1} .

Q7. En déduire l'existence et la valeur de : $\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{(-1)^n}{n}\right)$.

Réponse**Q6.** Soit $n \geq 1$.

On a :

$$P_{2n} = \prod_{k=2}^{2n} \left(1 - \frac{(-1)^k}{k} \right).$$

En séparant les facteurs dont l'indice est pair ($k = 2, 4, \dots, 2n$) et les facteurs dont l'indice est impair ($k = 3, 5, \dots, 2n-1$), on a :

$$P_{2n} = \prod_{p=1}^n \left(1 - \frac{(-1)^{2p}}{2p} \right) \times \prod_{p=2}^n \left(1 - \frac{(-1)^{2p-1}}{2p-1} \right) = \prod_{p=1}^n \left(\frac{2p-1}{2p} \right) \times \prod_{p=2}^n \left(\frac{2p}{2p-1} \right) = \frac{1}{2} \times \prod_{p=2}^n \left(\frac{2p-1}{2p} \right) \times \prod_{p=2}^n \left(\frac{2p}{2p-1} \right).$$

Or,

$$\prod_{p=2}^n \left(\frac{2p}{2p-1} \right) = \prod_{p=2}^n \left(\frac{1}{\frac{2p-1}{2p}} \right) = \frac{1}{\prod_{p=2}^n \left(\frac{2p-1}{2p} \right)}.$$

Donc,

$$P_{2n} = \frac{1}{2}.$$

De même,

$$\begin{aligned} P_{2n+1} &= \prod_{k=2}^{2n+1} \left(1 - \frac{(-1)^k}{k} \right) \\ &= \prod_{p=1}^n \left(1 - \frac{(-1)^{2p}}{2p} \right) \times \prod_{p=2}^{n+1} \left(1 - \frac{(-1)^{2p-1}}{2p-1} \right) \\ &= \prod_{p=1}^n \left(\frac{2p-1}{2p} \right) \times \prod_{p=2}^{n+1} \left(\frac{2p}{2p-1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2(n+1)}{2(n+1)-1} \times \prod_{p=2}^n \left(\frac{2p-1}{2p} \right) \times \prod_{p=2}^n \left(\frac{2p}{2p-1} \right) \\ &= \frac{n+1}{2n+1}. \end{aligned}$$

Donc,

$$P_{2n+1} = \frac{n+1}{2n+1}.$$

Q7. On a :

$$P_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P_{2n+1} \sim \frac{n}{2n} \sim \frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}.$$

Par théorème, $P_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \in \mathbb{R}^*$.

Donc,

$$\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{(-1)^n}{n} \right) \text{ existe et vaut } \frac{1}{2}.$$

Partie II : Condition nécessaire de convergence d'un produit infini

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite de réels ou complexes non nuls, définie à partir du rang $n_0 \in \mathbb{N}$.

Q8. En considérant le quotient $\frac{P_n}{P_{n-1}}$, montrer que si le produit infini $\prod_{n \geq n_0} u_n$ converge, alors la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$

converge vers 1.

Dans la suite de cette partie, on note, pour tout $n \geq 1$, $u_n = e^{\frac{1}{n}}$ et $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Q9. Rappeler la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ et montrer que $H_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Q10. Montrer que le produit infini $\prod_{n \geq 1} u_n$ diverge.

La réciproque de l'implication montrée à la question **Q8.** est-elle vraie?

Réponse

Q8. On suppose que le produit infini $\prod_{n \geq n_0} u_n$ converge. Donc, $P_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=n_0}^{+\infty} u_k \in \mathbb{C}^*$.

De plus, on a :

$$\frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{u_{n_0} \times u_{n_0+1} \times \cdots \times u_{n-1} \times u_n}{u_{n_0} \times u_{n_0+1} \times \cdots \times u_{n-1}} = u_n.$$

Donc,

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\prod_{k=n_0}^{+\infty} u_k}{\prod_{k=n_0}^{+\infty} u_k} = 1.$$

Ainsi,

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Q9. On sait que

la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

On remarque que $H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} \geq 0$.

Donc, la suite (H_n) est croissante.

Donc, par théorème de la limite monotone, la suite (H_n) converge ou tend vers $+\infty$.

Or, la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc, la suite (H_n) diverge.

Ainsi,

$$H_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Q10. Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$P_n = \prod_{k=1}^n u_k = \prod_{k=1}^n e^{\frac{1}{k}} = \exp\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) = e^{H_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Donc,

le produit infini $\prod_{n \geq 1} u_n$ diverge.

On remarque que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^0 = 1$.

Donc,

La réciproque de l'implication montrée à la question **Q8.** est fausse.

Partie III : Lien entre produit infini et série

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite de réels strictement positifs, définie à partir du rang $n_0 \in \mathbb{N}$.

Q11. Montrer que le produit infini $\prod_{n \geq n_0} u_n$ converge si, et seulement si, la série $\sum_{n \geq n_0} \ln(u_n)$ converge. Montrer qu'en cas de convergence, on a :

$$\prod_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \exp \left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} \ln(u_n) \right).$$

Indication : utiliser les sommes et produits partiels.

Q12. Soit un réel $x > 0$. Déterminer la nature du produit infini $\prod_{n \geq 1} \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}} \right)$. *On ne demande pas de déterminer la valeur de $\prod_{n=1}^{+\infty} \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}} \right)$.*

Q13. Rappeler l'équivalent usuel en 0 de $\ln(1+x)$.

Q14. Montrer que le produit infini $\prod_{n \geq n_0} (1 + u_n)$ converge si, et seulement si, la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est convergente.

Q15. En utilisant le résultat précédent, retrouver que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Dans la suite de cette partie, on suppose de plus que, pour tout entier $n \geq n_0$, $0 < u_n < 1$.

Q16. Montrer que le produit infini $\prod_{n \geq n_0} (1 - u_n)$ converge si, et seulement si, la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge.

Q17. Déterminer la nature du produit infini $\prod_{n \geq 2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

Réponse

Q11. ($\Rightarrow$) On suppose que le produit infini $\prod_{n \geq n_0} u_n$ converge.

On a :

$$\sum_{k=n_0}^n \ln(u_k) = \ln \left(\prod_{k=n_0}^n u_k \right).$$

Or, le produit infini $\prod_{n \geq n_0} u_n$ converge, donc, par définition $P_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}^*$, où $\ell = \prod_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

De plus, comme les u_n sont positifs, pour tout $n \geq n_0$, $P_n \geq 0$.

Donc, $\ell \geq 0$, et comme $\ell \neq 0$, on a : $\ell > 0$.

Donc, par continuité de $\ln$,

$$\sum_{k=n_0}^n \ln(u_k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(\ell) \in \mathbb{R}.$$

Donc, $\sum_{n \geq n_0} \ln(u_n)$ converge.

($\Rightarrow$) On suppose que la série $\sum_{n \geq n_0} \ln(u_n)$ converge.

Donc, $\sum_{k=n_0}^n \ln(u_k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S \in \mathbb{R}$ où $S = \sum_{k=n_0}^{+\infty} \ln(u_k)$.

De plus, comme $u_k = \exp(\ln(u_k))$, on a :

$$P_n = \prod_{k=n_0}^n \exp(\ln(u_k)) = \exp \left(\sum_{k=n_0}^n \ln(u_k) \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^S \in \mathbb{R}^*.$$

Donc, $\prod_{n \geq n_0} u_n$ converge.

Ainsi,

$$\sum_{n \geq n_0} \ln(u_n) \text{ converge si, et seulement si, } \prod_{n \geq n_0} u_n \text{ converge.}$$

En cas de convergence, en passant à la limite dans l'égalité,

$$\prod_{k=n_0}^n u_k = \exp\left(\sum_{k=n_0}^n \ln(u_k)\right),$$

on a :

$$\prod_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \exp\left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} \ln(u_n)\right).$$

Q12. On note $u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}} > 0$.

Par la question précédente, le produit infini $\prod_{n \geq 1} \left(1 + \frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}$ converge si, et seulement si, la série $\sum_{n \geq 1} \ln\left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}\right)$ converge.

Or,

$$\ln\left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}\right) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}.$$

On sait que : $\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$ et, de plus, $\frac{x}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc,

$$\ln\left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}\right) = -\frac{x^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Donc,

$$\ln\left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}\right) \sim -\frac{x^2}{n^2} \leq 0.$$

Or, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (car $2 > 1$).

Donc, par théorème de comparaison, la série $\sum_{n \geq 1} \ln\left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}\right)$ converge.

Ainsi, par **Q11**,

$$\text{le produit infini } \prod_{n \geq 1} \left(1 + \frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}} \text{ converge.}$$

Q13. On a :

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$$

Q14. On remarque que, pour tout $n \geq n_0$, $1 + u_n > 0$.

Par **Q11**, le produit infini $\prod_{n \geq n_0} (1 + u_n)$ converge si, et seulement si, la série $\sum_{n \geq n_0} \ln(1 + u_n)$ est convergente.

($\Rightarrow$) On suppose que le produit infini $\prod_{n \geq n_0} (1 + u_n)$ converge.

Par **Q8**, $1 + u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, d'où, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

D'autre part, comme $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, on a $\ln(1 + u_n) \sim u_n \geq 0$.

De plus, par **Q11**, la série $\sum_{n \geq n_0} \ln(1 + u_n)$ est convergente.

Donc, par théorème de comparaison, $\sum u_n$ converge.

($\Leftarrow$). On suppose que la série $\sum u_n$ converge.

Alors, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Comme $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, on a $\ln(1 + u_n) \sim u_n \geq 0$.

Donc, par théorème de comparaison, la série $\sum_{n \geq n_0} \ln(1 + u_n)$ est convergente.

D'où, par **Q11**, le produit infini $\prod_{n \geq n_0} (1 + u_n)$ converge.

Ainsi,

le produit infini $\prod_{n \geq n_0} (1 + u_n)$ converge si, et seulement si, la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est convergente.

Q15. Pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{n} > 0$.

Étudions alors la nature du produit infini, $\prod_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

On a :

$$P_n = \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} = n+1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Donc, le produit infini, $\prod_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ diverge.

Par **Q14**,

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \text{ diverge.}$$

Q16. On remarque que, pour tout $n \geq n_0$, $1 - u_n > 0$.

Par **Q11**, le produit infini $\prod_{n \geq n_0} (1 - u_n)$ converge si, et seulement si, la série $\sum_{n \geq n_0} \ln(1 - u_n)$ est convergente.

($\Rightarrow$) On suppose que le produit infini $\prod_{n \geq n_0} (1 - u_n)$.

Par **Q8**, $1 - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, d'où, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

D'autre part, comme $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, on a $\ln(1 - u_n) \sim -u_n \leq 0$.

De plus, par **Q11**, la série $\sum_{n \geq n_0} \ln(1 - u_n)$ est convergente.

Donc, par théorème de comparaison, $\sum u_n$ converge.

($\Leftarrow$). On suppose que la série $\sum u_n$ converge.

Alors, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Comme $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, on a $\ln(1 - u_n) \sim -u_n \leq 0$.

Donc, par théorème de comparaison, la série $\sum_{n \geq n_0} \ln(1 - u_n)$ est convergente.

Par **Q11**, le produit infini $\prod_{n \geq n_0} (1 - u_n)$ converge.

Ainsi,

le produit infini $\prod_{n \geq n_0} (1 - u_n)$ converge si, et seulement si, la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est convergente.

Q17. La série de Riemann $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n}$ diverge et, pour tout $n \geq 2$, $0 < \frac{1}{n} < 1$, donc, par **Q16**,

$$\text{le produit infini } \prod_{n \geq 2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \text{ diverge.}$$

Partie III : Étude d'un cas particulier

Soit $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle vérifiant les deux conditions suivantes :

- pour tout entier $n \geq n_0$, $|u_n| < 1$.
- la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge.

L'objectif de cette partie est de montrer que :

le produit infini $\prod_{n \geq n_0} (1 + u_n)$ converge si, et seulement si, la $\sum_{n \geq n_0} u_n^2$ converge.

Attention, on ne peut pas appliquer le résultat de **Q14**. ici.

Q18. On suppose que $\sum_{n \geq n_0} u_n^2$ converge.

Montrer que la série $\sum_{n \geq n_0} \ln(1 + u_n)$ converge et, en déduire que le produit infini $\prod_{n \geq n_0} (1 + u_n)$ converge.

Q19. Montrer que les séries $\sum_{n \geq n_0} (u_n - \ln(1 + u_n))$ et $\sum_{n \geq n_0} u_n^2$ sont de même nature.

Q20. On suppose que $\sum_{n \geq n_0} u_n^2$ diverge.

Montrer que $\sum_{k=n_0}^n \ln(1 + u_k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$ et, en déduire que le produit infini $\prod_{n \geq n_0} (1 + u_n)$ diverge.

Q21. Application : montrer que le produit infini $\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ diverge.

Réponse

Q18. On sait que $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Comme la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge, on sait que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc,

$$\ln(1 + u_n) = u_n - \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2) = u_n + v_n,$$

ou $v_n = -\frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2)$. Donc, $v_n \sim -\frac{u_n^2}{2} \leq 0$.

Par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum v_n$ converge.

De plus, par hypothèse, $\sum u_n$ converge.

Donc, par comme

$$\sum_{n \geq n_0} \ln(1 + u_n) \text{ converge.}$$

Comme $-1 < u_n < 1$, on a $1 + u_n > 0$. Par **Q11**,

$$\text{le produit infini } \prod_{n \geq n_0} (1 + u_n) \text{ converge.}$$

Q19. Dans la question précédente, on a vu que :

$$u_n - \ln(1 + u_n) = \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2).$$

Donc,

$$u_n - \ln(1 + u_n) \sim \frac{u_n^2}{2} \geq 0.$$

Par théorème de comparaison des séries à termes positifs,

$$\text{les séries } \sum_{n \geq n_0} (u_n - \ln(1 + u_n)) \text{ et } \sum_{n \geq n_0} u_n^2 \text{ sont de même nature.}$$

Q20. L'équivalent trouvé dans la question précédente montre que les termes de la série $\sum_{n \geq n_0} (u_n - \ln(1 + u_n))$ sont positifs à partir d'un certain rang.

Donc, la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \geq n_0} = \left(\sum_{k=n_0}^n (u_k - \ln(1 + u_k)) \right)_{n \geq n_0}$ est croissante à partir d'un certain rang.

Par le théorème de la limite monotone, cette suite $(S_n)_{n \geq n_0}$ converge ou tend vers $+\infty$.

Or, comme $\sum u_n^2$ diverge, par la question précédente, la série $\sum_{n \geq n_0} (u_n - \ln(1 + u_n))$ diverge.

Donc,

$$\sum_{k=n_0}^n (u_k - \ln(1 + u_k)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

On remarque que :

$$\sum_{k=n_0}^n \ln(1 + u_k) = - \sum_{k=n_0}^n (u_k - \ln(1 + u_k)) + \sum_{k=n_0}^n u_k.$$

Or, la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge, donc, la suite $\left(\sum_{k=n_0}^n u_k \right)_{n \geq n_0}$ converge.

Par opération sur les limites

$$\sum_{k=n_0}^n \ln(1 + u_k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty.$$

La série $\sum_{n \geq n_0} \ln(1 + u_n)$ diverge. De plus, $1 + u_n > 0$ pour tout $n \geq n_0$, donc, par **Q11**,

$$\text{le produit infini } \prod_{n \geq n_0} (1 + u_n) \text{ diverge.}$$

Q21. On note $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ où $n \geq 2$.

Comme $n \geq 2$, on a : $|u_n| = \frac{1}{\sqrt{n}} < 1$.

De plus, la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ est positive, décroissante de limite nulle.

Donc, par critère spécial des séries alternées, la série $\sum u_n$ converge.

D'autre part, $u_n^2 = \frac{1}{n}$ est le terme général d'une série divergente.

Donc, par **Q20**,

$$\text{le produit infini } \prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) \text{ diverge.}$$

Problème 2 : Décomposition de Dunford (CCINP TPC 2010)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note I_n et O_n respectivement la matrice identité et la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: s'il existe $(\Delta, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

- i) $A = \Delta + N$,
- ii) Δ est diagonalisable,
- iii) N est nilpotente (i.e. il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $N^q = O_n$),
- iv) $\Delta N = N \Delta$, autrement dit les matrices Δ et N commutent,

alors on dira que le couple (Δ, N) est une **décomposition de Dunford** de A .

Partie 1 : Généralités

Soient $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Q22. Soient $\Delta = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, montrer que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A_1 .

Q23. Soient $\Delta = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, montrer que (Δ, N) n'est pas une décomposition de Dunford de A_2 .

Q24. Soit A_3 une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que A_3 admet une décomposition de Dunford que l'on donnera.

Q25. De même, soit A_4 une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que A_4 admet une décomposition de Dunford que l'on donnera.

Q26. Vérifier que si (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A , alors Δ et N commutent avec A .

Réponse

Q22. On a :

$$\Delta + N = A_1.$$

De plus, Δ est diagonale, donc diagonalisable et

$$N^2 = O_2.$$

Donc, N est nilpotente.

Enfin,

$$\Delta N = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = N \Delta.$$

Donc, Δ et N commutent. Ainsi,

(Δ, N) est une décomposition de Dunford de A_1 .

Q23. On a :

$$\Delta N = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N \Delta = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc, Δ et N ne commutent pas, donc

(Δ, N) n'est pas une décomposition de Dunford de A_2 .

Q24. On note $\Delta = A_3$ et $N = O_n$.

On a bien $A_3 = \Delta + N$ avec $\Delta = A_3$ diagonalisable (par hypothèse sur A_3) et N nilpotente (car $N^1 = 0$). De plus, $\Delta N = O_n = N \Delta$.

Donc,

(A_3, O_n) est une décomposition de Dunford.

Q25. On note $\Delta = O_n$ et $N = A_4$.

On a bien $A_4 = \Delta + N$ avec Δ diagonalisable (car diagonale) et $N = A_4$ nilpotente (par hypothèse sur A_4). De plus, $\Delta N = O_n = N \Delta$.

Donc,

(O_n, A_4) est une décomposition de Dunford.

Q26. On a :

$$A \Delta = (\Delta + N) \Delta = \Delta^2 + N \Delta.$$

Or, Δ et N commutent, donc,

$$A\Delta = \Delta^2 + \Delta N = \Delta(\Delta + N) = \Delta A.$$

Donc,

A et Δ commutent.

On a :

$$AN = (\Delta + N)N = \Delta N + N^2.$$

Or, Δ et N commutent, donc,

$$A\Delta = N\Delta + N^2 = N(\Delta + N) = NA.$$

Donc,

A et N commutent.

Partie 2 : Étude d'un exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Étude de Δ

Q27. Déterminer le spectre de Δ , en déduire que Δ est inversible.

Q28. Montrer que Δ est diagonalisable et la diagonaliser sous la forme $P^{-1}\Delta P = D$, avec $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible et

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Q29. En déduire, de manière élémentaire, que Δ^{-1} est diagonalisable, et exprimer Δ^{-1} en fonction de P , P^{-1} et d'une matrice diagonale D_1 à déterminer.

Réponse

Q27. On a :

$$\chi_{\Delta} = \begin{vmatrix} X-2 & 0 & 0 \\ 1 & X-3 & -1 \\ 1 & -1 & X-3 \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la première ligne,

$$\chi_{\Delta} = (X-2) \times \begin{vmatrix} X-3 & -1 \\ -1 & X-3 \end{vmatrix} = (X-2) \times ((X-3)^2 - 1) = (X-2)^2 \times (X-4).$$

Donc,

$$\text{Sp}(\Delta) = \{2, 4\}.$$

Comme χ_{Δ} est scindé, le déterminant de Δ est égal au produit de ses valeurs propres comptées avec multiplicité, donc,

$$\det(\Delta) = 2^2 \times 4 = 16 \neq 0.$$

Donc,

Δ est inversible.

Q28. Étude de la valeur propre 2. On a :

$$\Delta - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On remarque que $C_2 = -C_1$ et $C_3 = -C_1$.

Donc,

$$\text{Im}(\Delta - 2I_3) = \text{Vect}(C_1, C_2, C_3) = \text{Vect}(C_1).$$

Comme $C_1 \neq 0$, $\text{rg}(\Delta - 2I_3) = 1$ et, par le théorème du rang, $\boxed{\text{Ker}(\Delta - 2I_3) = 2}$.

De plus, $C_1 + C_2 = 0$ et $C_1 + C_3 = 0$.

Donc, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiennent à $E_2(\Delta)$.

Ces deux vecteurs sont non colinéaires, donc, forment une famille libre de deux vecteurs.

Par théorème, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $E_2(\Delta)$.

Étude de la valeur propre 4. On a :

$$\Delta - 4I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On sait que $1 \leq \dim(E_4(\Delta)) \leq m_4$. Comme 4 est une valeur propre simple, $\dim(E_4(\Delta)) = 1$.

De plus, comme $C_2 + C_3 = 0$, le vecteur non nul $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_4(\Delta)$.

Donc, $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $E_4(\Delta)$.

On a ainsi montré que le polynôme caractéristique de Δ est scindé sur $\mathbb{R}$ et, pour chaque valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à la multiplicité de la valeur propre.

Par théorème,

Δ est diagonalisable.

De plus,

$$\Delta = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Q29. Les matrices Δ et D sont semblables et Δ est inversible, donc, D est inversible.

De plus,

$$D^{-1} = (P^{-1}\Delta P)^{-1} = P^{-1}\Delta^{-1}P.$$

Donc, Δ^{-1} est semblable à $D^{-1} = D^{-1}$.

Comme D est diagonale, son inverse est aussi diagonale.

Donc,

D^{-1} est diagonalisable (car semblable à une matrice diagonale).

Décomposition de Dunford de A

Q30. Montrer que A n'est pas diagonalisable.

Q31. Montrer que N est nilpotente.

Q32. Vérifier que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A .

Réponse**Q33.** On a :

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-3 & 1 & -1 \\ 0 & X-2 & -2 \\ 1 & -1 & X-3 \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{L_1 \leftarrow L_1 + L_3}{=} \begin{vmatrix} X-2 & 0 & X-4 \\ 0 & X-2 & -2 \\ 1 & -1 & X-3 \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{C_3 \leftarrow C_3 + C_2}{=} \begin{vmatrix} X-2 & 0 & X-4 \\ 0 & X-2 & X-4 \\ 1 & -1 & X-4 \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} \begin{vmatrix} X-2 & 0 & X-4 \\ -X+2 & X-2 & 0 \\ -X+3 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la colonne 3,

$$\chi_A = (X-4) \times \begin{vmatrix} -X+2 & X-2 \\ -X+3 & -1 \end{vmatrix} \stackrel{C_2 \leftarrow C_2 + C_1}{=} (X-4) \times \begin{vmatrix} -(X-2) & 0 \\ -(X-1) & -(X-2) \end{vmatrix} = (X-4)(X-2)^2.$$

On a :

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes 2 et 3 sont non colinéaires et $\text{Im}(A - 2I_3) = \text{Vect}(C_1, C_2, C_3)$, donc, $\text{rg}(A - 2I_3) \geq 2$.D'où, par le théorème du rang, $\dim(E_2(A)) \leq 1$.Comme la valeur propre 2 est de multiplicité 2, $\dim(E_2(A)) \neq m_2$.

Donc, par théorème,

A n'est pas diagonalisable.

Q34. On a $N^2 = O_3$, donc,

N est nilpotente.

Q35. On a : $A = \Delta + N$ avec Δ diagonalisable et N nilpotente.

De plus,

$$N\Delta = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2N \quad \text{et} \quad \Delta N = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2N = N\Delta.$$

Ainsi,

 (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A.**Décomposition de Dunford de A^{-1}** On pose $N_1 = \Delta^{-1}N$.**Q33.** Montrer que Δ^{-1} et N commutent.**Q34.** En déduire que N_1 est nilpotente.**Q35.** Développer $(I_3 + N_1)(I_3 - N_1)$. En déduire que $I_3 + N_1$ est inversible et donner son inverse.**Q36.** Justifier l'existence de A^{-1} .**Q37.** Montrer que $A^{-1} = (I_3 + N_1)^{-1} \Delta^{-1}$ et en déduire une décomposition de Dunford de A^{-1} .

Réponse

Q33. On a montré que $\Delta N = N\Delta$.

En multipliant à gauche et à droite par Δ^{-1} , on a : $N\Delta^{-1} = \Delta^{-1}N$.

Donc,

Δ^{-1} et N commutent.

Q34. On sait que $N^2 = O_3$.

De plus, par la question précédente,

$$N_1^2 = (\Delta^{-1}N)^2 = (\Delta^{-1})^2 N^2 = (\Delta^{-1})^2 O_3 = O_3.$$

Donc,

N_1 est nilpotente.

Q35. On a :

$$(I_3 + N_1)(I_3 - N_1) = I_3 - N_1 + N_1 + N_1^2.$$

Donc, par la question précédente,

$$(I_3 + N_1)(I_3 - N_1) = I_3.$$

Donc,

$$I_3 + N_1 \text{ est inversible et } (I_3 + N_1)^{-1} = I_3 - N_1$$

Q36. 0 n'est pas valeur propre de A , donc,

A est inversible.

Q37. On a :

$$A = \Delta + N = \Delta(I_3 + \Delta^{-1}N) = \Delta(I_3 + N_1).$$

D'où,

$$A^{-1} = (\Delta(I_3 + N_1))^{-1} = (I_3 + N_1)^{-1} \Delta^{-1}.$$

Or, $(I_3 + N_1)^{-1} = I_3 - N_1$, donc,

$$A^{-1} = (I_3 - N_1)\Delta^{-1} = \Delta^{-1} - N_1\Delta^{-1} = \Delta^{-1} - \Delta^{-1}N\Delta^{-1}.$$

Par **Q29**, Δ^{-1} est diagonalisable.

Comme $N^2 = O_3$ et Δ^{-1} et N commutent,

$$(\Delta^{-1}N\Delta^{-1})^2 = (\Delta^{-1})^4 N^2 = O_3.$$

Donc, $\Delta^{-1}N\Delta^{-1}$ est nilpotente.

De plus, Δ^{-1} et $\Delta^{-1}N\Delta^{-1}$ commutent : en effet,

$$\Delta^{-1}(\Delta^{-1}N\Delta^{-1}) = \Delta^{-1}\Delta^{-1}N\Delta^{-1} = \Delta^{-1}N\Delta^{-1}\Delta^{-1} = (\Delta^{-1}N\Delta^{-1})\Delta^{-1}.$$

Donc,

une décomposition de Dunford de A^{-1} est $(\Delta^{-1}, \Delta^{-1}N\Delta^{-1})$.

Décomposition de Dunford des puissances de A

Soit $p \in \mathbb{N}$.

Q38. À l'aide de la décomposition de Dunford (Δ, N) de A , montrer que $A^p = \Delta^p + p2^{p-1}N$.

Q39. Vérifier que $(\Delta^p, p2^{p-1}N)$ est une décomposition de Dunford de A^p .

Q40. Calculer A^p .

Réponse

Q41. On sait que $A = \Delta + N$ et Δ et N commutent, donc par la formule du binôme,

$$A^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} N^k \Delta^{p-k}.$$

Or, $N^2 = O_3$, donc, pour tout $k \geq 2$, $N^k = O_3$.

Donc,

$$A^p = \binom{p}{0} N^0 \Delta^p + \binom{p}{1} N \Delta^{p-1}.$$

Or, on a $N\Delta = 2N$, donc,

$$N\Delta^{p-1} = 2N\Delta^{p-2} = 2^2N\Delta^{p-3} = \dots = 2^{p-1}N.$$

Donc,

$$A^p = \Delta^p + p2^{p-1}N.$$

Q42. On a : $A^p = \Delta^p + p2^{p-1}N$.

Par **Q28**,

$$\Delta^p = (PDP^{-1})^p = PD^pP^{-1}.$$

Comme D est diagonale, D^p est diagonale. Donc, Δ^p est diagonalisable.

De plus, $(p2^{p-1}N)^2 = (p2^{p-1})^2 N^2 = O_3$.

Donc, $p2^{p-1}N$ est nilpotente.

Comme N et Δ commutent, N et Δ^p commutent : en effet,

$$N\Delta^p = \Delta N\Delta^{p-1} = \Delta^2 N\Delta^{p-2} = \dots = \Delta^p N.$$

Donc,

$(\Delta^p, p2^{p-1}N)$ est une décomposition de Dunford de A^p .

Q43. Comme D est diagonale,

$$D^p = \begin{pmatrix} 2^p & 0 & 0 \\ 0 & 2^p & 0 \\ 0 & 0 & 4^p \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$A^p = 2^{p-1} \begin{pmatrix} 2+p & -p & p \\ 1+p-2^p & 1-p+2^p & p-1+2^p \\ 1-2^p & -1+2^p & 1+2^p \end{pmatrix}.$$

Décomposition de Dunford de R vérifiant $R^2 = A$, R s'appelle une racine carrée de A

Q41. Déterminer les matrices $U \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonales vérifiant $U^2 = D$.

Q42. À l'aide des matrices P et P^{-1} , déterminer alors une matrice S à valeurs propres positives telle que $S^2 = \Delta$.

- Q43.** Déterminer deux réels a et b , tels que $S = a\Delta + bI_3$, en raisonnant sur les formes diagonalisées. En déduire que S et N_1 commutent.
- Q44.** On pose $M = I_3 + \frac{1}{2}N_1$. Montrer que $M^2 = I_3 + N_1$.
- Q45.** En remarquant que $A = \Delta(I_3 + \Delta^{-1}N)$, déterminer une matrice R telle que $R^2 = A$.
- Q46.** Donner une décomposition de Dunford de R .

Réponse

Q47. On note $U = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ avec a, b, c des réels.

On a

$$U^2 = D \iff \begin{cases} a^2 = 2 \\ b^2 = 2 \\ c^2 = 4 \end{cases}$$

Donc, les matrices $U \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonales vérifiant $U^2 = D$ sont :

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Q48. On a :

$$S^2 = \Delta \iff S^2 = PDP^{-1} \iff P^{-1}S^2P = D \iff (P^{-1}SP)^2 = D.$$

Donc, on peut choisir $P^{-1}SP$ parmi une des matrices trouvées à la question précédente. Comme matrices sont diagonales, dans tous les cas S est semblable à une matrice diagonale. Donc S est diagonalisable et ses valeurs sont les coefficients diagonaux de la matrice diagonale choisie.

Pour que les valeurs propres de S soit positive, on choisit :

$$S = P \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Q49. On a :

$$S = a\Delta + bI_3 \iff P \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} = a\Delta + bI_3.$$

Donc, en multipliant à gauche par P^{-1} et à droite par P , on a :

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = aP^{-1}\Delta P + bI_3 = aD + bI_3 = \begin{pmatrix} 2a+b & 0 & 0 \\ 0 & 2a+b & 0 \\ 0 & 0 & 4a+b \end{pmatrix}.$$

On résout alors le système :

$$\begin{cases} 2a+b = \sqrt{2} \\ 4a+b = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a+b = \sqrt{2} \\ 2a = 2-\sqrt{2} \end{cases} \iff \begin{cases} b = 2\sqrt{2}-2 \\ a = 1-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Donc,

$$a = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } b = 2\sqrt{2} - 2.$$

Comme Δ et N_1 commutent (en effet, $\Delta N_1 = N$ et $N_1 \Delta = \Delta^{-1} N \Delta = \Delta^{-1} \Delta N = N$),

$$S N_1 = (a\Delta + bI_3)N_1 = a\Delta N_1 + bN_1 = aN_1\Delta + bN_1 = N_1(a\Delta + bI_3) = N_1 S.$$

Donc,

S et N_1 commutent.

Q50. On a :

$$M^2 = I_3 + N_1 + \frac{1}{4}N_1^2.$$

Or, on a montré que $N_1^2 = O_3$, donc,

$$M^2 = I_3 + N_1.$$

Q51. En factorisant par Δ ,

$$A = \Delta(I_3 + \Delta^{-1}N) = \Delta(I_3 + N_1) = S^2 M^2.$$

Or, comme S et N_1 commutent, donc,

$$SM = S + \frac{1}{2}SN_1 = S + \frac{1}{2}N_1S = MS.$$

Donc, S et M commutent et

$$\text{en posant } R = SM, \text{ on a : } A = S^2 M^2 = (SM)^2 = R^2.$$

Q52. On a :

$$R = SM = S + \frac{1}{2}SN_1.$$

Comme S est semblable à une matrice diagonale (**Q48**), S est diagonalisable.

De plus, S et N_1 commutent, donc, S et $\frac{1}{2}SN_1$ commutent.

D'autre part, on a aussi

$$\left(\frac{1}{2}SN_1\right)^2 = \frac{1}{4}S^2 N_1^2 = O_3.$$

Donc, $\frac{1}{2}SN_1$ est nilpotente.

Ainsi,

une décomposition de Dunford de R est $\left(S, \frac{1}{2}SN_1\right)$.

Partie 3 : Étude dans le cas général

Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. On suppose que le couple (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A .

Q47. Montrer que A^{-1} et N commutent, et en déduire que $A^{-1}N$ est nilpotente.

Q48. En remarquant que $\Delta = A(I_n - A^{-1}N)$, montrer que Δ est inversible.

Q49. Montrer que $N_1 = \Delta^{-1}N$ est une matrice nilpotente. En déduire que $I_n + N_1$ est inversible et donner son inverse.

Q50. Montrer que A^{-1} possède une décomposition de Dunford.

Réponse

Q47. Par **Q26**, A et N commutent : $AN = NA$.

Donc, en multipliant à gauche et à droite par A^{-1} , on a :

$$NA^{-1} = A^{-1}N.$$

Donc,

A^{-1} et N commutent.

Comme N est nilpotente, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $N^q = O_n$.

D'où,

$$(A^{-1}N)^q = (A^{-1})^q N^q = O_n.$$

Donc,

$A^{-1}N$ est nilpotente.

Q48. Comme A est inversible et qu'un produit de matrices inversibles est inversible, il suffit de montrer que $I_n - A^{-1}N$ est inversible.

Par la question précédente,

$$I_n = I_n^q - (A^{-1}N)^q.$$

Comme I_n et $A^{-1}N$ commutent, on peut factoriser par $I_n - A^{-1}N$:

$$I_n = (I_n - A^{-1}N) \times \sum_{k=0}^{q-1} (A^{-1}N)^{q-1-k}.$$

Donc, $I_n - A^{-1}N$ est inversible et son inverse est $\sum_{k=0}^{q-1} (A^{-1}N)^{q-1-k}$.

Ainsi,

Δ est inversible.

Pour les 5/2 pour l'instant : autre justification de l'inversibilité de $I_n - A^{-1}N$.

On sait que $(A^{-1}N)^q = 0$, donc, le polynôme X^q est annulateur de $A^{-1}N$ et sa seule racine est 0. Donc, $\text{Sp}(A^{-1}N) \subset \{0\}$.

En particulier, 1 n'est pas valeur propre de $A^{-1}N$. Donc, $A^{-1}N - I_n$ est inversible, et par conséquent, $I_n - A^{-1}N$ est inversible.

Q49. On a $N\Delta = \Delta N$, donc en multipliant à gauche et à droite par l'inverse de Δ , Δ^{-1} et N commutent.

D'où,

$$N_1^q = (\Delta^{-1})^q N^q = O_n.$$

Donc,

$N_1 = \Delta^{-1}N$ est une matrice nilpotente.

On a aussi $(-N_1)^q = (-1)^q N_1^q = O_n$, donc,

$$I_n = I_n^q + (-N_1)^q = (I_n - (-N_1)) \sum_{k=0}^{q-1} (-N_1)^k.$$

Donc,

$$I_n + N \text{ est inversible et son inverse est } \sum_{k=0}^{q-1} (-N_1)^k.$$

Q50. On a :

$$A^{-1} = (\Delta + N)^{-1} = (\Delta(I_n + N_1))^{-1} = (I_n + N_1)^{-1} \Delta^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{q-1} (-N_1)^k \right) \Delta^{-1} = \left(I_n + \sum_{k=1}^{q-1} (-N_1)^k \right) \Delta^{-1} = \Delta^{-1} + \left(\sum_{k=0}^{q-1} (-N_1)^k \right) \Delta^{-1}.$$

On note $\Delta_1 = \Delta^{-1}$.

On sait que Δ est inversible, donc semblable à une matrice diagonale D , autrement dit, $\Delta = PDP^{-1}$.

Donc, $\Delta^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$ où D^{-1} est diagonale.

Donc, Δ_1 est diagonalisable.

On note $R_1 = \left(\sum_{k=0}^{q-1} (-N_1)^k \right) \Delta^{-1}$. On a alors $A^{-1} = \Delta_1 + R_1$.

Comme Δ^{-1} commute avec N , Δ^{-1} commute avec $N_1 = \Delta^{-1}N$.

Donc, Δ^{-1} commute avec tout polynôme en N_1 , donc, avec $\left(\sum_{k=0}^{q-1} (-N_1)^k \right)$.

Donc, Δ_1 et R_1 commutent.

Il reste alors à montrer que R_1 est nilpotente.

On remarque que $\sum_{k=0}^{q-1} (-N_1)^k$ est une somme de matrices nilpotentes qui commutent (car les termes de la somme sont des puissances de $-N_1$). Un résultat classique est le suivante : la somme de deux matrices nilpotentes qui commutent est une matrice nilpotente. Montrons-le :

Soient A et B deux matrices nilpotentes qui commutent.

Comme les matrices A et B commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$(A + B)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} A^k B^{p+q-k} = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p+q}{k} A^k B^{p+q-k} + \sum_{k=p}^{p+q} \binom{p+q}{k} A^k B^{p+q-k}.$$

Lorsque que $k \in \llbracket p, p+q \rrbracket$, on a $k \geq p$, donc, $A^k = 0$. Donc,

$$\sum_{k=p}^{p+q} \binom{p+q}{k} \underbrace{A^k}_{=0} B^{p+q-k} = 0.$$

Lorsque que $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, on a $p+q-k \geq q$, donc, $B^{p+q-k} = 0$. Donc,

$$\sum_{k=0}^{p-1} \binom{p+q}{k} A^k \underbrace{B^{p+q-k}}_{=0} = 0.$$

Donc, $(A + B)^{p+q} = 0$ et $A + B$ est nilpotente.

Donc, $\sum_{k=0}^{q-1} (-N_1)^k$ est nilpotente et comme Δ^{-1} commute avec cette matrice, leur produit est nilpotent.

Ainsi,

$$(\Delta_1, R_1) \text{ est une décomposition de Dunford de } A^{-1}.$$

– Fin du sujet –