

Devoir surveillé n°2 type EML

Nom :Prénom :

Exercice 1 Partie I (questions 1 à 3) :	
Exercice 1 Partie II (questions 4 à 5) :	
Exercice 2 Partie I :	
Exercice 2 Parties II et III :	
Exercice 3 Partie I :	
Exercice 3 Partie II :	
Exercice 3 Partie III :	

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre. **Durée du devoir : 4h. Les téléphones portables doivent être éteints et mis dans votre sac. Le devoir est composé de 5 pages où se trouvent trois exercices indépendants, qui peuvent être traités dans l'ordre que vous souhaitez.**



Thomas Bayes (1701 [Londres] - 17 avril 1761 [Tunbridge Wells]) Thomas Bayes, né à Londres en 1701 ou 1702, est un scientifique et pasteur anglais. Du fait de sa religion, Thomas Bayes ne peut pas fréquenter les collèges et universités anglais. C'est ainsi qu'il part en Écosse en 1719 pour étudier à l'Université d'Édimbourg où il suit des cours de théologie et semble-t-il de logique. A sa sortie de l'université, il assiste son père qui est pasteur à Londres, avant lui-même d'être ordonné prêtre à Tunbridge Wells, dans le Kent, vers 1733. Son mémoire pour lequel il est le

plus connu est posthume. Il s'agit de l'essai sur les probabilités *An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances*, rassemblé et édité par son ami Price en 1763. Thomas Bayes y est un des premiers à s'intéresser à la probabilité des causes. Plus précisément, il cherche à trouver la probabilité qu'un événement survienne sous l'hypothèse que nous ne connaissons rien à son sujet, sinon qu'il est survenu un certain nombre de fois dans les mêmes circonstances, et qu'il n'est pas survenu un autre certain nombre de fois. Il y formule un cas particulier de la célèbre formule de probabilités connue sous le nom de formule de Bayes.

Exercice 1.

On définit, pour tous réels a et b , $M(a, b)$ la matrice carrée d'ordre 4 par :

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ b & b & b & b \end{pmatrix}$$

et on note : $E = \{M(a, b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

L'objectif de cet exercice est de déterminer les matrices de E qui sont diagonalisables.

1. (a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
Déterminer une base de E et sa dimension.
- (b) Le produit de deux matrices quelconques de E appartient-il encore à E ?
2. **Étude du cas $a = 0$ et $b = 0$.**
Justifier que la matrice $M(0, 0)$ est diagonalisable.
3. **Étude du cas $a \neq 0$ et $b = 0$.**
Soit a un réel non nul. On note A la matrice $M(a, 0)$.
 - (a) Calculer A^2 et déterminer un polynôme annulateur de A .
 - (b) En déduire les valeurs propres de la matrice A et préciser une base de chacun des sous-espaces propres associés.
 - (c) En déduire que la matrice A est diagonalisable. Déterminer une matrice P de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ inversible et une matrice D de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
4. **Étude du cas $a = 0$ et $b \neq 0$.**
Soit b un réel non nul. On note B la matrice $M(0, b)$.
 - (a) Déterminer le rang des matrices B et $B - bI_4$, I_4 désignant la matrice identité d'ordre 4.
 - (b) En déduire l'ensemble des valeurs propres de B en précisant la dimension des sous-espaces propres associés.
 - (c) La matrice B est-elle diagonalisable?
5. **Étude du cas $a \neq 0$ et $b \neq 0$.**
Soient a et b deux réels non nuls. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est $M(a, b)$.
On pose :

$$v_1 = (1, 1, 1, 0), \quad v_2 = (0, 0, 0, 1) \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} a & a \\ 3b & b \end{pmatrix}$$
 - (a) Montrer que $\text{Ker}(f)$ est de dimension 2 et préciser une base (v_3, v_4) de $\text{Ker}(f)$. Donner également une base de $\text{Ker}(M(a, b))$. En déduire sans calcul, une valeur propre de $M(a, b)$.
 - (b) Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
 - (c) Déterminer la matrice notée N de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}'$. Que peut-on dire de N et $M(a, b)$?
 - (d) Soient λ un réel non nul et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ une matrice colonne de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
Montrer :

$$X \text{ est un vecteur propre de } N \text{ associé à la valeur propre } \lambda \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } T \\ \text{associé à la valeur propre } \lambda \\ \text{et } z = t = 0 \end{cases}$$
 - (e) On suppose dans cette question **uniquement** que $(a, b) = (1, 1)$.
Déterminer les valeurs propres de T . En déduire que la matrice $M(1, 1)$ est diagonalisable.
 - (f) On suppose dans cette question **uniquement** que $(a, b) = (1, -1)$.
Justifier que T n'admet aucune valeur propre. La matrice $M(1, -1)$ est-elle diagonalisable?

Exercice 2.

Soit a un entier strictement positif. On dispose d'un jeu usuel de $2n$ cartes ($n = 16$ ou 26) qui contient donc deux rois rouges, et on envisage deux jeux d'argent régis par les protocoles suivants.

I Premier protocole

Les cartes du jeu sont alignés sur une table de façon aléatoire. Le joueur découvre les cartes, de gauche à droite jusqu'à obtenir le premier roi rouge. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier roi rouge et $E(X)$ son espérance.

Enfin on note l'événement « R_k avoir un roi rouge au k -ième tirage ».

1. Simulation informatique **Python**

- (a) Compléter la fonction suivante afin qu'elle simule la variable X .

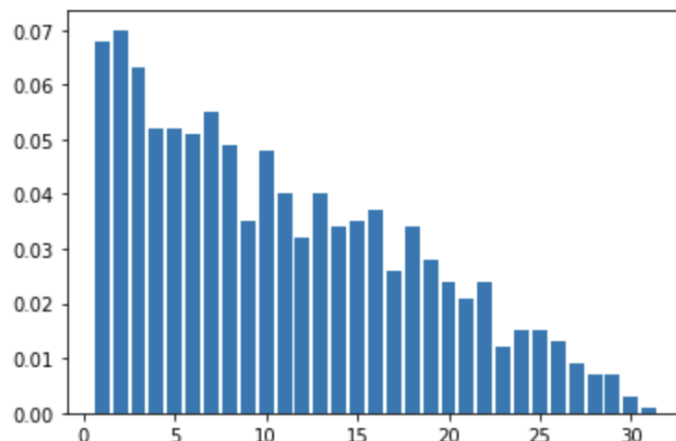
```
import numpy as np
import numpy.random as rd
def simul_X(n):
    y=1
    T=2*n #nombre de cartes à retourner
    while ..... :
        .....
        .....
    return .....
```

- (b) Écrire une fonction $freq(L)$ qui, prenant en argument une liste de valeurs L (dont les composantes sont des entiers entre 1 et ℓ), renvoie une liste dont les composantes sont les fréquences d'apparitions des valeurs de la liste L .
- (c) On prend $n = 16$. On ajoute les commandes suivantes qui permettent l'affichage ci-après

```
import matplotlib.pyplot as plt

n=16
sample=[simul_X(n) for k in range(1000)]
valeurs=[k for k in range(1, 2*n)]
frequences=freq(sample)

plt.bar(valeurs , frequences)
plt.show()
```



Quelles instructions permettent d'obtenir une estimation de $E(X)$? Donner une estimation graphique de $P(X=1)$. Que vaut vraiment $P(X=1)$? Donner des estimations de $P(X=2)$, $P(X=3)$.

2. Donner le support de X et montrer que l'événement $(X = k)$ vérifie :

$$(X = k) = \bar{R}_1 \cap \bar{R}_2 \cap \dots \cap \bar{R}_{k-1} \cap R_k.$$

3. Montrer : $\forall k \in \{1, \dots, 2n-1\}, P(X = k) = \frac{2n-k}{n(2n-1)}$.
(indication : on remarquera que $(2n)! = (2n)(2n-1)\dots(2n-k+1) \times (2n-k)!$)
4. Montrer que : $E(X) = \frac{2n+1}{3}$.
(On rappelle que pour tout entier naturel $p \geq 1$, on a : $\sum_{k=1}^p k^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$.)
5. Le joueur paie un euro chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a euros lorsqu'il obtient le premier roi rouge. On note G_1 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{\text{ième}}$ carte découverte, G_1 est égale à $a - k$.
 - (a) Exprimer G_1 en fonction de X et de a .
 - (b) Déterminer alors l'espérance de la variable aléatoire G_1 .

II Deuxième protocole

Les $2n$ cartes du même jeu sont alignés sur une table de façon aléatoire, mais cette fois-ci, le joueur peut découvrir au maximum n cartes. Le joueur paie un euro chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a euros lorsqu'il obtient le premier roi rouge. On note G_2 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{\text{ième}}$ carte découverte ($k \leq n$), G_2 est égale à $a - k$, et si le joueur n'obtient pas de roi rouge à l'issue des n premiers tirages, alors G_2 est égale à $-n$.

1. Pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$, déterminer $P(G_2 = a - k)$.
2. Vérifier : $P(G_2 = -n) = \frac{n-1}{2(2n-1)}$.

III Comparaison des deux protocoles

On admet $E(G_2) = \frac{3(3n-1)a - (7n^2 - 1)}{6(2n-1)}$.

On suppose le jeu constitué de 32 cartes ($n = 16$). Déterminer alors, selon les valeurs de a , le protocole le plus favorable au joueur. Justifier la réponse.

Exercice 3.

On note $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Partie I : Étude d'une fonction

1. (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
(b) Justifier que f est de classe C^1 sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.
(c) **QUESTION QUE POUR LA CUBE** Montrer : $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}$
Les autres admettre ce résultat, C'EST À DIRE : **ADMETTRE QUE** $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}$.
(d) Établir que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $f'(0) = -\frac{1}{2}$.
2. (a) Étudier les variations de l'application $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$u(x) = (1-x)e^x - 1$$

- (b) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0$.
- (c) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
Dresser le tableau des variations de f .
- (d) Donner la limite de $f(x) + x$ quand x tend vers $-\infty$.
Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?
- (e) Écrire un programme **Python** permettant d'obtenir la courbe représentative de f ainsi que sa tangente en $(0, 1)$ sur l'intervalle $[-10, 10]$. On mettra une légende.

Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que f admet un point fixe et un seul, noté α , que l'on calculera.
2. (a) Établir : $\forall x \in [0; +\infty[, e^{2x} - 2x e^x - 1 \geq 0$
(b) Montrer : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^{2x} - 2x e^x - 1}{2(e^x - 1)^2}$
(c) Montrer : $\forall x \in [0; +\infty[, -\frac{1}{2} \leq f'(x) < 0$.
(d) Établir : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$
3. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} (1 - \alpha)$
4. Conclure que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .
5. Écrire un programme en **Python** qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$G(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$$

1. Montrer que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$G'(x) = \begin{cases} \frac{x(3 - e^x)}{e^{2x} - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. (a) Montrer : $\forall x \in [0; +\infty[, 0 \leq G(x) \leq x f(x)$.
En déduire la limite de G en $+\infty$.
(b) Montrer : $\forall x \in]-\infty; 0], G(x) \leq x f(x)$.
En déduire la limite de G en $-\infty$.
3. Dresser le tableau des variations de G . On n'essaiera pas de calculer $G(\ln 3)$.