

Feuille d'exercices 18

Séries numériques

— **Exercice 1** ●○○ — Donner la nature des séries suivantes :

$$\begin{array}{llll}
 1. \sum_{n \geq 0} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 10^9}. & 2. \sum_{n \geq 0} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1}. & 3. \sum_{n \geq 1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n. & 4. \sum_{n \geq 1} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2}\right). \\
 5. \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 - n \cos n}. & 6. \sum_{n \geq 1} \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}. & 7. \sum_{n \geq 0} \ln(1 + e^{-n}). & 8. \sum_{n \geq 1} \left(\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}{n} - \sin \frac{1}{n}\right).
 \end{array}$$

— **Exercice 2** ●○○ — Donner la nature des séries suivantes, et lorsqu'elles convergent, calculer leur somme :

$$1. \sum_{n \geq 1} \frac{4}{n(n+1)(n+2)} \quad 2. \sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{3^{n+2}} \quad 3. \sum_{n \geq 0} \frac{n}{2^n}$$

— **Exercice 3** ●●○ — **Encadrement d'une somme** On considère pour $n \geq 2$ la somme partielle

$$S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}.$$

1. Encadrer S_n à l'aide d'une intégrale de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t \ln t}$.
2. En déduire que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k \ln k}$ diverge, ainsi que l'équivalent des sommes partielles

$$S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(\ln(n)).$$

— **Exercice 4** ●●○ — **Somme des factorielles** On considère la somme partielle $S_n = \sum_{k=1}^n k!$

1. Montrer que $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n!$ (on pourra majorer les termes de $\frac{S_{n-1}}{n!}$).
2. En déduire la nature des séries $\sum_{n \geq 1} \frac{S_n}{(n+1)!}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{S_n}{(n+2)!}$.

— **Exercice 5** ●●○ — **Séries convergentes modifiées** Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs. Etudier la nature des séries suivantes :

$$1. \sum u_n^2 \quad 2. \sum \frac{u_n}{1+u_n} \quad 3. \sum \frac{\sqrt{u_n}}{n} \text{ (comment majorer } ab \text{ par } a^2 \text{ et } b^2 \text{ ?)}$$

— **Exercice 6** ●●○ — **Règle de d'Alembert** On présente ici un outil de deuxième année. Soit (u_n) une suite à terme strictement positifs, de sorte que l'on puisse former le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$

1. On suppose que $\ell < 1$.

a. Soit $k \in]\ell, 1[$. Montrer que

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \quad u_{n+1} \leq k u_n.$$

b. On déduire que la série $\sum u_n$ converge.

2. On suppose que $\ell > 1$, ou bien que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1^+$. Montrer que

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \quad u_{n+1} \geq u_n.$$

Conclure.

3. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. Montrer qu'on ne peut pas conclure en donnant deux exemples de telles suite, telles que les séries associées converge et diverge.

— **Exercice 7** ●●○ — **Vers la formule de Stirling** On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!}$ et $S_n = \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)$.

1. Montrer que $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$ et en déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.
2. En déduire que la suite $(\ln(u_n))_{n \geq 1}$ converge.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers un réel strictement positif, que l'on notera $\frac{1}{C}$.
4. En déduire que $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} C n^n e^{-n} \sqrt{n}$.

Remarque : On peut montrer que $C = \sqrt{2\pi}$, en utilisant les intégrales de Wallis vues au TD « intégration ».

— Exercice 8 ●●○ — Série harmonique et constante d'Euler Soit la série

harmonique $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Montrer en utilisant des intégrales que $H_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln n$.
2. Soit la série harmonique « corrigée » $u_n = H_n - \ln n$. Former $u_{n+1} - u_n$, et en déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge. On note γ sa limite.
3. En déduire le développement asymptotique

$$H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$$

4. Déterminer la nature des séries $\sum_{n \geq 1} \frac{H_n}{1 + \dots + n}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{H_n}{n}$.