

Exercice 1 (★). Soit φ une fonction dérivable sur $[-1, 1]$ vérifiant $\varphi(-1) = -1$, $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(1) = 0$.
Montrer que φ' s'annule au moins une fois.

Résultat attendu : Le théorème des valeurs intermédiaires donne un point d'annulation supplémentaire entre -1 et 0 , ce qui permet d'appliquer ensuite le théorème de Rolle.

Exercice 2 (★★). Soit $f : [-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dérivable et telle que $f(-1) = 1$, $f(0) = 0$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.
Montrer que f' s'annule.

Résultat attendu : Le théorème des valeurs intermédiaires donne un point supplémentaire où la valeur 1 est atteinte, ce qui permet d'appliquer ensuite le théorème de Rolle.

Exercice 3 (★★). Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $g(0) = g(3) = 0$ et $g(1)g(2) < 0$.
Montrer que g'' s'annule.

Résultat attendu : Le théorème des valeurs intermédiaires donne un point supplémentaire d'annulation, ce qui permet d'appliquer le théorème de Rolle pour déterminer les annulations de g' , puis de g'' .

Exercice 4 (★★★). Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle I . On suppose que f est continue et injective. Montrer que f est strictement monotone sur I .

Résultat attendu : On raisonne par l'absurde, la contradiction est ensuite obtenue grâce au théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 5 (★). Montrer qu'une fonction g de classe C^1 sur un segment $[a, b]$ est lipschitzienne.

Résultat attendu : On applique le théorème des bornes atteintes à g' , puis l'inégalité des accroissements finis.

Exercice 6 (★★). Soit $g \in C^1(\mathbb{R})$ telle que $\lim_{+\infty} g' = 1 = \lim_{-\infty} g'$. Montrer que g est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Résultat attendu : On utilise les propriétés des limites et le théorème des bornes atteintes pour montrer que g' est bornée, puis on conclut avec l'inégalité des accroissements finis.

Exercice 7 (★). Soit $\alpha > 0$. On pose $\forall t \in \mathbb{R}$, $p(t) = \alpha \arctan(\alpha t + 1)$. Montrer que cette fonction est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Résultat attendu : On montre par inégalité des accroissements finis que p est α^2 -lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 (★). Soit $f : t \mapsto \sqrt{t+1}$ (définie sur $[-1, +\infty[$).

1. Montrer que f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$ (et expliciter un rapport de Lipschitz).
2. Même question sur $[a, b]$, où $-1 < a < b$.
3. f est-elle lipschitzienne sur son ensemble de définition ?

Résultat attendu :

1. On montre par inégalité des accroissements finis que f est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.
2. On montre par inégalité des accroissements finis que f est $\frac{1}{2\sqrt{a+1}}$ -lipschitzienne sur $[a, b]$.
3. Non, on le montre par l'absurde (un passage à la limite donne la contradiction).

Exercice 9 (★★). Soit $g : t \mapsto e^{-t} + t^2$ (définie sur $\mathbb{R}$).

1. Montrer que g est lipschitzienne sur $[0, 1]$ (et expliciter un rapport de Lipschitz).
2. Même question sur $[a, b]$, où a et b sont deux réels tels que $a < b$.
3. Est-elle lipschitzienne sur son ensemble de définition ?

Résultat attendu :

1. On montre par inégalité des accroissements finis que f est 3-lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.
2. On montre par inégalité des accroissements finis que f est $(2 \max(|a|, |b|) + e^{-a})$ -lipschitzienne sur $[a, b]$.
3. Non, on le montre par l'absurde (un passage à la limite donne la contradiction).

Exercice 10 (★★). Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.

1. Soit h une fonction de classe C^2 sur $[a, b]$ telle que $h(a) = h(b) = 0$, et soit $c \in]a, b[$.
 - (a) Déterminer $\beta \in \mathbb{R}$ pour lequel la fonction $g : x \mapsto h(x) - \beta(x-a)(x-b)$ s'annule en a , b et c .
 - (b) En utilisant le théorème de Rolle, en déduire qu'il existe $\gamma \in]a, b[$ tel que $h(c) = \frac{(c-a)(c-b)}{2} h''(\gamma)$.
2. Soit f une fonction de classe C^2 sur $[a, b]$. On note φ la fonction affine (droite) qui interpole f en a et b (c'est-à-dire telle que $\varphi(a) = f(a)$ et $\varphi(b) = f(b)$).
 - (a) Soit $x \in [a, b]$, déterminer l'expression de $\varphi(x)$ en fonction de x .
 - (b) Déduire de la question 1 que : $\forall x \in]a, b[, \exists \gamma \in]a, b[$ tel que $f(x) = \varphi(x) + \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(\gamma)$.
 - (c) Que se passe-t-il géométriquement lorsque $f'' \geq 0$?

Résultat attendu :

1. (a) g s'annule toujours en a et b . Elle s'annule en c si et seulement si $\beta = \frac{h(c)}{(c-a)(c-b)}$.
- (b) g' s'annule deux fois, donc g'' s'annule en un point γ et en remplaçant on trouve la relation.
2. (a) $\forall x \in [a, b], \varphi(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x + \frac{f(a)b-af(b)}{b-a}$.
- (b) On applique le résultat de la question 1 à $h : x \mapsto f(x) - \varphi(x)$.
- (c) La courbe est en dessous de la sécante sur $[a, b]$ car $\forall x \in [a, b], \varphi(x) - f(x) = -\frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(\gamma) \geq 0$ (en effet, sur $[a, b], (x-a)(x-b) \leq 0$).

Exercice 11 (★★). Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que f est bien définie et déterminer ses points fixes.
2. Exprimer $f'(x)$ en fonction de $f(x)$ puis prouver que pour tout $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ $f(x) \geq \sqrt{\frac{3}{4}}$.
3. En déduire que pour tout $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.
4. Déduire des questions précédentes la bonne définition et la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Résultat attendu :

1. $x \mapsto x^2 - x + 1$ est à valeurs positives sur $\mathbb{R}$, donc f est bien définie. Son unique point fixe est 1.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{x-\frac{1}{2}}{f(x)}$. Une étude des variations donne ensuite $\forall x \in [\frac{1}{2}, 1], f(x) \geq f(\frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{3}{4}}$.
3. On utilise l'expression de f' et la minoration de f obtenues en question précédente.
4. On se place sur l'intervalle $[\frac{1}{2}, 1]$ stable par f , qui contient u_0 et sur lequel (par inégalité des accroissements finis) f est lipschitzienne de rapport $0 \leq \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$. Donc u est bien définie et converge vers 1.

Exercice 12 (★★★). Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ pour lesquelles il existe $k > 0$ et $\alpha > 1$ tels que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|^\alpha$. Ce résultat reste-t-il vrai quand $\alpha \in]0, 1[$?

Résultat attendu : On montre par analyse-synthèse que seules les fonctions constantes satisfont la condition (dans le cas $\alpha > 1$). Ce résultat n'est plus vrai quand $\alpha \in]0, 1[$ (on trouve une fonction non-constante qui vérifie la condition pour le montrer).

Exercice 13 (★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la dérivée n -ième des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \ln(x+1)$
2. $g : x \mapsto (x-1)e^{-x}$
3. $h : x \mapsto x^2(1+x)^n$

Résultat attendu :

1. Les formules de dérivées usuelles donnent $\forall x \in]-1, +\infty[, f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n}$.
2. La formule de Leibniz donne $\forall x \in \mathbb{R}, g^{(n)}(x) = (-1)^n(x-n-1)e^{-x}$.
3. La formule de Leibniz donne $\forall x \in \mathbb{R}, h^{(n)}(x) = n! \left(\frac{2+3n+n^2}{2}x^2 + n(n+1)x + \frac{n(n-1)}{2} \right)$.

Exercice 14 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la dérivée n -ième des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto (x^3 + x^2 + 1)e^{-x}$
2. $g : x \mapsto x^{n-1} \ln(x)$

Résultat attendu :

1. On trouve par la formule de Leibniz pour $n \geq 3$ (et on vérifie à la main les premiers cas) que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x} (x^3 + (1-3n)x^2 + (3n^2-5n)x - n^3 + 4n^2 - 3n + 1).$$

2. La formule de Leibniz donne $\forall x > 0, g^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{x}$.

Exercice 15 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}$. On note P_n la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par $P_n(x) = (x^2 - 1)^n$.

1. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ on a $P_n^{(k)}(1) = P_n^{(k)}(-1) = 0$.
2. En déduire que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ $P_n^{(k)}$ admet (au moins) k racines distinctes strictement comprises entre -1 et 1 .

Résultat attendu :

1. Découle des propriétés sur les ordres de multiplicité d'une racine.
2. On le montre par récurrence à l'aide du théorème de Rolle.

Exercice 16 (★). Déterminer l'équation de la corde pour les fonctions suivantes. En déduire les inégalités de convexité associées.

1. $x \mapsto \sin(x)$ entre $\frac{\pi}{2}$ et π
2. $x \mapsto \cos(x)$ entre $\frac{\pi}{2}$ et π

Résultat attendu :

1. L'équation de la corde est $y = -\frac{2}{\pi}x + 2$, donc $\forall x \in [\frac{\pi}{2}, \pi], \sin(x) \geq -\frac{2}{\pi}x + 2$.
2. L'équation de la corde est $y = -\frac{2}{\pi}x + 1$, donc $\forall x \in [\frac{\pi}{2}, \pi], \cos(x) \leq -\frac{2}{\pi}x + 1$.

Exercice 17 (★). Prouver que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, x^{n+1} - (n+1)x + n \geq 0$
2. $\forall u \in [0, \frac{\pi}{2}], \sin(u) \leq u$ et $2u \leq \pi \sin(u)$

Résultat attendu :

1. On étudie la convexité de $x \mapsto x^{n+1}$, puis la comparaison de la courbe avec une tangente bien choisie.
2. On étudie la convexité de $u \mapsto \sin(u)$, puis la comparaison de la courbe avec une sécante et une tangente bien choisies.

Exercice 18 (★★). Déterminer les intervalles de $\mathbb{R}$ où les fonctions suivantes sont convexes.

1. $f : x \mapsto \frac{x^3}{x^2+12}$
2. $g : x \mapsto |x|$

Résultat attendu : f est convexe sur $] -\infty, -6]$ et sur $[0, 6]$, concave ailleurs. g est convexe sur $\mathbb{R}$.

Exercice 19 (★★). Soit $(a_1, a_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Comparer $\frac{a_1+a_2}{2}$ et $\sqrt{a_1 a_2}$.

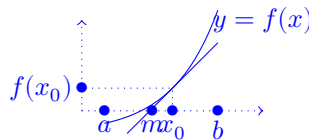
Résultat attendu : La concavité de $x \rightarrow \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donne après calculs $\frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$.

Exercice 20 (Type DS). L'objectif de cet exercice est d'établir la convergence de la méthode de Newton, très utile pour déterminer (par valeurs approchées) des solutions d'une équation de type $f(x) = 0$. Soit deux réels $a < b$ et une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . On suppose que $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ et que $\forall x \in [a, b]$, $f'(x) > 0$.

- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α appartenant à $]a, b[$.
 - Soit $x_0 \in [a, b]$ et m l'abscisse du point d'intersection de la tangente à f en x_0 (dont on rappellera l'équation) et de l'axe des abscisses. Faire un schéma de la situation. Montrer que $m = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.
- Pour tout $x \in [a, b]$, on pose $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Justifier que g est de classe C^1 sur $[a, b]$.
 - Calculer $g(\alpha)$ et $g'(\alpha)$.
- On suppose, dans cette question 3 seulement, que $\forall x \in [a, b]$, $f''(x) \leq 0$. On considère alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$.
 - Étudier le signe de g' et en déduire les variations de la fonction g .
 - Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs dans $[a, \alpha]$, puis qu'elle est croissante, convergente, et que sa limite vaut α .
- On revient au cas général.
 - Justifier qu'il existe $h > 0$ tel que, en notant $I = [\alpha - h, \alpha + h]$, on ait $\forall x \in I$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
 - Justifier que $\forall (x, y) \in I^2$, $|g(x) - g(y)| \leq \frac{1}{2} |x - y|$.
 - Établir que $\forall x \in I$, $g(x) \in I$. *Indication : par définition de I , $x \in I \Leftrightarrow |x - \alpha| \leq h$.*
 - En déduire que si $u_0 \in I$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = g(u_n)$ converge vers α .

Résultat attendu :

- f est continue et strictement croissante sur $]a, b[$ (car $\forall x \in]a, b[$, $f'(x) > 0$), donc par théorème de la bijection elle est bijective de $]a, b[$ dans $]f(a), f(b)[$. Or $0 \in]f(a), f(b)[$ donc $\exists! \alpha \in]a, b[$ tq $f(\alpha) = 0$.
 - On trouve comme équation de la tangente à f en x_0 : $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Par intersection avec l'axe des abscisses $f(x_0) + f'(x_0)(m - x_0) = 0$, donc $m = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.



- f est de classe C^2 sur $[a, b]$, donc f' est de classe C^1 sur $[a, b]$. Or f' ne s'annule jamais (car $\forall x \in [a, b]$, $f'(x) > 0$). Donc g est de classe C^1 sur $[a, b]$, par somme et quotient de fonctions de classe C^1 .
 - $g(\alpha) = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \alpha - 0 = \alpha$. Or $\forall x \in [a, b]$, $g'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$. Donc $g'(\alpha) = 0$.

- $\forall x \in [a, b]$, $g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$. Comme f'' est négative, le signe de g' dépend de celui de f (qui est négative sur $[a, \alpha]$ et positive sur $[\alpha, b]$).

x	a	α	b
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$\xrightarrow{\hspace{1cm}} \alpha \xleftarrow{\hspace{1cm}}$		

- Soit $x \in [a, \alpha]$. Par croissance de g sur $[a, \alpha]$, $g(a) \leq g(x) \leq g(\alpha)$, donc $a - \frac{f(a)}{f'(a)} \leq g(x) \leq \alpha$. Comme $f(a) < 0$, $a - \frac{f(a)}{f'(a)} \geq a$. Donc $g(x) \in [a, \alpha]$. Donc $[a, \alpha]$ est stable par g . Or $u_0 = a \in [a, \alpha]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$. Donc u est bien définie et à valeurs dans $[a, \alpha]$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = g(u_n) - u_n = -\frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$. Or $u_n \in [a, \alpha]$, donc $f(u_n) \leq 0$ et $f'(u_n) > 0$. Donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$, ce qui montre la croissance de u . Comme de plus u est majorée (par α), elle converge vers un réel ℓ . Et comme u est à valeurs dans $[a, \alpha]$, $\ell \in [a, \alpha]$. Comme g est continue sur cet intervalle, le théorème du point fixe donne $g(\ell) = \ell$. Donc $f(\ell) = 0$, donc $\ell = \alpha$. Donc u converge vers α .
- g' est continue en α , donc $\lim_{x \rightarrow \alpha} g'(x) = g'(\alpha) = 0$. Donc par définition de la limite (pour $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$), il existe un voisinage de α où $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$. La définition de voisinage donne l'existence du h demandé.
 - g est dérivable sur I et $\forall x \in I$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$. Donc par inégalité des accroissements finis, g est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne sur I , ce qui donne l'inégalité demandée.
 - Soit $x \in I$, alors $|x - \alpha| \leq h$ donc $|g(x) - \alpha| = |g(x) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha| \leq \frac{h}{2} \leq h$. Donc $g(x) \in I$.
 - D'après les questions précédentes et en supposant $u_0 \in I$, I est stable par g , g est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne sur I , avec $\frac{1}{2} \in [0, 1[$, $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$. De plus, soit $x \in I$, $g(x) = x \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$. Donc par propriété des suites récurrentes, u converge vers α .