

TD EM8

Propagation des ondes EM dans un conducteur

A. Blocage d'appel _____ ●○○

Un téléphone émet un appel, reçu par un second téléphone. On place une plaque de métal devant le second téléphone : il ne reçoit plus l'appel. On modélise la plaque comme occupant tout le demi-espace $z > 0$, l'onde se propageant dans le vide $z < 0$.

1. Donner l'ordre de grandeur de la longueur d'onde et de la fréquence d'une onde téléphonique. On admet que cette fréquence permet de traiter le métal dans l'ARQS.
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par $\vec{E}$ dans le métal. Comparer cette équation à celle dans le vide. Commenter physiquement.
3. Trouver les solutions de l'équation précédente de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \underline{k}z)}$ avec $\underline{k}$ complexe. Ces solutions sont-elles des ondes planes progressives monochromatiques ?
4. Identifier une distance caractéristique. La calculer numériquement, justifier le modèle de plaque semi-infinie, et interpréter l'expérience. Qu'en serait-il pour des ondes de fréquences 1000 fois plus grandes ? 1000 fois plus faibles ?

B. Dispersion et absorption ? _____ ●●○

Dans un milieu matériel, une onde électromagnétique est caractérisée par un champ électrique

$$\vec{E} = E_0 \exp(j(\omega t - \underline{k}z)) \vec{u}_y$$

E_0 et ω sont des constantes et $\underline{k}$ est un complexe qui s'écrit $\underline{k} = \frac{\omega}{2c} + \frac{\omega^2 b}{2c^2} - i \frac{\omega}{c\sqrt{3}}$

1. Écrire ce champ $\vec{E}$ en notations réelles.
2. Ce milieu est-il absorbant ?
3. Déterminer la vitesse de phase v_φ . Ce milieu est-il dispersif ?
4. Déterminer la vitesse de groupe v_g .
5. Déterminer le vecteur champ magnétique de l'onde, en notations réelles.

C. Réflexion d'une OPM. Pression de radiation _____ ●●●

L'espace est rapporté au référentiel orthonormé $(Oxyz)$ de base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. Le demi-espace $x \leq 0$ est occupé par un conducteur métallique supposé parfait (conductivité quasi-infinie) et le vide occupe le demi-espace $x > 0$.

La permittivité du vide est $\epsilon_0 = 8,8 \times 10^{-12}$ SI.

Une onde électromagnétique plane incidente $(\vec{E}_i, \vec{B}_i)$ sinusoïdale de pulsation ω , polarisée rectilignement parallèlement à Oy , se propage dans le vide vers le métal suivant la direction Ox :

$$\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$$

Cette onde se réfléchit normalement sur le conducteur métallique.

1. Exprimer le champ électrique total et le champ magnétique total à l'instant t en tout point $M(x, y, z)$ du demi-espace vide. En déduire le rapport des amplitudes des champs $\frac{E}{B}$ en fonction de c, k et x .
2. Déterminer le vecteur de POYNTING $\vec{\Pi}(x, t)$ de l'onde résultante et justifier sa dénomination d'onde stationnaire.

3. Déterminer le vecteur densité surfacique de courant $\vec{j}_S$ engendré par l'onde sur la surface du conducteur en contact avec le vide. On rappelle la relation de passage du champ magnétique entre deux milieux 1 et 2 : $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \times \vec{n}_{12}$.
4. Calculer la densité moyenne dans le temps d'énergie électromagnétique $\langle w_{em} \rangle$ en tout point M, en fonction de ϵ_0 et E_0 .

On suppose que le champ électromagnétique pénètre à l'intérieur du métal sur une faible épaisseur a . Pour $x = 0$, $\vec{B}$ a l'expression calculée précédemment, et pour $x \leq a$, $\vec{B} = \vec{0}$.

Pour $0 \leq x \leq a$ on prendra $\vec{B} = B_z(x, t) \vec{u}_z$; où $B_z(x, t)$ est une certaine fonction de x et de t que nous n'aurons pas à déterminer complètement.

5. Calculer le vecteur densité de courant $\vec{j}$ pour $0 \leq x \leq a$ en fonction de $\frac{\partial B_z}{\partial x}$ (on négligera le courant de déplacement).
6. En déduire la force de LAPLACE $d^3 \vec{F}_L$ qui s'exerce sur un élément de volume $d\tau = dx dy dz$.
7. Intégrer cette expression sur x qui varie de 0 à a . En déduire que la force $d^2 \vec{F}_L$ qui s'exerce sur un élément de surface dS du métal et préciser le sens de cette force. En déduire l'expression de la pression p définie par la relation $d^2 \vec{F}_L = p \cdot d\vec{S}$.
8. Calculer la pression électromagnétique moyenne temporelle $\langle p \rangle$ exercée par l'onde sur la surface du conducteur. Comparer $\langle p \rangle$ et $\langle w_{em} \rangle$.
9. De quelle quantité Δx se déplace un miroir de surface $S = 0,50 \text{ cm}^2$, de masse $m = 20 \text{ cg}$ suspendu par un fil de longueur $\ell = 1,0 \text{ m}$, si on éclaire par un faisceau laser d'intensité $I = 3,0 \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$? L'intensité de la pesanteur g et la valeur de la vitesse de la lumière c sont supposées connues.



(a) Radiomètre de CROOKES



(b) Voile solaire

FIGURE 1 – Utilisation de la pression de radiation

Le radiomètre de CROOKES est un moulin libre de tourner autour d'un axe central. Il est composé d'ailettes en mica comportant : un côté noir qui absorbe le rayonnement incident et un côté brillant de type miroir qui réfléchit le rayonnement. Éclairé en lumière blanche, les faces noires captent le rayonnement (principalement infrarouge) et chauffent l'air au contact : la pression augmente du côté des faces noires et le moulin tourne dans le sens induit. En revanche, éclairé avec un laser Argon de 400 mW, le radiomètre tourne alors dans le sens inverse. Plus de rayonnement IR pour chauffer l'air ; c'est donc la pression de radiation sur les autres faces qui met en mouvement le moulin en sens opposé.

Conclusion : le radiomètre de CROOKES est un appareil permettant de mettre en évidence la pression de radiation. Elle est mise en pratique dans l'utilisation des voiles solaires.

D. Réflexion sur un métal et onde stationnaire _____ ●○○

Une onde électromagnétique se propage dans le vide dans la direction (Ox) vers un plan métallique. Son champ électrique est écrit : $\vec{E}_i = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{u}_y$, (on supposera E_0 réel positif).

En $x = 0$, elle arrive sur la surface plane d'un miroir métallique parfaitement conducteur (on admet que dans un tel conducteur, les champs électrique et magnétique sont nuls). Ce miroir fait naître une onde réfléchie : $\vec{E}_r = E_{0r} e^{i(\omega t + kx)} \vec{u}_y$ qui se propage donc dans le sens opposé.

1. Déterminer le champ magnétique $\vec{B}_i$ de cette onde incidente.

A la traversée d'une surface chargée (densité surfacique σ), le champ électrique est discontinu, mais seule la composante normale est discontinue. La composante tangentielle est quant à elle continue.

2. Déterminer l'amplitude E_{0r} du champ réfléchi en fonction de E_0 .
3. Déterminer le champ magnétique $\vec{B}_r$ de l'onde réfléchie.

A la traversée d'une surface porteuse de courants surfaciques (densité surfacique $\vec{j}_S$, le champ magnétique est discontinu et seule sa composante tangentielle $\vec{B}_T$ subit une discontinuité : $\vec{B}_{T2} - \vec{B}_{T1} = \mu_0 \vec{j}_S \times \vec{n}_{12}$ où $\vec{n}_{12}$ représente le vecteur unitaire normal à la surface.

4. Déterminer le courant surfacique $\vec{j}_S$ qui se trouve sur la surface métallique $x = 0$.
5. Déterminer le champ électromagnétique (complexe) résultant de l'onde incidente et de l'onde réfléchie dans le demi-espace $x < 0$. Écrire ce champ électromagnétique en réel. Caractériser l'onde résultante.
6. Calculer la valeur moyenne de son vecteur de POYNTING. Commenter.

E. Résonateur électromagnétique • • •

Un résonateur électromagnétique est constitué par deux plans métalliques parallèles, supposés conducteurs parfaits, occupant les positions $x = 0$ et $x = D$. Dans l'espace vide entre ces conducteurs, on étudie la propagation suivant la direction Ox normale aux conducteurs, d'une onde plane électromagnétique sinusoïdale de pulsation ω et polarisée rectilignement suivant Oy . Dans le vide, la célérité de l'onde est c connue. La distance D est de 5 cm.

1. Justifier physiquement que le champ électrique de cette onde en un point $M(x, y, z, t)$ de la cavité peut s'écrire sous la forme : $\vec{E} = E_0 \left(e^{i(\omega t - kx)} - e^{i(\omega t + kx)} \right) \vec{u}_y$. En déduire le champ magnétique $\vec{B}(x, t)$ de l'onde dans la cavité en M .
2. On rappelle qu'à la traversée d'une surface chargée, la composante normale du champ électrique est discontinue, mais la composante tangentielle est continue. Montrer que la fréquence de l'onde dans cette cavité ne peut avoir que des valeurs discrètes f_N qu'on exprimera à l'aide d'un entier N . Déterminer la valeur de la fréquence propre minimale de ce résonateur.
3. Exprimer à l'instant t , pour un mode propre donné indicé par l'entier N :
 - le champ électrique et le champ magnétique réels dans la cavité en fonction de x et de t ;
 - la valeur moyenne $\langle u \rangle$ dans le temps de l'énergie électromagnétique volumique, en fonction de ϵ_0 et E_0 .
 - caractériser l'onde dans la cavité.
4. Exprimer, à l'aide de ϵ_0 , E_0 , c , D et N la densité surfacique de courant $\vec{j}_S(t)$ qui parcourt la plaque métallique qui occupe le plan $x = 0$.

F. Milieux transparents d'indice n • • •

1. Généralités

Dans le vide, on note $k_0 = \frac{\omega}{c}$ le module d'onde d'une onde électromagnétique. Cette onde pénètre dans un milieu transparent d'indice n réel ($n = 1,00029$ pour l'air, $n = 1,33$ pour l'eau, $n = 1,5$ pour le verre)

1. Rappeler la relation liant l'indice du milieu n , la vitesse de la lumière dans le vide c et la vitesse v_φ de l'onde dans le milieu.
2. La pulsation ω est-elle modifiée dans le milieu d'indice n , par rapport au vide ? Exprimer le module du vecteur d'onde k dans le milieu d'indice n en fonction de k_0 et n , et interpréter le résultat en termes de longueurs d'onde.
3. Si le champ électrique s'écrit $\vec{E} = E_0 \exp(i(\omega t - kx)) \vec{u}_y$, quelle est l'expression du champ magnétique $\vec{B}$ et de la valeur moyenne $\langle \vec{\Pi} \rangle$ du vecteur de POYNTING ?

2. Interface entre deux milieux

On s'intéresse à un dioptré plan séparant deux milieux d'indices n_1 et n_2 .

Arrivant sur le dioptré, le champ électrique $\vec{E}_1$ de l'onde incidente est de la forme $\vec{E}_1 = E_0 e^{i(\omega t + k_1 z)} \vec{u}_x$.

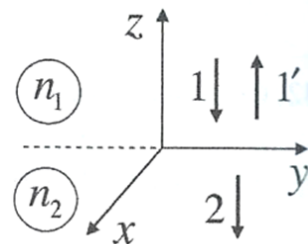


FIGURE 2 – Dioptré

1. Comment s'écrivent les champs électriques $\vec{E}'_1$ et $\vec{E}_2$ des ondes réfléchie et transmise à l'aide des coefficients de réflexion $\underline{r}$ et de transmission $\underline{t}$ en amplitude.
2. En déduire les champs magnétiques $\vec{B}_1$, $\vec{B}'_1$ et $\vec{B}_2$?
3. Les champs sont continus à l'interface $z = 0, \forall t$; en déduire l'expression des coefficients de réflexion et de transmission en amplitude du champ électrique $\underline{r}$ et $\underline{t}$ en fonction de n_1 et n_2 ; commenter.
4. Rappeler l'expression du vecteur de POYNTING $\vec{\Pi}$ en fonction du champ $\vec{E}$ et donner les puissances moyennes $\langle d\mathcal{P}_1 \rangle$, $\langle d\mathcal{P}'_1 \rangle$ et $\langle d\mathcal{P}_2 \rangle$ rayonnées à travers une surface dS du dioptré. En déduire l'expression des facteurs de réflexion et de transmission en énergie R et T ; commentaires.
5. Quelle est la valeur numérique du coefficient de réflexion en énergie sur une interface air/verre? Estimer le pourcentage de l'énergie transmise à l'énergie incidente à travers une vitre.

3. Cas du milieu absorbant

En optique géométrique les indices des milieux sont pris réels, cela traduit la transparence de ces milieux, c'est-à-dire le fait qu'ils n'absorbent pas la lumière. En réalité les milieux sont tous plus ou moins absorbants, ce qui est traduit par un module d'onde complexe $\underline{k} = k' - ik''$ où k' et k'' sont réels positifs. Une onde dans ce milieu a pour champ électrique $\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - \underline{k}x)} \vec{u}_z$.

1. Écrire ce champ en fonction de k' et k'' et commenter.
2. Sans calcul, indiquer la forme de l'intensité $I(x)$ à l'abscisse x de cette onde en notant $I(0) = I_0$, et proposer une interprétation de la loi de BEER-LAMBERT utilisée en spectrométrie en chimie.
3. AN : Sachant que pour $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$, l'intensité à la profondeur 12 m est le dixième de l'intensité près de la surface de l'eau, calculer k'' .

G. Guitare électrique

Une guitare électrique compte six cordes de longueur 63 cm, attachées à leur deux extrémités. Ces corde faites en acier, de masse volumique $7,8 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. On s'intéresse ici à la deuxième corde, de diamètre 0,8 produisant un La₁ de fréquence 110 Hz. La corde au repos est confondue avec l'axe (Ox), et on note $y(x, t)$ de la corde à sa position d'équilibre, qui vérifie l'équation de D'ALEMBERT unidimensionnelle :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

1. La célérité c des ondes mécaniques sur la corde dépend de sa masse linéique μ , ou masse par unité de longueur ainsi que de la force F permettant de la tendre. Proposer une expression de c .
2. On s'intéresse aux ondes harmoniques pouvant exister sur la corde, en cherchant des solutions sous la forme

$$y(x, t) = g(x) \cos(\omega t).$$

Déterminer toutes les fonctions g qui conviennent.

3. Déterminer la force sous laquelle la corde doit être tendue pour qu'elle vibre à la fréquence voulue.
4. La corde produit un son plus grave (fréquence plus faible) que celui souhaité. Le guitariste doit-il relâcher ou tendre davantage la corde pour l'accorder ?
5. Pour jouer différentes notes avec la même corde, le guitariste l'immobilise en un endroit précis en l'appuyant contre le manche de sa guitare. Comment doit-il placer son doigt pour jouer un Re₂ de fréquence 147 Hz ?