

**Objectifs du chapitre :**

- Définir un vecteur dans l'espace, connaître ses coordonnées et calculer sa norme
- Effectuer les opérations vectorielles : addition, soustraction, produit par un scalaire
- Calculer et interpréter le produit scalaire (angle entre vecteurs, orthogonalité)
- Calculer et interpréter le produit vectoriel (moment d'une force, normale à un plan)
- Maîtriser le produit mixte et son interprétation volumique (coplanarité)
- Écrire les équations paramétriques et cartésiennes de droites et plans dans l'espace
- Appliquer le calcul vectoriel à la statique : résultante de forces, moment, barycentre
- (B1) Comprendre la notion de matrice de rotation comme transformation linéaire

**Situation professionnelle****Équilibre d'un treillis métallique et assemblage bois**

Un bureau d'études structures analyse un treillis métallique de toiture industrielle. Chaque nœud du treillis est soumis à plusieurs forces : poids des pannes, charge de neige, réactions d'appui. Pour vérifier l'équilibre statique du nœud, le technicien doit calculer la **résultante vectorielle** de toutes ces forces ; elle doit être nulle.

Dans le même atelier, un agenceur bois conçoit une charpente à trois pans. Il doit déterminer l'équation du **plan** de chaque versant à partir de trois points de contour, puis calculer l'angle d'about de chaque chevron grâce au **produit scalaire**.

Enfin, un ingénieur en génie civil modélise le moment d'un bras de levier sur un boulon de serrage :  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ . Ce **produit vectoriel** donne l'axe de rotation et l'intensité du moment.

Ces trois situations font appel au **calcul vectoriel dans l'espace**.

# 1. Vecteurs dans l'espace

## 1.1 Définition et représentation

### DÉFINITION — VECTEUR

Un **vecteur**  $\vec{u}$  est un objet mathématique caractérisé par :

- une **direction** (la droite qui le porte),
- un **sens** (l'orientation sur cette droite),
- une **norme** (ou module)  $\|\vec{u}\|$ , nombre réel positif ou nul.

Deux vecteurs sont **égaux** s'ils ont même direction, même sens et même norme.

### DÉFINITION — VECTEUR $\overrightarrow{AB}$

Soient  $A$  et  $B$  deux points de l'espace. Le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est le vecteur de direction  $(AB)$ , de sens de  $A$  vers  $B$ , et de norme  $AB$ .

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$$

## 1.2 Repère orthonormé de l'espace

### DÉFINITION — BASE ORTHONORMÉE ET REPÈRE

Un **repère orthonormé**  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace est formé :

- d'un point origine  $O$ ,
- de trois vecteurs unitaires  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  deux à deux orthogonaux et formant un **trièdre direct**.

Tout vecteur  $\vec{u}$  s'écrit de façon unique :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

On note alors  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  ou  $\vec{u}(x; y; z)$ .

### PROPRIÉTÉ — COORDONNÉES DE $\vec{AB}$

Si  $A(x_A; y_A; z_A)$  et  $B(x_B; y_B; z_B)$ , alors :

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

### 1.3 Norme d'un vecteur

#### DÉFINITION — NORME

La **norme** (ou module) du vecteur  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  est :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

#### EXEMPLE — LONGUEUR D'UNE BARRE DE TREILLIS

Dans un treillis métallique, deux noeuds ont pour coordonnées  $A(1; 2; 0)$  et  $B(4; 6; 3)$  (en mètres).

Le vecteur barre :  $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

Longueur de la barre :  $\|\vec{AB}\| = \sqrt{9 + 16 + 9} = \sqrt{34} \approx 5,83$  m.

## 1.4 Vecteur unitaire

### DÉFINITION — VECTEUR UNITAIRE

Un vecteur est dit **unitaire** (ou normé) si sa norme vaut 1. Le vecteur unitaire de même sens que  $\vec{u} \neq \vec{0}$  est :

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

### EXEMPLE

Pour  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ , on a  $\|\vec{u}\| = 5$ , donc  $\hat{u} = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,8 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Le vecteur unitaire indique la **direction** d'une force sans son intensité.

### MINI-EXERCICE 1

#### Coordonnées et normes

On donne les points  $P(2; -1; 4)$  et  $Q(5; 3; 1)$  dans un repère orthonormé.

- 1) Calculer les coordonnées de  $\overrightarrow{PQ}$ .
- 2) Calculer  $\|\overrightarrow{PQ}\|$ . Donner une valeur exacte puis une valeur approchée au centième.
- 3) Déterminer le vecteur unitaire  $\hat{u}$  de même sens que  $\overrightarrow{PQ}$ .

## 2. Opérations vectorielles

### 2.1 Addition et soustraction

#### PROPRIÉTÉ — ADDITION DE VECTEURS

Si  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ , alors :

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$$

La **relation de Chasles** :  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .

#### EXEMPLE — RÉSULTANTE DE DEUX FORCES

Un noeud d'un treillis est soumis à deux forces :

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ kN} \quad \text{et} \quad \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ kN.}$$

$$\text{Résultante : } \vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ kN.}$$

$$\text{Norme : } \|\vec{R}\| = \sqrt{4 + 9 + 9} = \sqrt{22} \approx 4,69 \text{ kN.}$$

## 2.2 Multiplication par un scalaire

### PROPRIÉTÉ — PRODUIT PAR UN SCALAIRE

Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  :

$$\lambda \vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$$

Si  $\lambda > 0$  : même sens ; si  $\lambda < 0$  : sens opposé ; si  $\lambda = 0$  : vecteur nul.

**Colinéarité** :  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires si et seulement si  $\vec{v} = \lambda \vec{u}$  pour un réel  $\lambda$ .

## 2.3 Combinaison linéaire

### DÉFINITION — COMBINAISON LINÉAIRE

Une **combinaison linéaire** de vecteurs  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$  est un vecteur de la forme :

$$\vec{w} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_n \vec{u}_n \quad (\alpha_i \in \mathbb{R})$$

### PROPRIÉTÉ — COPLANARITÉ PAR COMBINAISON LINÉAIRE

Trois vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  sont **coplanaires** si et seulement si l'un d'eux est combinaison linéaire des deux autres :

$$\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$$

## MINI-EXERCICE 2

### Opérations vectorielles

On donne  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

1) Calculer  $2\vec{a} - \vec{b}$ .

2) Trouver  $\alpha, \beta$  tels que  $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ , ou conclure que c'est impossible.

## 3. Produit scalaire

### 3.1 Définition géométrique

#### DÉFINITION — PRODUIT SCALAIRE (GÉOMÉTRIQUE)

Le **produit scalaire** de deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est le réel :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$$

où  $\theta = (\vec{u}, \vec{v})$  est l'angle entre les deux vecteurs ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ).

#### ATTENTION

Le produit scalaire est un **nombre réel** (scalaire), pas un vecteur. Il peut être positif, nul ou négatif selon l'angle  $\theta$ .

### 3.2 Définition algébrique

#### PROPRIÉTÉ — CALCUL EN COORDONNÉES

Si  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$  dans une base orthonormée :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

### 3.3 Propriétés du produit scalaire

#### PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES

- **Symétrie** :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- **Bilinéarité** :  $(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \cdot \vec{w} = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{w}) + \beta(\vec{v} \cdot \vec{w})$
- **Norme** :  $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$
- **Identité remarquable** :  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

### 3.4 Angle entre deux vecteurs

#### MÉTHODE — CALCULER L'ANGLE ENTRE DEUX VECTEURS

On utilise la formule :

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

$$\text{puis } \theta = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}\right).$$

#### EXEMPLE — ANGLE D'ABOUT D'UN CHEVRON

Un agenceur bois doit tailler l'extrémité d'un chevron porté par  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$  pour qu'il s'appuie sur une sablière portée par  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3.$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{9 + 16 + 1} = \sqrt{26}, \|\vec{v}\| = 1.$$

$$\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{26}} \approx 0,588, \text{ donc } \theta \approx 54,0^\circ.$$

L'angle d'about (coupe) est  $90^\circ - 54^\circ = 36^\circ$ .

### 3.5 Orthogonalité

#### PROPRIÉTÉ — ORTHOGONALITÉ

Deux vecteurs non nuls  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont **orthogonaux** si et seulement si :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Ce qui équivaut à  $\theta = 90^\circ$ .

#### EXEMPLE

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 - 5 + 3 = 0$ . Les vecteurs sont orthogonaux.

### MINI-EXERCICE 3

#### Produit scalaire et angle

Soient  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

- 1) Calculer  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .
- 2) Calculer  $\|\vec{a}\|$  et  $\|\vec{b}\|$ .
- 3) En déduire l'angle  $\theta = (\vec{a}, \vec{b})$  en degrés.

## 4. Produit vectoriel

### 4.1 Définition

#### DÉFINITION — PRODUIT VECTORIEL

Le **produit vectoriel**  $\vec{u} \times \vec{v}$  de deux vecteurs  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$  est le vecteur :

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

### MÉTHODE — DÉVELOPPEMENT PAR COFACTEURS

Pour calculer le produit vectoriel composante par composante :

- Composante  $i$  :  $y_1z_2 - z_1y_2$  (on supprime la 1re colonne)
- Composante  $j$  :  $-(x_1z_2 - z_1x_2) = z_1x_2 - x_1z_2$  (signe moins !)
- Composante  $k$  :  $x_1y_2 - y_1x_2$  (on supprime la 3e colonne)

## 4.2 Propriétés

### PROPRIÉTÉS DU PRODUIT VECTORIEL

- **Anticommutativité** :  $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
- **Bilinéarité** :  $(\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \alpha(\vec{u} \times \vec{v})$
- **Orthogonalité** :  $\vec{u} \times \vec{v}$  est orthogonal à  $\vec{u}$  et à  $\vec{v}$
- **Auto-produit nul** :  $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$
- **Colinéarité** :  $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$  si et seulement si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires

## 4.3 Norme du produit vectoriel — Interprétation géométrique

### PROPRIÉTÉ — NORME ET AIRE

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\sin \theta|$$

où  $\theta$  est l'angle entre  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

**Interprétation** :  $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$  est l'**aire du parallélogramme** construit sur  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . L'aire du triangle  $OAB$  correspondant est  $\frac{1}{2}\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ .

#### 4.4 Règle de la main droite (trièdre direct)

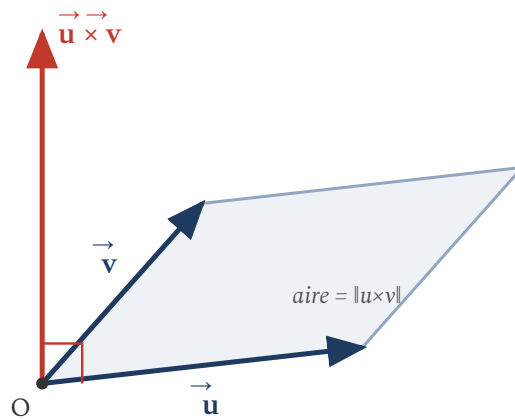
##### MÉTHODE — SENS DU PRODUIT VECTORIEL

Dans un repère orthonormé direct, le sens de  $\vec{u} \times \vec{v}$  se détermine par la **règle de la main droite**

:

- L'index pointe dans la direction de  $\vec{u}$ ,
- Le majeur dans la direction de  $\vec{v}$ ,
- Le pouce indique le sens de  $\vec{u} \times \vec{v}$ .

Formules de base :  $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ ,  $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$ ,  $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$ .



Le produit vectoriel  $\vec{u} \times \vec{v}$  est orthogonal au plan engendré par  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ; sa norme égale l'aire du parallélogramme (gris). Son sens suit la règle de la main droite.

#### 4.5 Application : moment d'une force

##### DÉFINITION — MOMENT D'UNE FORCE

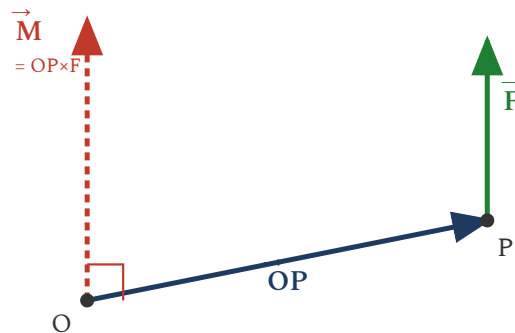
Le **moment** de la force  $\vec{F}$  par rapport à un point  $O$  est le vecteur :

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OP} \times \vec{F}$$

où  $P$  est un point d'application de  $\vec{F}$ .

La norme  $\|\vec{M}_O\| = d \times \|\vec{F}\|$  avec  $d$  = distance de  $O$  à la droite d'action.

L'unité SI est le newton-mètre (N·m).



Moment de la force  $\vec{F}$  (appliquée en  $P$ ) par rapport au point  $O$  :  $\vec{M}_O = \overrightarrow{OP} \times \vec{F}$ , vecteur orthogonal au plan  $(\overrightarrow{OP}, \vec{F})$  porté par l'axe de rotation.

#### EXEMPLE — SERRAGE D'UN BOULON EN GÉNIE CIVIL

Un technicien exerce une force  $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix}$  N à l'extrémité d'une clé de longueur

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m.}$$

$$\vec{M}_O = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot 50 \\ 0 \cdot 0 - 0,25 \cdot 0 \\ 0,25 \cdot 50 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12,5 \end{pmatrix} \text{ N}\cdot\text{m.}$$

Le moment est de 12,5 N·m, axé selon  $\vec{k}$  (sens de serrage).

#### MINI-EXERCICE 4

##### Produit vectoriel et normale à un plan

Un plan est défini par deux vecteurs  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

- 1) Calculer  $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ .
- 2) Vérifier que  $\vec{n}$  est bien orthogonal à  $\vec{u}$  et à  $\vec{v}$ .
- 3) Calculer l'aire du parallélogramme engendré par  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

## 5. Produit mixte

### 5.1 Définition

#### DÉFINITION — PRODUIT MIXTE

Le **produit mixte** de trois vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  est le scalaire :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

En coordonnées, si  $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$ ,  $\vec{w} = (c_1, c_2, c_3)$  :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

### 5.2 Interprétation géométrique

#### PROPRIÉTÉ — VOLUME DU PARALLÉLÉPIPÈDE

La valeur absolue du produit mixte est le **volume du parallélépipède** construit sur  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  :

$$V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$$

Le volume du tétraèdre correspondant est  $V_T = \frac{1}{6}|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$ .

#### PROPRIÉTÉ — COPLANARITÉ

Trois vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  sont **coplanaires** si et seulement si :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$$

### EXEMPLE — VOLUME D'UN ÉLÉMENT DE CHARPENTE

Trois arêtes issues d'un noeud de charpente :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ (en mètres).}$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(3 \cdot 4 - 0 \cdot 1) - 0 + 0 = 24.$$

Volume du parallélépipède :  $V = 24 \text{ m}^3$ . Volume du tétraèdre :  $V_T = 4 \text{ m}^3$ .

### MINI-EXERCICE 5

Coplanarité par produit mixte

Déterminer si les vecteurs  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$  sont coplanaires.

## 6. Droites et plans dans l'espace

### 6.1 Équation paramétrique d'une droite

#### DÉFINITION — DROITE PARAMÉTRIQUE

La droite  $\mathcal{D}$  passant par  $A(x_0, y_0, z_0)$  de vecteur directeur  $\vec{d} = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$  a pour équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

### PROPRIÉTÉ — REPRÉSENTATION CARTÉSIENNE

Si  $l, m, n$  sont tous non nuls :

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

### EXEMPLE — AXE D'UN TUYAU EN GÉNIE CIVIL

Un tuyau passe par  $A(1, 2, 3)$  avec vecteur directeur  $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

$$\text{Équation paramétrique : } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$$

Vérification que  $B(5, 0, 11) \in \mathcal{D}$  :  $x = 5 \Rightarrow t = 2$  ;  $y = 2 - 2 = 0 \checkmark$  ;  $z = 3 + 8 = 11 \checkmark$ .

## 6.2 Équation cartésienne d'un plan

### DÉFINITION — ÉQUATION CARTÉSIENNE D'UN PLAN

Un plan  $\mathcal{P}$  de vecteur normal  $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  passant par  $A(x_0, y_0, z_0)$  a pour équation :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

que l'on réécrit :  $ax + by + cz + d = 0$  avec  $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$ .

#### MÉTHODE — PLAN PASSANT PAR TROIS POINTS

Pour déterminer l'équation du plan  $\mathcal{P}$  passant par trois points non alignés  $A, B, C$  :

1. Former les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ .
2. Calculer le vecteur normal  $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ .
3. Écrire l'équation  $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$ .
4. Vérifier avec les trois points.

#### EXEMPLE — PLAN D'UN VERSANT DE TOITURE

Points du bord d'un versant :  $A(0, 0, 3), B(4, 0, 1), C(4, 6, 1)$ .

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \cdot (-2) - (-2) \cdot 6 \\ (-2) \cdot 4 - 4 \cdot (-2) \\ 4 \cdot 6 - 0 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Équation :  $1(x - 0) + 0(y - 0) + 2(z - 3) = 0$ , soit  $x + 2z = 6$ .

### 6.3 Intersection droite/plan

#### MÉTHODE — INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

1. Substituer les expressions paramétriques  $x(t), y(t), z(t)$  dans l'équation cartésienne du plan.
2. Résoudre en  $t$ .
3. Injecter la valeur de  $t$  dans les équations paramétriques pour obtenir le point.

### EXEMPLE

Droite :  $x = 1 + 2t$ ,  $y = 2 - t$ ,  $z = 3 + 4t$ . Plan :  $x + 2z = 6$ .

Substitution :  $(1 + 2t) + 2(3 + 4t) = 6 \Rightarrow 7 + 10t = 6 \Rightarrow t = -0,1$ .

Intersection :  $I(0,8 ; 2,1 ; 2,6)$ .

### MINI-EXERCICE 6

#### Équation d'un plan en agencement bois

Un agenceur bois identifie trois coins d'un panneau oblique :  $A(1, 0, 2)$ ,  $B(3, 1, 0)$ ,  $C(0, 2, 1)$ .

Trouver l'équation cartésienne du plan contenant ce panneau.

## 7. Applications mécaniques

### 7.1 Résultante de forces

#### DÉFINITION — RÉSULTANTE

La **résultante** d'un système de forces  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  est la somme vectorielle :

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

Le système est en **équilibre statique** si et seulement si  $\vec{R} = \vec{0}$ .

### EXEMPLE — NOEUD D'UN TREILLIS MÉTALLIQUE

Un noeud est soumis à trois forces (en kN) :

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} 5 - 2 - 3 \\ 0 + 4 - 4 \\ -3 + 1 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Le noeud est en équilibre.}$$

## 7.2 Moment résultant

### PROPRIÉTÉ — MOMENT RÉSULTANT

Le moment résultant en un point  $O$  d'un système de forces est :

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{OP_i} \times \vec{F}_i$$

L'équilibre d'un solide requiert simultanément  $\vec{R} = \vec{0}$  et  $\vec{M}_O = \vec{0}$ .

## 7.3 Barycentre (centre de gravité)

### DÉFINITION — BARYCENTRE

Le **barycentre** de  $n$  points  $A_i$  affectés de coefficients (masses ou charges)  $\lambda_i > 0$  est le point  $G$  vérifiant :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$$

Ses coordonnées :

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_{A_i}}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}, \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i y_{A_i}}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}, \quad z_G = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i z_{A_i}}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$$

### EXEMPLE — CENTRE DE GRAVITÉ D'UNE FERME DE CHARPENTE

Trois noeuds chargés :

$$A(0, 0, 0) : \lambda_A = 10 \text{ kN} ; B(6, 0, 0) : \lambda_B = 15 \text{ kN} ; C(3, 0, 4) : \lambda_C = 5 \text{ kN}.$$

$$\Sigma \lambda_i = 30 \text{ kN}.$$

$$x_G = \frac{0 + 90 + 15}{30} = 3,5 \text{ m} ; y_G = 0 \text{ m} ; z_G = \frac{0 + 0 + 20}{30} \approx 0,67 \text{ m}.$$

Centre de gravité :  $G(3,5 ; 0 ; 0,67)$ .

### MINI-EXERCICE 7

#### Équilibre d'un noeud de treillis

Un noeud est soumis à quatre forces (kN). Trois sont connues :

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer  $\vec{F}_4$  pour que le noeud soit en équilibre, et calculer  $\|\vec{F}_4\|$ .

## 8. Matrices de rotation (groupement B1)

### 8.1 Transformation linéaire

#### DÉFINITION — APPLICATION LINÉAIRE

Une application  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  est **linéaire** si pour tous vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  et tout scalaire  $\lambda$  :

$$f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \quad \text{et} \quad f(\lambda \vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$$

Dans une base fixée, toute transformation linéaire est représentée par une **matrice**  $3 \times 3$ .

### DÉFINITION — MATRICE DE ROTATION

Une **matrice de rotation**  $R$  est une matrice  $3 \times 3$  orthogonale directe :

$$R^\top R = I_3 \quad \text{et} \quad \det(R) = +1$$

Elle conserve les normes (distances) et les orientations.

## 8.2 Rotations autour des axes de coordonnées

### PROPRIÉTÉ — MATRICES DE ROTATION ÉLÉMENTAIRES

Rotation d'angle  $\theta$  autour de l'axe  $Oz$  :

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation d'angle  $\theta$  autour de l'axe  $Ox$  :

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Rotation d'angle  $\theta$  autour de l'axe  $Oy$  :

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

## 8.3 Application d'une rotation

### MÉTHODE — IMAGE D'UN VECTEUR PAR ROTATION

Pour calculer l'image  $\vec{v} = R\vec{u}$  :

$$\vec{v} = R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On effectue le produit matrice–vecteur (chaque composante est le produit scalaire d'une ligne de  $R$  par  $\vec{u}$ ).

#### EXEMPLE — BRAS ROBOTIQUE CNC

Un bras robotique de découpe CNC pivote de  $90^\circ$  autour de l'axe  $Oz$ . Vecteur outil

$$\text{initial : } \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$R_z(90^\circ) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = R_z(90^\circ) \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Après rotation de  $90^\circ$  autour de  $Oz$ , l'axe  $\vec{x}$  devient l'axe  $\vec{y}$ . Norme conservée :

$$\|\vec{v}\| = 1 = \|\vec{u}\| \checkmark.$$

### 8.4 Composition de rotations

#### PROPRIÉTÉ — COMPOSITION

La composée de deux rotations  $R_1$  puis  $R_2$  est :

$$R = R_2 \cdot R_1$$

Le produit de deux matrices de rotation est encore une matrice de rotation.

#### ATTENTION — NON-COMMUTATIVITÉ

En général  $R_2 R_1 \neq R_1 R_2$ . L'ordre des rotations successives autour d'axes différents est important.

## MINI-EXERCICE 8

### Rotation d'un vecteur

Soit  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Calculer l'image de  $\vec{u}$  par la rotation  $R_z(45^\circ)$ .

Rappel :  $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$ .

## Synthèse du chapitre

### À retenir — Calcul vectoriel dans l'espace

Objet	Formule clé	Type de résultat
Norme	$\ \vec{u}\  = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	Scalaire $\geq 0$
Produit scalaire	$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$	Scalaire
Angle	$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\ \vec{u}\ \ \vec{v}\ }$	$\theta \in [0; \pi]$
Produit vectoriel	$\vec{u} \times \vec{v} = (y_1z_2 - z_1y_2, z_1x_2 - x_1z_2, x_1y_2 - y_1x_2)$	Vecteur $\perp \vec{u}$ et $\vec{v}$
Produit mixte	$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$	Scalaire ; 0 si coplanaires
Moment d'une force	$\vec{M}_O = \overrightarrow{OP} \times \vec{F}$	Vecteur (N·m)
Plan (vecteur normal)	$ax + by + cz + d = 0, \vec{n} = (a, b, c)$	Équation scalaire
Rotation (axe Oz)	$R_z(\theta)$ matrice $3 \times 3, R^T R = I_3$	Conserve les normes

### EXERCICE BILAN

#### Treillis métallique de toiture industrielle

Un bureau d'études analyse le noeud  $N$  d'un treillis métallique. Les coordonnées sont en mètres dans un repère orthonormé.

Trois barres convergent en  $N(2; 1; 3)$ ; leurs autres extrémités sont :

- $A(5; 1; 3)$  — barre horizontale selon  $\vec{x}$
- $B(2; 4; 3)$  — barre verticale selon  $\vec{y}$
- $C(2; 1; 7)$  — barre montante selon  $\vec{z}$

Les efforts dans les barres sont :  $F_A = 12$  kN (traction),  $F_B = 8$  kN (compression),  $F_C = 6$  kN (traction).

#### Partie 1 — Vecteurs directeurs unitaires

- 1) Calculer  $\overrightarrow{NA}$ ,  $\overrightarrow{NB}$ ,  $\overrightarrow{NC}$  et leurs normes.
- 2) Déterminer les vecteurs unitaires  $\hat{u}_A$ ,  $\hat{u}_B$ ,  $\hat{u}_C$ .

#### Partie 2 — Résultante des forces

- 3) En traction, la force est orientée de  $N$  vers l'extrémité; en compression, de l'extrémité vers  $N$ . Exprimer  $\vec{F}_A$ ,  $\vec{F}_B$ ,  $\vec{F}_C$ .
- 4) Calculer la résultante  $\vec{R}$  et sa norme. Conclure sur l'équilibre.

#### Partie 3 — Orthogonalité et angles

- 5) Montrer que les barres  $NA$ ,  $NB$ ,  $NC$  sont deux à deux orthogonales.
- 6) Calculer l'angle entre la résultante  $\vec{R}$  et la barre  $NA$ .

#### Partie 4 — Plan du treillis (B1)

- 7) Déterminer l'équation cartésienne du plan  $\mathcal{P}$  contenant  $N$ ,  $A$  et  $B$ .

8) Le point  $C$  appartient-il à  $\mathcal{P}$ ? Interpréter.

---

## Calcul vectoriel

BTS | Mathématiques | Durée : 40 min | /20

Nom : \_\_\_\_\_ Prénom : \_\_\_\_\_ Date : \_\_\_\_\_

Repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Toutes les coordonnées sont données dans ce repère.

### Exercice 1 — Vecteur, norme, vecteur unitaire (4 pts)

On donne les points  $A(1, 2, 2)$  et  $B(3, 6, 5)$  (en mètres), nœuds d'un treillis.

- Calculer les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AB}$ . (1 pt)
- Calculer la norme  $\|\overrightarrow{AB}\|$  (valeur exacte puis approchée au centième). (1,5 pt)
- Déterminer le vecteur unitaire  $\hat{u}$  de même sens que  $\overrightarrow{AB}$ . (1,5 pt)

### Exercice 2 — Produit scalaire et angle (4 pts)

Soient  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

- Calculer le produit scalaire  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ . (1 pt)
- Calculer  $\|\vec{u}\|$  et  $\|\vec{v}\|$ . (1,5 pt)
- En déduire l'angle  $\theta = (\vec{u}, \vec{v})$  en degrés (arrondi au dixième). (1,5 pt)

### Exercice 3 — Produit vectoriel et moment d'une force (4 pts)

Un technicien exerce une force  $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 80 \\ 0 \end{pmatrix}$  N à l'extrémité d'une clé représentée par

$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  m.

- Calculer le moment  $\vec{M}_O = \overrightarrow{OP} \times \vec{F}$ . (2,5 pts)
- Donner la norme du moment et préciser son axe. (1,5 pt)

#### Exercice 4 — Produit mixte et coplanarité (4 pts)

Trois arêtes issues d'un nœud de charpente :  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$  (en mètres).

- Calculer le produit mixte  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ . (2 pts)
- En déduire le volume du parallélépipède puis du tétraèdre construits sur ces vecteurs. (1,5 pt)
- Les trois vecteurs sont-ils coplanaires ? Justifier. (0,5 pt)

#### Exercice 5 — Équilibre d'un nœud et barycentre (4 pts)

Partie A. Un nœud de treillis est soumis à trois forces connues (kN) :  $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,

$$\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- Déterminer la force  $\vec{F}_4$  qui assure l'équilibre du nœud, puis calculer  $\|\vec{F}_4\|$ . (2,5 pts)

Partie B. Deux nœuds chargés :  $A(0, 0, 0)$  avec  $\lambda_A = 20$  kN et  $B(6, 0, 0)$  avec  $\lambda_B = 4$  kN.

- Déterminer l'abscisse  $x_G$  du barycentre  $G$ . (1,5 pt)
-