

Densités

EXERCICE 1: [Indications] [Correction] - Cours - Calculer -

Soit $f(x) = \frac{\alpha}{e^x + e^{-x}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- Justifier qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que f soit la densité d'une variable aléatoire X et déterminer sa valeur.
- Expliciter la fonction de répartition de X .

EXERCICE 2: [Indications] [Correction] - Cours - Calculer - On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } |x| \geq 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Existe-t-il $C \in \mathbb{R}$ de sorte que $g = Cf$ soit une densité d'une variable aléatoire X . (Si oui, déterminer C .)
- Supposons que X soit une variable aléatoire de densité g .
 - Déterminer $P(2X^2 - 5X + 2 \leq 0)$.
 - Déterminer la fonction de répartition de X .
 - Retrouver, grâce à la fonction de répartition, $P(2X^2 - 5X + 2 \leq 0)$.
 - X admet-elle une espérance? une variance?

EXERCICE 3: [Indications] [Correction] - Chercher - Calculer -

☆☆

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = C \left(1 - e^{-\frac{1}{x^2}}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

Déterminer C de sorte que f définisse une densité de probabilités sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 4: [Indications] [Correction] - Cours -

On pose $F(x) = \begin{cases} Ae^{x-1} & \text{si } x \leq 1 \\ 1 - \frac{A}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- Déterminer $A \in \mathbb{R}$ tel que F soit une fonction de répartition.
- On suppose que X est une variable de fonction de répartition F . Montrer que X est à densité et la déterminer.

EXERCICE 5: [Indications] [Correction] - Raisonner - Soit X une V.A.R. admettant pour densité f . (On pourra supposer f continue sur $\mathbb{R}$.)

- Montrer que $|X|$ est V.A.R. admettant pour densité :

$$\text{i.e.} \quad x \mapsto \begin{cases} (f(x) + f(-x)) \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(x) \\ (f(x) + f(-x)) \text{ si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Montrer que X^2 est V.A.R. admettant pour densité :

$$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}} (f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})) \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(x).$$

EXERCICE 6: [Indications] [Correction] - Calculer - Cours - Soit $\lambda > 0$. Le temps de survie d'une savonnette mesuré en jours est une variable aléatoire T définie par sa densité de probabilité

$$f(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t} \quad \forall t \geq 0$$

- Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
- Déterminer la fonction de répartition F de T .
- On suppose que $E(T) = 20$. Calculer λ .
- Calculer la probabilité pour qu'une savonnette dure plus de 30 jours sachant qu'elle est toujours là au bout de 10 jours.

Autour de la loi uniforme

EXERCICE 7: [Indications] [Correction] - Raisonner - Chercher - Quand on met une rallonge à la table de la salle à manger, la nappe est trop courte de 10cm pour couvrir la table. On la dispose alors en laissant deux bandes de table non convertes à chaque extrémité. La position de la nappe par rapport aux extrémités de la table est laissée au hasard. La variable aléatoire X égale à la largeur de l'espace découvert d'une extrémité suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0; 10]$. On note Y la largeur découverte la plus grande et Z la plus petite.

- Déterminer la loi de probabilité de Y .
- Déterminer la loi de probabilité de Z .

EXERCICE 8: [Indications] [Correction] - Cours - Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[-1; 1]$. Déterminer la loi de $\frac{X}{2}, \frac{Y}{2}$ puis $\frac{X+Y}{2}$.

EXERCICE 9: [Indications] [Correction] Loi exponentielle; sans mémoire

Un sous-marin voyage en plongée, mais doit cependant refaire surface de temps en temps pour prendre l'air et renouveler l'atmosphère. On suppose que la durée d'une plongée en jours suit une loi exponentielle de paramètre λ . En dépouillant tous les livres de bord, on constate que 88,7% des plongées ont duré plus de 6 jours.

1. Donner une valeur approchée du paramètre λ .
2. Calculer la probabilité pour qu'une plongée dépasse une semaine.
3. Sachant que le sous-marin évolue immergé depuis une semaine, calculer la probabilité pour que la durée dépasse 13 jours.

EXERCICE 10: [Indications] [Correction] – Calculer – Cours – Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre θ .

1. Montrer que $X + Y$ est à densité, et en déterminer une densité.
2. Montrer que X^3 est à densité, et en déterminer une densité.
3. Montrer que $\min(X, Y^3)$ est à densité. (On ne demande pas de la calculer.)
4. Montrer que $X - Y$ est à densité et déterminer une densité de $X - Y$. ☆

EXERCICE 11: [Indications] [Correction] – Calculer – Modéliser – Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1[$.

1. Calculer, pour $\lambda > 0$, la fonction de répartition de la variable aléatoire

$$X = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$$

et en déduire sa loi.

2. En déduire un programme permettant de simuler une variable aléatoire de loi exponentielle.

EXERCICE 12: [Indications] [Correction] – Cours – Raisonner – Calculer – (Dans cet exercice, on ne tiendra pas compte des années bissextiles.)

Le président des Etats-Unis se prépare à décréter l'embargo économique contre Cuba. (Situation hypothétique!) Ses conseillers ont estimé que la durée de la crise suivrait une loi exponentielle de moyenne quatre ans. On suppose exacte cette estimation.

1. Déterminer le paramètre de la loi de T , nombre d'années d'embargo.
2. On note X le nombre de jours d'embargo. Traduire l'énoncé à l'aide de X .
3. Sachant qu'il fume deux cigares par jour, calculer le nombre minimum de boîtes de 500 Havanes qu'il doit faire acheter par sa secrétaire pour ne pas en manquer, avec une probabilité supérieure à 0.95.

EXERCICE 13: [Indications] [Correction] – Calculer – Modéliser – Soit A une V.A.R. suivant la loi $\mathcal{N}(5, 2)$.

1. Déterminer $P(A \leq 5)$
2. a) Déterminer $P(A \leq 6)$
b) En déduire $P(5 \leq A \leq 6)$
c) En déduire $P(4 \leq A \leq 6)$
3. a) Déterminer le nombre z_1 tel que $P(A \leq z_1) = 0,95$
b) En déduire le nombre z_2 tel que $P(A > z_2) = 0,95$
4. Déterminer le nombre z_3 tel que $P(|A - 5| \leq z_3) = 0,9$

EXERCICE 14: [Indications] [Correction] – Calculer – Raisonner – Soit X une v.a. de loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$.

1. Soit $Z = e^X$. Montrer que Z est une variable aléatoire à densité, dont on déterminera une densité f^Z . (Cette loi s'appelle la loi log-normale.)
2. Montrer que Z admet des moments de tous ordres. Les calculer. ☆
3. En déduire l'espérance et la variance de Z .

EXERCICE 15: [Indications] [Correction] – Cours – Soit X une v.a. de loi $\mathcal{N}(2, 1)$, déterminer la loi de

1. $Y = -X$.
2. $Y = 3X$.
3. $Y = X + b$

EXERCICE 16: [Indications] [Correction] – Cours – Mobiliser – Louise achète 9 sacs de blé à Robert d'une contenance étiquetée de 80kg chacun. (Elle s'attend donc à avoir 720kg de blé...) Robert d'étant pas toujours attentif, la masse du blé contenu dans un sac suit en réalité une loi normale $\mathcal{N}(80; 0.25)$. Soit X la quantité de blé, en kilogrammes, que Robert lui a effectivement vendu.

1. Établir la loi de X .
2. Calculer la probabilité pour que Louise ait acheté en réalité moins de 720 kg de blé.
3. Dans le mois qui suit, les souris mangent en moyenne 50 kg de blé avec un écart-type de 20kg. En supposant que cette perte due aux rongeurs suit une loi normale, on note Y la quantité de blé qui lui restera au bout du mois, quand elle commencera à l'utiliser pour nourrir ses poules. Établir la loi de Y .

4. a) Déterminer a tel que $\Phi(a) = 0.05$ (où Φ est la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite.)
- b) Chaque poule picore en moyenne 150 grammes de blé par jours, avec un écart-type de 50, en suivant une loi normale. Quelle est la loi de la quantité de blé mangée en un an par une poule ? (*On suppose que le chat a mangé les souris.*)
- c) Combien Louise peut-elle nourrir de poules au maximum pendant un an (année non bissextile), avec une probabilité égale à 0.95 de ne pas manquer de grain ?

EXERCICE 17: [Indications] [Correction] Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t^2+3t-1} dt$.

Divers

EXERCICE 18: [Indications] [Correction] – *Chercher – Raisonner* – Soit X une variable aléatoire. à densité.

1. Supposons que X soit de carré intégrable (i.e. admet un moment d'ordre 2). Démontrer qu'il existe un unique réel x_0 tel que la fonction $g : x \mapsto E((X - x)^2)$ soit minimum en ce point. Déterminer x_0 et $g(x_0)$. ★
2. On appelle médiane de X un réel m tel que

$$P(X \geq m) \geq \frac{1}{2} \quad P(X \leq m) \geq \frac{1}{2}.$$

- a) Montrer que $\inf\{x \in \mathbb{R} \mid P(X \leq x) \geq \frac{1}{2}\}$ existe. ★
- b) Posons $m = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid P(X \leq x) \geq \frac{1}{2}\}$. Montrer que m est une médiane. ★★
- c) Supposons que la variable X soit à densité. Montrer que, si m est une médiane, alors

$$P(X \geq m) = P(X \leq m) = \frac{1}{2}$$

- d) Montrer qu'en général, une médiane n'est pas forcément unique. (On pourra examiner par exemple une variable aléatoire finie.)

Indications

Exercice 1 [Correction]

1. Un changement de variable en par exemple $u = e^x$ serait bienvenu.

Exercice 3 [Correction]

On pensera à se ramener à l'intégrale connue $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$. (Valeur à rappeler.)
Pour ce faire, essayer un changement de variable puis une intégration par partie.

Exercice 7 [Correction]

1. Exprimer Y en fonction de X . $Y = \begin{cases} X & \text{si } X \geq 5 \\ 10 - X & \text{si } X < 5 \end{cases} = \sup(X, 10 - X)$
2. Pour ne pas avoir à tout recommencer, chercher une relation entre Y et Z .

Exercice 10 [Correction]

2. Commencer par déterminer la fonction de répartition de X^3 .
4. Utiliser un exercice de cours pour déterminer la densité de $-Y$.

Exercice 12 [Correction]

3. Plutôt que de calculer le nombre de cigares, on pourra calculer le nombre n de jours pour lesquels la probabilité que l'embargo ne dure pas plus de n jours soit supérieure à 0,95.

Exercice 16 [Correction]

4. c) Déterminer la loi de la quantité de grain T mangée par n poules en un an. Puis se ramener à une variable suivant une loi normale centrée réduite pour pouvoir utiliser la table de la loi normale.

Exercice 18 [Correction]

2. a) Montrer que l'inf existe revient à montrer que l'ensemble est non vide et minoré.
- b) On rappelle que si $m = \inf A$, alors il existe une suite (m_n) d'éléments de A tels que $\lim_{n \rightarrow +\infty} m_n = m$.

Exercice 1

1. On constate que f est ctn sur $\mathbb{R}$. On pose le changement de variable $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone $u = e^x$. On trouve alors que $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ est de même nature (et éventuellement même valeur) que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{u + \frac{1}{u}} \frac{1}{u} du = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2 + 1} du$$

Or, on peut facilement calculer cette intégrale en primitivant par arctan. On trouve la convergence et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f = \frac{\pi}{2}$$

On trouve donc

$$\boxed{\alpha = \frac{2}{\pi}}$$

2. f est continue sur $\mathbb{R}$. On sait donc que la fonction de répartition F de X est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Il existe donc $k \in \mathbb{R}$ tel que (par le même changement de variable que dans la question précédente :

$$F(x) = \arctan(e^x) + k$$

Par limite de F en $-\infty$, on obtient

$$k = 0$$

d'où

$$\boxed{F(x) = \arctan(e^x)}$$

Exercice 2

1. • Continuité de g :
 f est continue sur $\mathbb{R}$ (à vérifier !) donc g est continues quelquesoit C .

- Positivité de g :
 f est positive, donc g est positive si et seulement si $C \geq 0$.

- Intégrabilité de g : Voyons maintenant s'il existe C tel que $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = 1$.

★ Montrons que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge et déterminons sa valeur :

f est continue sur $\mathbb{R}$. Les problèmes sont donc en $\pm\infty$. De plus, f est paire, il suffit donc d'étudier le problème en $+\infty$. En cas de convergence, on a, de plus,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x) dx$$

Après étude (simple), on observe que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$$

d'où

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^1 1 dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 2$$

et finalement

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 4$$

- ★ Conclusion : $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = 1$ si et seulement si

$$\boxed{C = \frac{1}{4}}$$

- Conclusion : Toute densité pouvant être associée à une variable aléatoire,

g est une densité associée à une va si et seulement si $C = 1/4$.

2. a) On note que $2X^2 - 5X + 2 = 2(X - \frac{1}{2})(X - 2)$. Le polynôme est donc négatif si et seulement si $X \in [\frac{1}{2}; 2]$. Autrement dit,

$$\begin{aligned} P(2X^2 - 5X + 2 \leq 0) &= P(\frac{1}{2} \leq X \leq 2) \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^2 g(x) dx \\ &= C \int_{\frac{1}{2}}^1 1 dx + C \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

D'où

$$P(2X^2 - 5X + 2 \leq 0) = \frac{1}{4}$$

- b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On souhaite déterminer $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x g(x) dx$.

- si $x \leq -1$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x g(x) dx = C \int_{-\infty}^x \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{4|x|}$$

- si $x \in [-1; 1]$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x g(x) dx = C \left(\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^2} dt + \int_{-1}^x 1 dt \right) = \frac{1}{4} (1 + (x + 1))$$

- si $x \geq 1$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^x g(x) dx = F_X(1) + C \int_1^x \frac{1}{t^2} dt = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{t} \right]_1^x \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{x} \right) = 1 - \frac{1}{4x} \end{aligned}$$

- Conclusion :

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4|x|} & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{x+2}{4} & \text{si } x \in [-1; 1[\\ 1 - \frac{1}{4x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- c) On rappelle que, $P(2X^2 - 5X + 2 \leq 0) = P(X \in [\frac{1}{2}; 2])$. D'où

$$P(2X^2 - 5X + 2 \leq 0) = F_X(2) - F_X\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{4 \times 2} - \frac{1/2 + 2}{4} = 1 - \frac{1}{8} - \frac{5}{8} = 1 - \frac{6}{8} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

- d) • Existence de l'espérance ?

L'espérance de X existe si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|g(x) dx$ existe. Par parité, cela revient à savoir si $\int_0^{+\infty} xg(x) dx$ converge.

Or, $\int_1^{+\infty} xg(x) dx = C \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ qui diverge (à faire...). En conclusion,

X n'admet pas d'espérance.

- Existence de la variance ?

Le moment d'ordre 1 n'existe pas. Il ne peut donc pas exister de moment d'ordre 2, et donc

X n'admet pas de variance.

Exercice 3

- Continuité de f :

Pour tout $C \in \mathbb{R}$, la fonction f est prolongeable par continuité en 0. On peut donc par exemple poser $f(0) = C$, de sorte que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

- Positivité de f :

$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ si et seulement si $C \geq 0$.

- Intégrabilité : Voyons maintenant s'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$.

Pour ceci, on va déterminer l'existence et la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} 1 - e^{-\frac{1}{x^2}} dx$

Par parité, il suffit d'étudier la convergence sur $[0; +\infty[$. La fonction étant prolongeable par continuité en 0, il suffit d'étudier le problème en $+\infty$. On souhaite se ramener à e^{-t^2} . Il faudrait donc faire un changement de variable $t = \frac{1}{x}$:

★ Le changement de variable est $\mathcal{C}^1$ et monotone sur $]0; +\infty[$:

$$t = \frac{1}{x} \quad x = \frac{1}{t} \quad dx = -\frac{1}{t^2} dt$$

L'intégrale est donc de même nature (et même valeur si convergence) que

$$-\int_{+\infty}^0 \underbrace{e^{-t^2}}_v \underbrace{\frac{1}{t^2}}_{-u'} dt$$

★ Puis une Ipp de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$

$$\begin{aligned} u' &= -\frac{1}{t^2} & v &= 1 - e^{-t^2} \\ u &= \frac{1}{t} & v' &= 2te^{-t^2} \end{aligned}$$

Comme $u(t)v(t) = \frac{1}{t}(1 - e^{-t^2})$ converge en 0 et $+\infty$ (voir en 0 avec les équivalents), on sait que l'intégrale est de même nature que

$$\int_0^{+\infty} 2e^{-t^2} dt$$

qui est convergente d'après le cours et vaut

$$\int_0^{+\infty} 2e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

Par intégration par partie, on a donc (par transitivité) convergence de l'intégrale de départ avec

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} 1 - e^{-\frac{1}{x^2}} dx &= 2 \int_0^{+\infty} 1 - e^{-\frac{1}{x^2}} dx \\ &= 2 \int_{+\infty}^0 e^{-t^2} \frac{1}{t^2} dt \\ &= 2 ([uv]_0^{+\infty} + \sqrt{\pi}) \\ &= 2\sqrt{\pi} \end{aligned}$$

Finalement,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 1 - e^{-\frac{1}{x^2}} dx = 2 \int_0^{+\infty} 1 - e^{-\frac{1}{x^2}} dx = 2\sqrt{\pi}$$

et pour finir, f est une densité si et seulement si

$$C = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$

Exercice 4

1. • On observe que F est continue à droite en 1 ssi

$$A = F(1) = \lim_{x \rightarrow 1+} F(x) = 1 - A$$

i.e.

$$A = \frac{1}{2}.$$

Pour cette valeur de A , on a alors F continue sur $\mathbb{R}$, croissante, avec les limites 0 et 1 en $-\infty$ et $+\infty$. C'est bien une fonction de répartition.

2. On observe que F est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en 1. Elle est donc à densité que l'on note f , avec, pour tout $x \neq 1$,

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x-1} & \text{si } x > 1 \\ \frac{1}{x^3} & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

En prolongeant f de manière raisonnable, on obtient

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x-1} & \text{si } x > 1 \\ \frac{1}{x^3} & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

Exercice 5

1. • Support de $|X|$: Il est clair que $|X| \geq 0$.

- Densité de $|X|$:

- ★ Pour $x < 0$ on a

$$p(|X| \leq x) = 0 = \int_{-\infty}^x (f(t) + f(-t)) \underbrace{\mathbb{1}_{]0, +\infty[}(t)}_{=0 \text{ car } t \leq 0} dt$$

- ★ Pour $x \geq 0$:

$$p(|X| \leq x) = p(-x \leq X \leq x) = \int_{-x}^x f(t) dt = \int_{-x}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt$$

Changement de variable dans la première intégrale : $t = -u$.

$$\int_{-x}^0 f(t) dt = - \int_x^0 f(-u) du = \int_0^x f(t) dt$$

D'où

$$p(|X| \leq x) = \int_0^x (f(t) + f(-t)) dt = \int_{-\infty}^x (f(t) + f(-t)) \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(t) dt$$

.

2. • Support de X^2 : Il est clair que $X^2 \geq 0$.

- Densité de X^2 :

- ★ Pour $x < 0$ on a bien

$$p(X^2 \leq x) = 0 = \int_{-\infty}^x \frac{1}{2\sqrt{t}} (f(\sqrt{t}) + f(-\sqrt{t})) \underbrace{\mathbb{1}_{]0, +\infty[}(t)}_{=0 \text{ car } t \leq 0} dt$$

- ★ Pour $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} F_{X^2}(x) &= p(X^2 \leq x) = p(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) \\ &= \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(t) dt \\ &= \int_{-\sqrt{x}}^0 f(t) dt + \int_0^{\sqrt{x}} f(t) dt \\ &= - \int_0^{-\sqrt{x}} f(t) dt + \int_0^{\sqrt{x}} f(t) dt \end{aligned}$$

La fonction F_{X^2} est dérivable sur $x \in]0; +\infty[$, avec

$$F'_{X^2}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} f(-\sqrt{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}} f(\sqrt{x})$$

La fonction F_{X^2} étant $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, la variable aléatoire X^2 est à densité, avec comme densité

$$f_{X^2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} f(-\sqrt{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}} f(\sqrt{x}) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Comme on peut choisir n'importe quelle valeur pour $f_{X^2}(0)$, on en déduit que

$$\boxed{\frac{1}{2\sqrt{t}} (f(\sqrt{t}) + f(-\sqrt{t})) \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(t) \text{ est bien une densité de } X^2}$$

Exercice 6

$$1. \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \lambda \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt}_{E(X) \text{ où } X \text{ suit une loi } \mathcal{E}(\lambda)} = \lambda \frac{1}{\lambda} = 1$$

$$2. \quad F(t) = (1 - (\lambda t + 1)e^{-\lambda t}) \mathbb{1}_{[0; +\infty[}(t).$$

3. • Calcul de $E(T)$ en fonction de λ :

Montrons que $E(T)$ existe, c'est-à-dire que $\int_{-\infty}^{+\infty} |t|f(t) dt$ converge.

On note que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t|f(t) dt = \int_0^{+\infty} tf(t) dt = \lambda \underbrace{\int_0^{+\infty} \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt}_{E(X^2)}$$

On en déduit l'existence de l'espérance, avec, de plus,

$$E(T) = \int_0^{+\infty} tf(t) dt = \lambda E(X^2) = \lambda(V(X) + E(X^2)) = \lambda \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} \right)$$

i.e.

$$E(T) = \frac{2}{\lambda}$$

• Calcul de λ :

L'énoncé nous dit que

$$20 = E(T)$$

Le résultat précédent nous dit que

$$E(T) = \frac{2}{\lambda}$$

On en déduit que $\frac{1}{\lambda} = 10$ et donc

$$\lambda = \frac{1}{10}$$

4. On cherche $P(T \geq 30/T \geq 10)$

Or,

$$\begin{aligned} P(T \geq 30/T \geq 10) &= \frac{P(T \geq 30, T \geq 10)}{P(T \geq 10)} \\ &= \frac{P(T \geq 30)}{P(T \geq 10)} \\ &= \frac{1 - F_T(30)}{1 - F_T(10)} \\ &= \frac{(30\lambda + 1)e^{-30\lambda}}{(10\lambda + 1)e^{-10\lambda}} = 2e^{-2} \end{aligned}$$

La probabilité cherchée est donc

$$P(T \geq 30/T \geq 10) = 2e^{-2} \simeq 0.27$$

Exercice 7

$$1. Y = \begin{cases} X & \text{si } X \geq 5 \\ 10 - X & \text{si } X < 5 \end{cases} = \sup(X, 10 - X)$$

$$\bullet \text{ Supp}(Y) = [5; 10].$$

$$\bullet \text{ Soit } y \in [5; 10],$$

$$P(Y \leq y) = P(X \leq y, 10 - X \leq y) = P(\underbrace{10 - y \leq X}_{\in [0; 10]} \leq \underbrace{y}_{\in [0; 10]}) = \int_{10-y}^y \frac{1}{10} dx = \frac{1}{10}(y - (10 - y))$$

i.e.

$$P(Y \leq y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 5 \\ \frac{y}{5} - 1 & \text{si } 5 \leq y \leq 10 \\ 1 & \text{si } y > 10 \end{cases}$$

La fonction de répartition est $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en 5 et 10. X est donc une va à densité. En dérivant, on obtient

$$F'_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 5 \\ \frac{1}{5} & \text{si } 5 < y < 10 \\ 0 & \text{si } y > 10 \end{cases}$$

On reconnaît une loi uniforme, (dans laquelle on inclut 5 et 10 car X peut prendre ces valeurs) :

$$Y \rightsquigarrow U_{[5; 10]}$$

2. Z est le plus petit morceau, donc Y est l'autre bout, ce qui signifie qu'en fait,

$$Y + Z = 10$$

Intuitivement, on aimerait donc dire que Z suit une loi uniforme sur $[0; 5]$. Vérifions.

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(10 - Y \leq z) = P(Y \geq 10 - z) = 1 - F_Y(10 - z)$$

En dérivant pour $z \neq 0; 5$, on obtient

$$F'_Z(z) = F'_Y(10 - z) = f(10 - z) = \begin{cases} 0 & \text{si } 10 - z < 5 \\ \frac{1}{5} & \text{si } 5 < 10 - z < 10 \\ 0 & \text{si } 10 - z > 10 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0 \\ \frac{1}{5} & \text{si } 0 < z < 5 \\ 0 & \text{si } y > 5 \end{cases}$$

On a bien

$$\boxed{Z \rightsquigarrow U_{[0;5]}}$$

Exercice 8

- Loi de $\frac{X}{2}, \frac{Y}{2}$:

Les variables X, Y suivent des lois uniformes. Ainsi, $\frac{X}{2}, \frac{Y}{2}$ suivent également des lois uniformes, avec comme support $\frac{1}{2}[-1, 1] = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Ainsi,

$$\boxed{\frac{X}{2}, \frac{Y}{2} \hookrightarrow \mathcal{U}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}}$$

On note maintenant $U = \frac{X}{2}, V = \frac{Y}{2}$.

- Densité de $\frac{X+Y}{2} = U + V$:

U et V sont indépendantes et à densité. On sait donc que $U + V$ suit une loi à densité. On la note h .

Avec le support de $U + V$ qui est

$$\text{Supp}(U + V) = [-1, 1]$$

on obtient directement

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$$

De plus, pour $x \in [-1, 1]$, on sait que

$$h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t)f_V(x-t) dt$$

Or,

$$f_U(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |t| > \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } |t| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

et

$$f_V(x-t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x-t| > \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } |x-t| \leq \frac{1}{2} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } x - \frac{1}{2} \leq t \leq x + \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Éventuellement à l'aide d'un petit schéma, on pourra alors trouver que :

- Si $x \in [-1, 0]$:

$$f_U(t)f_V(x-t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -\frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } -\frac{1}{2} < t < x + \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si} \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} 1 dt \\ &= x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = x + 1 \end{aligned}$$

- Si $x \in [0, 1]$:

$$f_U(t)f_V(x-t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < x - \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } x - \frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si} \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{x-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 dt \\ &= \frac{1}{2} - (x - \frac{1}{2}) = 1 - x \end{aligned}$$

D'où finalement

$$\boxed{f_{\frac{X+Y}{2}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > 1 \\ 1+x & \text{si } x \in [-1 : 0] \\ 1-x & \text{si } x \in [0 : 1] \end{cases}}$$

Exercice 9

1. La fonction de répartition de X , durée d'une plongée est

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

D'où

$$0,887 = P(X > 6) = e^{-\lambda t}$$

et donc

$$\boxed{\lambda \simeq 0,02}$$

3. En faisant le calcul, on tombe sur $P_{X \geq 7}(X \geq 13) = P(\geq 6) = 88,7$

Exercice 10

1. D'après le cours, comme les variables sont indépendantes, on sait directement que $X + Y$ est à densité. On la note h .

- Support :

On sait que comme $X, Y \geq 0$, on a

$$\text{Supp}(X + Y) = [0, +\infty[$$

ainsi on peut en déduire immédiatement que

$$h(x) = 0 \text{ si } x < 0$$

- Calcul :

On note f la densité de X (qui est aussi celle de Y .)

Pour ce qui est de $x \geq 0$, on sait d'après que cours que

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt$$

Or

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \theta e^{-\theta t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x-t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \theta e^{-\theta(x-t)} & \text{si } x \geq t \end{cases}$$

Après un petit schéma explicatif, on aura :

$$f(t)g(x-t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \text{ ou } t > x \\ \theta e^{-\theta(x-t)} & \text{si } 0 \leq t \leq x \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_0^x \theta e^{-\theta(x-t)} dt \\ &= e^{-\theta x} \int_0^x \theta e^{\theta t} dt \\ &= e^{-\theta x} (e^{\theta x} - 1) \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-\theta x} (e^{\theta x} - 1) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}}$$

2. • Fonction de répartition F de X^3 :

★ $Supp(X^3) = \mathbb{R}^+$ d'où

$$\forall x < 0 \quad P(X^3 \leq x) = 0$$

★ Soit $x \geq 0$

$$P(X^3 \leq x) = P(X \leq \sqrt[3]{x}) = \theta \int_0^{\sqrt[3]{x}} e^{-\theta t} dt = [-e^{-\theta t}]_0^{\sqrt[3]{x}} = 1 - e^{-\theta \sqrt[3]{x}}$$

et donc

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\theta \sqrt[3]{x}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

• Montrons que X^3 est à densité :

F est continue trivialement sur $] -\infty, 0[, [0, +\infty[$. En 0^- :

$$\lim_{0^-} F = 0 = F(0)$$

donc F est également continue à gauche en 0. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}$ entier.

De plus, F est $\mathcal{C}^1$ sur au moins $\mathbb{R}^*$. En conclusion, X^3 est bien à densité.

• Calcul de la densité :

La fonction de répartition est dérivable sauf peut être en 0, avec

$$F'_{X^3}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{\theta}{3} x^{-\frac{2}{3}} e^{-\theta x^{\frac{1}{3}}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

X^3 est donc à densité. On peut attribuer à $f(0)$ n'importe quelle valeur. Une densité de X^3 est donc

$$f_{X^3}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\theta}{3x^{\frac{2}{3}}} e^{-\theta x^{\frac{1}{3}}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

3. On pose $T = \min(X, Y^3)$.

• Fonction de répartition de T :

★ $Supp(T) = \mathbb{R}^+$ d'où

$$\forall x < 0 \quad P(T \leq x) = 0$$

★ Soit $x \geq 0$

$$\begin{aligned} P(T \leq x) &= 1 - P(T > x) \\ &= 1 - P(X > x, Y^3 > x) \\ &= 1 - P(X > x)P(Y^3 > x) \quad \text{independ.} \\ &= 1 - (1 - F_X(x))(1 - F_{Y^3}(x)) \\ &= 1 - (1 - e^{-\theta x})(1 - (1 - e^{-\theta \sqrt[3]{x}})) \\ &= 1 - (1 - e^{-\theta x})e^{-\theta \sqrt[3]{x}} \end{aligned}$$

et donc

$$F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - (1 - e^{-\theta x})e^{-\theta \sqrt[3]{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

• Montrons que T est à densité :

F_T est continue trivialement sur $] -\infty, 0[, [0, +\infty[$. En 0^- :

$$\lim_{0^-} F_T = 0 = 1 - \underbrace{(1 - e^{-\theta 0})}_1 \underbrace{e^{-\theta \sqrt[3]{0}}}_1 = F_T(0)$$

donc F_T est également continue à gauche en 0. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}$ entier.

De plus, F_T est $\mathcal{C}^1$ sur au moins $\mathbb{R}^*$. En conclusion, T est bien à densité.

4. • $\text{Supp}(X - Y) = \mathbb{R}$.

On écrit $X - Y = X + (-Y)$.

- Densité de $-Y$:

Un exercice de cours qu'il faudrait refaire nous dit qu'une densité de $-Y$ est

$$y \mapsto f_Y(-y)$$

- Densité de $X + (-Y)$:

Comme X et Y ind, alors X est ind de $-Y$. On sait donc que $X + (-Y)$ est une variable aléatoire à densité, dont la densité est donnée par une intégrale convergente :

$$h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x - t) dt$$

Le support de $X - Y$ n'étant pas très parlant, on part directement sur le calcul : On sait que

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \theta e^{-\theta t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

D'où

$$f_{-Y}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t > 0 \\ \theta e^{\theta t} & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

et donc

$$f_{-Y}(x - t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > t \\ \theta e^{\theta(x-t)} & \text{si } x \leq t \end{cases}$$

Un petit schéma nous montre que :

- Si $x \leq 0$:

$$f_X(t) f_{-Y}(x-t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \theta^2 e^{-\theta t} e^{\theta(x-t)} & \text{si } t \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \theta^2 e^{\theta(x-2t)} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_0^{+\infty} \theta^2 e^{\theta(x-2t)} dt \\ &= \theta e^{\theta x} \int_0^{+\infty} \theta e^{-2\theta t} dt \\ &= \frac{\theta}{2} e^{\theta x} \underbrace{\int_0^{+\infty} 2\theta e^{-2\theta t} dt}_{=1 \quad (\text{densité de } \mathcal{E}(2\theta))} \end{aligned}$$

- Si $x > 0$:

$$f_X(t) f_{-Y}(x-t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < x \\ \theta^2 e^{\theta(x-2t)} & \text{si } t \geq x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_x^{+\infty} \theta^2 e^{\theta(x-2t)} dt \\ &= \theta e^{\theta x} \int_x^{+\infty} \theta e^{-2\theta t} dt \\ &= \frac{\theta}{2} e^{\theta x} \left[-e^{-2\theta t} \right]_x^{+\infty} \\ &= \frac{\theta}{2} e^{\theta x} e^{-2\theta x} \\ &= \frac{\theta}{2} e^{-\theta x} \end{aligned}$$

Au final, $X - Y$ est une variable aléatoire de densité :

$$h_{X-Y} : x \mapsto \frac{\theta}{2} e^{-\theta|x|}$$

Exercice 11

1. • Fonction de répartition de X :

$\text{Supp}(X) =]0, +\infty[$, donc

$$F(x) = 0 \text{ si } x \leq 0$$

Si $x > 0$:

$$F(x) = P(X \leq x) = P\left(-\frac{1}{\lambda} \ln U \leq x\right) = P(\ln U \geq -\lambda x) = P(U \geq e^{-\lambda x}) = 1 - P(U < e^{-\lambda x}).$$

Or U est une variable à densité, donc

$$P(U < e^{-\lambda x}) = P(U \leq e^{-\lambda x})$$

De plus, $e^{-\lambda x} \in [0, 1]$. On sait alors que, comme U suit une loi uniforme sur $[0, 1]$,

$$P(U \leq e^{-\lambda x}) = e^{-\lambda x}$$

D'où

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } e^{-\lambda x} > 1 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{sinon} \end{cases}$$

On reconnaît une loi exponentielle de paramètre λ , d'où $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

2. Algorithmes :

- On demande à l'ordinateur un nombre u au hasard entre 0 (strictement) et 1.
- On rend le nombre $x = -\frac{1}{\lambda} \ln u$.

Exercice 12

1. L'énoncé dit qu'il existe $\lambda > 0$ tel que

$$T \sim \mathcal{E}(\lambda)$$

Or, $\frac{1}{\lambda} = E(T) = 4$, d'où

$$\boxed{\lambda = 1/4}$$

2. On a $X/365 = T$ (nombre d'années) obtient le nombre d'années. L'énoncé dit alors que

$$\frac{X}{365} \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{4}\right)$$

3. • Traduction :

Il s'agit de déterminer en fait, le nombre minimum n de jours d'embargo, avec une probabilité de 0.95. On pourra alors aisément en déduire le nombre de cigares.

• Calcul du nombre de jours d'embargo :

On note X le nombre de jours d'embargo. Alors on cherche n le plus petit tel que

$$P(X \leq n) \geq 0.95$$

Par hypothèse, $\frac{X}{365}$ (nombre d'années d'embargo) suit une loi

$$\frac{X}{365} \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{4}\right)$$

La fonction de répartition de $Y = \frac{X}{365}$ est donc

$$F_Y(x) = 1 - e^{-\frac{x}{4}}$$

Or,

$$\begin{aligned} P(X \leq n) \geq 0.95 &\Leftrightarrow P\left(Y \leq \frac{n}{365}\right) \geq 0.95 \\ &\Leftrightarrow F_Y\left(\frac{n}{365}\right) \geq 0.95 \\ &\Leftrightarrow 1 - e^{-\frac{n}{4 \times 365}} \geq 0.95 \\ &\Leftrightarrow e^{-\frac{n}{4 \times 365}} \leq 0.05 \\ &\Leftrightarrow -\frac{n}{4 \times 365} \leq \ln(0.05) \quad (\text{croissance et bijectivité de } \ln) \\ &\Leftrightarrow n \geq -\ln(0.05) \times 4 \times 365 \simeq 4373,8 \end{aligned}$$

On en déduit que le nombre minimum n de jours d'embargo, avec une probabilité de 0.95 est de $\boxed{4374 \text{ jours.}}$

• Calcul du nombre de boîtes de cigares :

A raison de 2 cigares par jours, il faut commander 8748 cigares.

Ceci correspond à $\frac{8748}{500} = 17.496$ boîtes. Autrement dit, si le président veut tenir jusqu'à la fin avec une probabilité de 0.95, il doit acheter au moins

$$\boxed{18 \text{ boîtes.}}$$

Exercice 13

1. Comme $A \hookrightarrow \mathcal{N}(5, 2)$, on a

$$P(A \leq 5) = \frac{1}{2}$$

2. a)

$$P(A \leq 6) \simeq 0.760249938907$$

- b) C'est $P(A \leq 6) - P(A \leq 5)$ D'où

$$P(5 \leq A \leq 6) \simeq 0.260249938907$$

- c) C'est $P(4 \leq A \leq 6) = P(4 \leq A \leq 5) + P(5 < A \leq 6) = 2P(5 \leq A \leq 6)$
par symétrie.
D'où

$$P(4 \leq A \leq 6) \simeq 0.520499877813$$

3. a)

$$P(A \leq 7.32617430735) \simeq 0,95$$

4. On a

$$P(|A - 5| \leq z_3) = P(-z_3 \leq A \leq z_3) = P\left(\frac{-z_3}{\sqrt{2}} \leq \frac{A - 5}{\sqrt{2}} \leq \frac{z_3}{\sqrt{2}}\right)$$

Avec

$$\frac{A - 5}{\sqrt{2}} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

i.e.

$$P(|A| \leq z_3) = \Phi\left(\frac{z_3}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{-z_3}{\sqrt{2}}\right) = 2\Phi\left(\frac{z_3}{\sqrt{2}}\right) - 1$$

Ainsi,

$$2\Phi\left(\frac{z_3}{\sqrt{2}}\right) - 1 = 0.90 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{z_3}{\sqrt{2}}\right) = \frac{0.9 + 1}{2} = 0.95$$

on cherche donc

$$\Phi^{-1}(0.95) = 0.645$$

puis

$$\frac{z_3}{\sqrt{2}} = 0.645$$

et donc

$$z_3 = \sqrt{2} \times 0.645 = 2.3262$$

Exercice 14

1. • Fonction de répartition de Z :

$$\star \text{ Supp}(Z) \subset [0; +\infty[, \text{ d'où}$$

$$\forall z \leq 0, \quad P(Z \leq z) = 0$$

$$\star \text{ Soit } z \in]0; +\infty[.$$

$$\begin{aligned} P(Z \leq z) &= P(e^X \leq z) \\ &= P(X \leq \ln z) \quad \text{car } \ln \text{ est croissante bijective sur } \mathbb{R}_+^*. \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\ln z} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \end{aligned}$$

D'où, en notant F_Z la fonction de répartition de Z , on a

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\ln z} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \Phi(\ln z) & \text{sinon} \end{cases}$$

- Densité de Z :

On constate que F_Z est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, avec

$$F'_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0 \\ \frac{1}{z\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\ln z)^2} & \text{si } z > 0 \end{cases}$$

On en déduit que Z est à densité. De plus, comme on peut choisir $f(0)$ n'importe comment, on peut poser une densité de Z comme étant

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq 0 \\ \frac{1}{z\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\ln z)^2} & \text{si } z > 0 \end{cases}$$

2. • Existence des moments :

Par le théorème de transfert, Z admet un moment d'ordre k si et seulement si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |e^x|^k f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{kx}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\ln x)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{kx - \frac{1}{2}x^2} dx \quad \text{converge}$$

Or

$$kx - \frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}(x^2 - 2kx) = -\frac{1}{2}((x-k)^2 + 1)$$

D'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |e^x|^k f_X(x) dx = e^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-k)^2} dx$$

On reconnaît la densité d'une variable qui suit une loi $\mathcal{N}(k, 1)$, ainsi cette intégrale converge et les moments existent tous.

• Calcul des moments :

Il suffit de retirer la valeur absolue dans l'intégrale précédente. Comme cela ne change rien au calcul, on peut dire que

$$\mathbb{E}[Z] = e^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-k)^2} dx$$

or

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-k)^2} dx = 1$$

D'où

$$\mathbb{E}[Z] = e^{-\frac{1}{2}}$$

3. • L'espérance est le moment d'ordre $k = 1$:

$$\boxed{E(Z) = e^{\frac{1}{2}}}$$

• Comme le moment d'ordre 2 existe, on sait que

$$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = e^{\frac{2^2}{2}} - \left(e^{\frac{1}{2}}\right)^2 = e^2 - e$$

D'où

$$\boxed{V(Z) = e^2 - e \simeq 4.67}$$

Exercice 15

1. $\mathcal{L}(-X) = \mathcal{N}(-2 \times 1, 1 \times 1) = \mathcal{N}(-2, 1)$
2. $\mathcal{L}(3X) = \mathcal{N}(3 \times 2, 3^2 \times 1) = \mathcal{N}(6, 9)$

3. $\mathcal{L}(X + b) = \mathcal{N}(2 + b, 1)$

Exercice 16

1. On note X_i la quantité de blé contenue dans le sac i . Alors

$$X = X_1 + \dots + X_9$$

où les X_i sont mutuellement indépendantes, de même loi $\mathcal{N}(80; 0.25)$. On sait donc que

$$X \rightsquigarrow \mathcal{N}(9 \times 80; 9 \times 0.25) = \mathcal{N}(720; 2.25)$$

2. La densité de la loi normale étant symétrique par-rapport à $\mu = E(X) = 720$, on a

$$P(X \leq 720) = \frac{1}{2}$$

3. $Y = X - M$, où M est la variable aléatoire correspondant à la quantité de nourriture mangée par les souris. On sait que

$$X \rightsquigarrow \mathcal{N}(720; 2.25), \quad M \rightsquigarrow \mathcal{N}(50; 20^2), \quad X, Y \text{ indépendantes}$$

On sait alors que

$$-M \rightsquigarrow \mathcal{N}(-50; 20^2)$$

puis que

$$X - M \rightsquigarrow \mathcal{N}(720 - 50, 2.25 + 20^2) = \mathcal{N}(670, 402.25)$$

i.e.

$$\boxed{Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(670, 402.25)}$$

4. a) D'après la table inversée de la loi normale centrée réduite, on constate que

$$\boxed{\Phi(-1.65) \simeq 0.05}$$

- b) On note J la quantité mangée par une poule en un jour. Alors

$$J \rightsquigarrow \mathcal{N}(0.15, 0.05^2)$$

La quantité mangée par une poule en 365 jours est la somme

$$A = J_1 + \dots + J_{365}$$

où les J_i sont des copies identiques et indépendantes de J , d'où

$$\boxed{A \rightsquigarrow \mathcal{N}(365 \times 0.15, 365 \times 0.05^2) = \mathcal{N}(54.75; 0.9125)}$$

- c) On note n le nombre de poules qu'elle peut nourrir. De la même manière que dans la question précédente, la quantité T mangée par n poules suit une loi

$$T \sim \mathcal{N}(54.75n; 0.9125n)$$

On cherche à déterminer n de manière à avoir

$$P(Y - T > 0) = 0.95$$

Or, Y et T suivent des loi normales indépendantes. Ainsi,

$$Y - T \sim \mathcal{N}(\underbrace{670 - 54.75n}_{\mu}; \underbrace{402, 25 + 0.9125n}_{\sigma^2})$$

Ou encore

$$\frac{Y - T - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0; 1)$$

D'où

$$\begin{aligned} P(Y - T > 0) = 0.95 &\Leftrightarrow P\left(\frac{Y - T - \mu}{\sigma} > \frac{-\mu}{\sigma}\right) = 0.95 \\ &\Leftrightarrow P\left(\frac{Y - T - \mu}{\sigma} < \frac{-\mu}{\sigma}\right) = 0.05 \\ &\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{-\mu}{\sigma}\right) = 0.05 \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\frac{-\mu}{\sigma} = 1.65$$

Ce qui équivaut à l'équation

$$(670 - 54.75n) \simeq -1,65\sqrt{402,25 + 0.9125n} \quad (*)$$

Que l'on passe au carré.

La résolution de l'équation ainsi obtenue nous donne deux solutions approximatives

$$n_1 \simeq 11,63, \quad n_2 \simeq 12,85$$

On réinjecte dans l'équation (*) pour savoir laquelle des deux correspond. Il s'agit de n_1 . On peut donc nourrir au maximum 11,63 poules. Étant donné qu'on ne peut pas couper une poule en morceau pour la faire manger, on trouve donc la solution finale :

$$\boxed{11 \text{ poules}}$$

Exercice 17

On a

$$-2t^2 + 3t - 1 = -\frac{1}{2}(4t^2 - 6t + 2) = -\frac{1}{2}\left(\left(2t - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right)$$

Ainsi,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t^2+3t-1} dt = e^{\frac{1}{8}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(2t - \frac{3}{2}\right)^2} dt$$

et comme

$$\left(2t - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{t - \frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}\right)^2$$

On reconnaît dans l'intégrale l'expression principale d'une densité de loi normale $\mathcal{N}\left(\frac{3}{4}; \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$ Sachant alors que

$$\frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t - \frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}\right)^2} dt = 1$$

On en déduit que

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t^2+3t-1} dt = \frac{e^{\frac{1}{8}}}{2}\sqrt{2\pi}}$$

Exercice 18

1. par linéarité, on a

$$g(x) = E(X^2 - 2xX + x^2) = E(X^2) - 2xE(X) + x^2$$

C'est un polynôme en x , de coefficient dominant 1. Il admet donc un seul et unique minimum donné d'ailleurs par x_0 tel que $g'(x_0) = 0$. Or,

$$g'(x) = 2x - 2E(X)$$

D'où

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = E(X)$$

Ainsi, la fonction est minimale en $x_0 = E(X)$

$$\boxed{x_0 = E(X)}$$

On constate ainsi, au passage, que, comme

$$g(x_0) = E((X - x_0)^2) = E((X - E(X))^2) = V(X)$$

$$\boxed{\text{le minimum de } g \text{ est } V(X)}$$

2. a) Montrons que l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{R} \mid P(X \leq x) \geq \frac{1}{2}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq \frac{1}{2}\}$ est non vide et minoré :

- Montrons que A est non vide :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$. Par définition de la limite, il existe donc forcément au moins un $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$F_X(x_0) \geq \frac{1}{2}$$

(sinon, F_X serait majoré par $\frac{1}{2}$, ce qui n'est pas possible.)

Ainsi, A est non vide car $x_0 \in A$.

- Montrons que A est minoré :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 0$. Par définition de la limite, il existe donc forcément au moins un $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que

$$F_X(x_1) < \frac{1}{2}$$

(sinon, F_X serait minoré par $\frac{1}{2}$, ce qui n'est pas possible.)

Comme F_X est croissante, alors, dès que $F_X(x) \geq \frac{1}{2}$, on doit avoir $x \geq x_1$. Autrement dit, A est minoré par x_1 .

- Conclusion : L'ensemble étant non vide et minoré, l'inf existe.

- b) On a

$$m = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq \frac{1}{2}\}$$

- Montrons que $P(X \leq m) \geq \frac{1}{2}$:

Par définition de m , il existe une suite (m_n) dans A telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} m_n = m$.

Ainsi, comme

$$m_n \geq m \quad \forall n$$

on a d'une part, par continuité de F_X à droite,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_X(m_n) = F_X(m)$$

D'autre part, comme $m_n \in A$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_X(m_n) \geq \frac{1}{2}$$

En passant ainsi à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient

$$F_X(m) \geq \frac{1}{2}$$

C'est-à-dire

$$P(X \leq m) \geq \frac{1}{2}$$

- Montrons que $P(X \geq m) \geq \frac{1}{2}$:

$$P(X \geq m) = 1 - P(X < m) = 1 - \lim_{x \rightarrow m, x < m} F_X(x)$$

Or, $x < m$, donc

$$F_X(x) < \frac{1}{2}$$

Par passage à la limite,

$$\lim_{x \rightarrow m, x < m} F_X(x) \leq \frac{1}{2}$$

D'où

$$P(X \geq m) \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

- c) Si la variable est à densité, alors sa fonction de répartition est continue.
On constate alors que,

$$\frac{1}{2} \leq P(X \geq m) = 1 - P(X < m) = 1 - \lim_{x \rightarrow m, x < m} F_X(x) = 1 - \underbrace{F_X(m)}_{\geq \frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2}$$

On obtient donc très exactement

$$\frac{1}{2} = P(X \geq m) = P(X < m) = P(X \leq m)$$

- d) Prenons par exemple la variable finie X de loi uniforme sur $\{0; 1\}$. N'importe quelle valeur entre 0 et 1 strictement est une médiane.