

Mathématiques – Sujet₁

Problème 1 : CCINP PC 2022

Présentation générale

On rappelle le théorème de la division euclidienne pour les polynômes : si $U \in \mathbb{C}[X]$ et $V \in \mathbb{C}[X]$ sont deux polynômes avec $V \neq 0$, alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{C}[X]^2$ tel que :

$$U = VQ + R \quad \text{avec} \quad (R = 0 \quad \text{ou} \quad \deg(R) < \deg(V)).$$

Les polynômes Q et R sont respectivement appelés le quotient et le reste dans la division euclidienne du polynôme U par V .

Dans cet exercice, on se donne un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un couple $(A, B) \in \mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(B) = n + 1$. On considère également l'application φ définie sur $\mathbb{C}_n[X]$ qui à un polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ associe le reste dans la division euclidienne de AP par B .

Par exemple, si on suppose que l'on a :

$$n = 2, \quad A = X^2, \quad B = X^3 - X, \quad P = X^2 + X + 1,$$

alors, en effectuant la division euclidienne de AP par B , on obtient :

$$AP = X^4 + X^3 + X^2 = BQ + R \quad \text{avec} \quad Q = X + 1 \quad \text{et} \quad R = 2X^2 + X,$$

donc on a $\varphi(P) = 2X^2 + X$.

Partie I - Généralités sur l'application φ

Dans cette partie, on démontre que l'application φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.

Q1. Justifier que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $\varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X]$.

On considère deux polynômes $P_1 \in \mathbb{C}_n[X]$ et $P_2 \in \mathbb{C}_n[X]$. Par le théorème de la division euclidienne rappelé dans la présentation, il existe $(Q_1, R_1) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ et $(Q_2, R_2) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ tels que :

$$AP_1 = BQ_1 + R_1 \quad \text{et} \quad AP_2 = BQ_2 + R_2.$$

Q2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Exprimer le quotient et le reste dans la division euclidienne de $A(P_1 + \lambda P_2)$ par B en fonction de λ et des polynômes Q_1, Q_2, R_1 et R_2 en justifiant votre réponse. En déduire que φ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_n[X]$.

Réponse

Q1. Par définition de $\varphi(P)$ est le reste de la division euclidienne de AP par B .

Donc, $\varphi(P) = 0$ ou $\deg(\varphi(P)) < \deg(B) = n + 1$.

Donc, comme le degré est un entier, on a : $\varphi(P) = 0$ ou $\deg(\varphi(P)) \leq n$.

D'où

$$\varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X].$$

Q2. On a :

$$A(P_1 + \lambda P_2) = AP_1 + \lambda AP_2 = BQ_1 + R_1 + \lambda(BQ_2 + R_2) = B(Q_1 + \lambda Q_2) + R_1 + \lambda R_2.$$

Il reste à montrer que $R_1 + \lambda R_2 = 0$ ou $\deg(R_1 + \lambda R_2) < \deg(B)$.

Cas 1 : $R_1 + \lambda R_2 = 0$. Dans ce cas, il n'y a rien à faire.

Cas 2 : $R_1 + \lambda R_2 \neq 0$. Par définition de division euclidienne, on a $R_1 = 0$ ou $\deg(R_1) < \deg(B)$, et $R_2 = 0$ ou $\deg(R_2) < \deg(B)$.

Dans les deux cas, $\deg(R_1 + \lambda R_2) < \deg(B)$.

Donc,

$R_1 + \lambda R_2$ est le reste dans la division euclidienne de $A(P_1 + \lambda P_2)$ par B .

Par définition, on a :

$$\varphi(P_1 + \lambda P_2) = R_1 + \lambda R_2, \quad \varphi(P_1) = R_1 \quad \text{et} \quad \varphi(P_2) = R_2.$$

Donc,

$$\varphi(P_1 + \lambda P_2) = \varphi(P_1) + \lambda \varphi(P_2).$$

Donc, φ est linéaire. Par **Q1**,

φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.

Partie II - Étude d'un premier exemple

Dans cette partie uniquement, on suppose que :

$$n = 2, \quad A = X^2 + 2X \quad \text{et} \quad B = X^3 + X^2 - X - 1.$$

Q3. Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}_2[X]$ dans la base $(1, X, X^2)$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$

Q4. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice M .

Q5. Justifier que l'endomorphisme φ est diagonalisable. Déterminer une base de $\mathbb{C}_2[X]$ formée de vecteurs propres de φ .

Réponse

Q3. On calcule $\varphi(1)$, $\varphi(X)$ et $\varphi(X^2)$.

Pour cela, on écrit les divisions euclidiennes de $A \times 1 = X^2 + 2X$, $A \times X = X^3 + 2X^2$ et $A \times X^2 = X^4 + 2X^3$ par B .

On trouve :

$$\begin{aligned} A \times 1 &= B \times 0 + X^2 + 2X && \text{avec } \deg(X^2 + 2X) < 3. \\ A \times X &= B \times 1 + X^2 + X + 1 && \text{avec } \deg(X^2 + X + 1) < 3. \\ A \times X^2 &= B \times (X + 1) + 2X + 1 && \text{avec } \deg(2X + 1) < 3. \end{aligned}$$

Donc,

$$\varphi(1) = X^2 + 2, \quad \varphi(X) = X^2 + X + 1 \quad \text{et} \quad \varphi(X^2) = 2X + 1.$$

Ainsi,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Q4. On commence par calculer le polynôme caractéristique de M :

$$\chi_M = \begin{vmatrix} X & -1 & -1 \\ -2 & X-1 & -2 \\ -1 & -1 & X \end{vmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3} \begin{vmatrix} X-3 & X-3 & X-3 \\ -2 & X-1 & -2 \\ -1 & -1 & X \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}} \begin{vmatrix} X-3 & 0 & 0 \\ -1 & X+1 & -1 \\ -1 & 0 & X+1 \end{vmatrix} = (X-3) \begin{vmatrix} X+1 & -1 \\ 0 & X+1 \end{vmatrix} = (X+1)^2(X-3)$$

Donc,

$$\text{Sp}(M) = \{-1, 3\}.$$

$$\text{On a } M + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De plus, $C_2 = 2C_1$ et $C_3 = C_1$.

Donc, $\text{Im}(M + I_3) = \text{Vect}(C_1, C_2, C_3) = \text{Vect}(C_1)$.

Comme $C_1 \neq 0$, $\text{rg}(M + I_3) = 1$ et, par le théorème du rang, $\dim(E_{-1}(M)) = 3 - 1 = 2$.

De plus, on a remarqué que $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_{-1}(M)$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in E_{-1}(M)$.

Ces deux vecteurs sont non colinéaires, donc forment une famille libre de $2 = \dim(E_{-1}(M))$ vecteurs de $E_{-1}(M)$.

Donc, c'est une base et

$$E_{-1}(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

$$\text{On a } M - 3I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

De plus, $C_1 + C_2 + C_3 = 0$.

Donc, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_3(M)$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$.

La valeur propre 3 est simple, donc comme la dimension d'un sous-espace propre est comprise entre 1 et la multiplicité, $\dim(E_3(M)) = 1$.

Donc,

$$E_3(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Q5. On sait que φ est diagonalisable si, et seulement si, sa matrice dans une base est diagonalisable.

Or, M est la matrice de φ dans la base canonique de $(1, X, X^2)$.

Par la question précédente, χ_M est scindé, $\dim(E_{-1}(M)) = m_{-1}$ et $\dim(E_3(M)) = m_3$.

Donc, par théorème, M est diagonalisable.

Ainsi,

φ est diagonalisable.

$$\text{On a } E_{-1}(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right), \text{ donc, } E_{-1}(\varphi) = \text{Vect}(1 - X, 1 - X^2).$$

$$\text{On a } E_3(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \text{ donc, } E_3(\varphi) = \text{Vect}(1 + X + X^2).$$

Comme φ est diagonalisable,

$(1 - X, 1 - X^2, 1 + X + X^2)$ est une base de $\mathbb{C}_2[X]$ formée de vecteurs propres de φ .

Partie III - Étude d'un second exemple

Dans cette partie uniquement, on suppose que $n = 2$ et que $B = X^3$. Comme A est un élément de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_2[X]$, il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que $A = \alpha + \beta X + \gamma X^2$.

Q6. Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}_2[X]$ dans la base $(1, X, X^2)$ est :

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$

Q7. Montrer que l'endomorphisme φ est diagonalisable si et seulement si le polynôme A est constant.

Réponse

Q6. On a :

$$A \times 1 = X^3 \times 0 + \alpha + \beta X + \gamma X^2 \quad \text{avec } \deg(\alpha + \beta X + \gamma X^2) < 3). \quad (.1)$$

$$A \times X = X^3 \times \gamma + \alpha X + \beta X^2 \quad \text{avec } \deg(\alpha X + \beta X^2) < 3). \quad (.2)$$

$$A \times X^2 = X^3 \times (\gamma X + \beta) + \alpha X^2 \quad \text{avec } \deg(\alpha X^2) < 3). \quad (.3)$$

Donc,

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Q7. Rédaction 1 : par double implication.

($\Rightarrow$) On suppose que φ est diagonalisable.

Donc, T est diagonalisable.

Comme T est triangulaire, ses valeurs propres se lisent sur la diagonale, donc, $\text{Sp}(T) = \{\alpha\}$.

Donc, T est semblable à $\alpha \cdot I_3$: il existe P inversible telle que $T = P \times \alpha \cdot I_3 \times P^{-1} = \alpha \cdot I_3$.

Donc, en identifiant les coefficients, $\beta = \gamma = 0$.

Donc, $A = \alpha$ est constant.

($\Leftarrow$) On suppose que A est constant. Donc, $\beta = \gamma = 0$.

Donc, $T = \alpha \cdot I_3$ est diagonale. Donc, T est diagonalisable, donc, φ est diagonalisable.

Rédaction 2 : par équivalence.

On sait que φ est diagonalisable si, et seulement si, T est diagonalisable.

On remarque que T est triangulaire, ses valeurs propres se lisent sur la diagonale, donc, $\text{Sp}(T) = \{\alpha\}$.

Donc,

$$\begin{aligned} T \text{ est diagonalisable} &\iff \exists P \in \text{GL}_3(\mathbb{R}), \exists T = P \times \alpha \cdot I_3 \times P^{-1} \\ &\iff T = \alpha \cdot I_3 \\ &\iff \beta = \gamma = 0 \\ &\iff A \text{ est constant.} \end{aligned}$$

Ainsi,

φ est diagonalisable si et seulement si le polynôme A est constant.

Partie IV - Étude du cas où B est scindé à racines simples

Dans cette partie, on ne suppose plus que $n = 2$: le nombre n est un entier quelconque de $\mathbb{N}^*$. Jusqu'à la fin de l'exercice, on suppose que B est un polynôme scindé à racines simples. On note $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ les racines de B qui sont donc des nombres complexes distincts.

On définit les polynômes de Lagrange $L_0, \dots, L_n \in \mathbb{C}_n[X]$ associés aux points $x_0, \dots, x_n$ par :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad L_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{X - x_i}{x_k - x_i}.$$

En particulier, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\forall (k, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, \quad L_k(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}.$$

IV.1 - Décomposition avec les polynômes de Lagrange

Q8. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Montrer que $x_0, \dots, x_n$ sont des racines du polynôme $D = P - \sum_{i=0}^n P(x_i)L_i$.

Q9. Dédurre de la question précédente que pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $P = \sum_{i=0}^n P(x_i)L_i$.

Q10. Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Réponse

Q8. Soit $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On a :

$$D(x_j) = P(x_j) - \sum_{i=0}^n P(x_i)L_i(x_j).$$

Or, $L_i(x_j) = 0$ si $j \neq i$, et $L_j(x_j) = 1$.

Donc,

$$D(x_j) = P(x_j) - P(x_j) = 0.$$

Donc,

$$x_0, \dots, x_n \text{ sont des racines du polynôme } D = P - \sum_{i=0}^n P(x_i)L_i.$$

Q9. On remarque que $\deg(L_k) \leq n$ et $\deg(P) \leq n$.

Donc, par combinaison linéaire, $\deg(D) \leq n$.

On a trouvé $n + 1$ racines distinctes de D .

Par théorème, $D = 0$ (polynôme nul).

Donc,

$$P = \sum_{i=0}^n P(x_i)L_i.$$

Q10. Par la question précédente, $(L_0, \dots, L_n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{C}_n[X]$ composée de $n + 1 = \dim(\mathbb{C}_n[X])$ vecteurs de $\mathbb{C}_n[X]$.

Par théorème,

$$(L_0, \dots, L_n) \text{ est une base de } \mathbb{C}_n[X].$$

IV.2 - Réduction de l'endomorphisme φ

Pour tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on désigne respectivement par $Q_k \in \mathbb{C}[X]$ et $R_k \in \mathbb{C}_n[X]$ le quotient et le reste dans la division euclidienne de AL_k par B .

Q11. Soit $(j, k) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$. Montrer que $R_k(x_j) = 0$ si $j \neq k$ et que $R_k(x_k) = A(x_k)$.

Q12. En utilisant **Q9**, en déduire pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ que $\varphi(L_k) = A(x_k)L_k$.

Q13. Justifier que l'endomorphisme φ est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

Réponse

Q11. On a :

$$A \times L_k = Q_k \times B + R_k.$$

On évalue en x_j :

$$A(x_j) \times L_k(x_j) = Q_k(x_j) \times B(x_j) + R_k(x_j).$$

Or, $B(x_j) = 0$. De plus, $L_k(x_j) = 0$ si $k \neq j$ et $L_k(x_k) = 1$.

Donc,

$$\text{si } k \neq j, R_k(x_j) = 0; \text{ et } A(x_k) = R_k(x_k).$$

Q12. On sait que $\varphi(L_k) \in \mathbb{C}_n[X]$, donc, par **Q9**, $\varphi(L_k) = R_k = \sum_{i=0}^n R_k(x_i)L_i$.

Par **Q11**,

$$\varphi(L_k) = A(x_k)L_k.$$

Q13. La matrice de φ dans la base $(L_0, \dots, L_n)$ est diagonale avec coefficients diagonaux : $A(x_0), \dots, A(x_n)$.

Donc,

$$\varphi \text{ est diagonalisable et } \text{Sp}(\varphi) = \{A(x_0), \dots, A(x_n)\}.$$