

Couples de variables aléatoires réelles discrètes Chapitre 9

Corrections exercices types

Exercice 1. 9-1 Loi du couple, loi marginale

On lance indéfiniment une pièce donnant "pile" avec la probabilité p et "face" avec la probabilité $q = 1 - p$ ($0 < p < 1$).

On note $\forall k \in \mathbb{N}^*$, les événements : P_k : (resp. F_k) "la pièce donne pile au k ème tirage" (resp. "la pièce donne face au k ème tirage").

On note X le temps d'attente du premier "pile" et Y le temps d'attente du deuxième "pile". Donnons la loi du couple (X, Y) puis la loi de Y .

On note X la var égale au rang d'apparition du premier "Pile" et Y la var qui donne le rang d'apparition du deuxième "Pile".

On a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $Y(\Omega) = [2, +\infty[$, X représente le temps d'attente du premier pile dans une répétition infinies d'événements identiques et indépendantes de Bernoulli de paramètre p . Donc X suit une loi géométrique de paramètre p .

Déterminons la loi conjointe du couple (X, Y) .

Or $[X = k \cap Y = i]$ n'est possible que si $i > k$ et si $i > 2$, $[X = k \cap Y = i] = \bigcap_{j=1}^{k-1} F_j \cap P_k \bigcap_{j=k+1}^{i-1} F_j \cap P_i$.

D'où par indépendance des événements :

Si $i > k$, $P([X = k \cap Y = i]) = q^{k-1} p q^{i-1-(k+1)+1} p = p^2 q^{i-2}$.

Ainsi : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall i \in [2, +\infty[$, $P([X \cap Y = i]) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq k \\ p^2 q^{i-2} & \text{si } i > k(*) \end{cases}$.

On en déduit la loi de Y (la loi marginale).

La loi de Y s'obtient à l'aide de la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{(X = k), k \in X(\Omega)\}$:

pour tout $i \in [2, +\infty[$, et d'après (*) :

$$P(Y = i) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} P((X = k) \cap (Y = i)) = \sum_{k=1}^{i-1} p^2 q^{i-2} = (i-1) p^2 q^{i-2}.$$

Exercice 2. 9-2

Soit la var $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ et la var Y définie sur le même espace probabilisé que X vérifiant : sachant que $\forall k \in \mathbb{N}$, $(X = k)$ est réalisé, la loi de $Y_{[X=k]}$ est alors la loi $\mathcal{B}(k, p)$, avec $0 < p < 1$.

Donnons la loi de Y .

$\forall k \in \mathbb{N}$, $(X = k)$ est réalisé alors Y prend toutes les valeurs comprises entre 0 et k d'où $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

Sachant que $\forall k \in \mathbb{N}$, $(X = k)$ est réalisé, la loi de $Y_{[X=k]}$ est alors la loi $\mathcal{B}(k, p)$, avec $0 < p < 1$ d'où :

$$P_{(X=k)}(Y = i) = \begin{cases} \binom{k}{i} p^i q^{k-i} & \text{si } 0 \leq i \leq k \\ 0 & \text{si } k < i \end{cases}.$$

Loi de Y

On utilise alors le SCE $(X = k)_{k \in \mathbb{N}}$, et la FPT :

$$\begin{aligned} \forall i \in \mathbb{N}, P(Y = i) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) P_{(X=k)}(Y = i) \\ &= \sum_{k=0}^{i-1} P(X = k) \times 0 + \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \text{ car } X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda), Y_{[X=k]} \hookrightarrow \mathcal{B}(k, p) \\ &= \frac{p^i e^{-\lambda}}{i!} \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \times \frac{k!}{(k-i)!} q^{k-i} \\ &= \frac{(\lambda p)^i e^{-\lambda}}{i!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k q^k}{k!} \text{ car on a échangé } k \leftrightarrow k-i \\ &= \frac{(\lambda p)^i e^{\lambda(q-1)}}{i!} \text{ car on a reconnu une série exp cv} \\ &= \frac{(\lambda p)^i e^{-\lambda p}}{i!} \text{ car } q-1 = p \end{aligned}$$

Par conséquent : $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p)$

Exercice 3. 9-3 Stabilité de la loi de Poisson

Faire la preuve de la stabilité de la loi de Poisson.

On a $X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1)$, $X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_2)$, X_1 et X_2 indépendantes alors :

$(X_1 + X_2)(\Omega) = \mathbb{N}$.

On a d'après le cours, en utilisant le SCE ($X_1 = i$) $_{i \in \mathbb{N}}$ et la FPT, la loi de la somme donnée par :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, P(X_1 + X_2 = k) &= \sum_{i \in \mathbb{N}, k-i \in \mathbb{N}} P(X_1 = i \cap X_2 = k-i) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}, k-i \in \mathbb{N}} P(X_1 = i) \times P(X_2 = k-i) \text{ car } X_1, X_2 \text{ indépendantes} \\ &= \sum_{i=0}^k P(X_1 = i) \times P(X_2 = k-i) \text{ car } i \geq 0, k \geq i \\ &= \sum_{i=0}^k \frac{\lambda_1^i e^{-\lambda_1}}{i!} \times \frac{\lambda_2^{k-i} e^{-\lambda_2}}{(k-i)!} \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{k!} \sum_{i=0}^k \frac{\lambda_1^i \lambda_2^{k-i} k!}{i!(k-i)!} \text{ car on veut faire apparaître la formule du binôme} \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \lambda_1^i \lambda_2^{k-i} \\ &= \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^k e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{k!} \text{ par la formule du binôme} \end{aligned}$$

Par conséquent : $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$

Exercice 4. 9-4 Loi du max

On tire au hasard deux boules, avec remise de la boule tirée, d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n ($n \geq 1$).

On note X la var égale au numéro de la première boule, Y la var égale au numéro de la deuxième boule tirée.

On pose $Z = \max(X, Y)$. Donnons la loi de Z .

Tout d'abord :

$X(\Omega) = Y(\Omega) = [1, n]$ d'où $Z(\Omega) = [1, n]$.

$\forall \omega \in \Omega, Z(\omega) = \max(X(\omega), Y(\omega))$.

Dire que le plus grand des numéros obtenus, $Z(\omega)$ est inférieur à k est équivalent à dire que les 2 numéros $X(\omega)$ et $Y(\omega)$ sont inférieurs à k , par conséquent :

$\forall k \in [1, n], [Z \leq k] = [X \leq k] \cap [Y \leq k]$.

Ainsi $\forall k \in [1, n]$:

$$\begin{aligned} P([Z \leq k]) &= P([X \leq k] \cap [Y \leq k]) \\ &= P([X \leq k]) \times P([Y \leq k]) \text{ par indépendances des variables } X, Y \\ &= \left(\frac{k}{n}\right)^2 \text{ par équiprobabilités} \end{aligned}$$

Or, $[Z = k] \cup [Z \leq k-1] = [Z \leq k]$ donc par incompatibilité des événements :

$$\forall k \in [1, n], P([Z = k]) = P([Z \leq k]) - P([Z \leq k-1]) = \frac{k^2}{n^2} - \frac{(k-1)^2}{n^2} = \frac{2k-1}{n^2}.$$

Exercice 5. 9-5 Loi du min

On tire au hasard deux boules, avec remise de la boule tirée, d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n ($n \geq 1$).

On note X la var égale au numéro de la première boule, Y la var égale au numéro de la deuxième boule tirée.

On pose $T = \min(X, Y)$. Donnons la loi de T .

Tout d'abord :

$X(\Omega) = Y(\Omega) = [1, n]$ d'où $T(\Omega) = [1, n]$.

$\forall \omega \in \Omega, T(\omega) = \min(X(\omega), Y(\omega))$.

Dire que le plus petit des numéros obtenus, $T(\omega)$ est strictement supérieur à k est équivalent à dire que les 2 numéros $X(\omega)$ et $Y(\omega)$ sont strictement supérieurs à k , par conséquent :

$\forall k \in [1, n], [T > k] = [X > k] \cap [Y > k]$.

Ainsi $\forall k \in [1, n]$:

$$\begin{aligned} P([T > k]) &= P([X > k] \cap [Y > k]) \\ &= P([X > k]) \times P([Y > k]) \text{ par indépendances des variables } X, Y \\ &= (1 - P([X \leq k])) \times (1 - P([Y \leq k])) \\ &= \left(\frac{n-k}{n}\right)^2 \end{aligned}$$

Or, $[T = k] \cup [T > k] = [T > k - 1]$ donc par incompatibilité des événements :
 $\forall k \in [1, n], P([T = k]) = P([T > k - 1]) - P([T > k]) = \frac{(n-k+1)^2}{n^2} - \frac{(n-k)^2}{n^2} = \frac{2n-2k+1}{n^2}$.

Exercice 6. 9-6

On choisit au hasard une permutation f de l'ensemble $[1, n]$ avec $n \geq 2$.
 (rappel : le nombre de permutation de $[1, n]$ est égal à $n!$).

$\forall i \in [1, n]$, on note B_i la variable de Bernoulli qui vaut 1 si le nombre i est égal à son image par la permutation f choisie et qui vaut 0 sinon.

Montrons que $E(B_i) = 1/n$ et que $\forall (i, j) \in [1, n]^2, i \neq j, E(B_i B_j) = \frac{1}{n(n-1)}$.

B_i est une variable de Bernoulli donc $B_i(\Omega) = \{0, 1\}$.

Et on sait d'après le cours que $E(B_i) = P(B_i = 1)$. Déterminons alors $P(B_i = 1) = \frac{\text{nombre de cas favorable}}{\text{nombre de cas possible}}$

Or, il y a équiprobabilité du choix de la permutation, l'usage du i est déterminée d'une unique façon ($f(i) = i$), et il reste à choisir les images des $(n-1)$ autres éléments de $[1, n]$ ie $(n-1)!$ permutations.

Le cardinal de l'univers étant égale à $n!$.

D'où $P(B_i = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$.

Puis $\forall (i, j) \in [1, n]^2, i \neq j, E(B_i B_j) = P([B_i = 1] \cap [B_j = 1])$ car variables de Bernoulli.

Donc $\forall (i, j) \in [1, n]^2, i \neq j, E(B_i B_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$.

Puis $Cov(B_i, B_j) = E(B_i B_j) - E(B_i)E(B_j) = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2(n-1)}$.

Exercice 7. 9-7

On reprend l'exo 6, calculons la variance de $B_i + B_j$.

On a d'après le cours, (comme B_i et B_j sont des variables de Bernoulli de paramètres $(\frac{1}{n})$) que $V(B_i) = V(B_j) = \frac{1}{n}(1 - \frac{1}{n}) = \frac{n-1}{n^2}$.

Ainsi d'après la formule de la variance d'une somme :

$V(B_i + B_j) = V(B_i) + V(B_j) + 2Cov(B_i, B_j) = \frac{2(n-1)}{n^2} + \frac{2}{n^2(n-1)} = \frac{2(n^2-2n+2)}{n^2(n-1)}$.

Exercice 8. 9-8

On lance n fois une pièce donnant "pile" avec la probabilité p et "face" avec la probabilité $q = 1 - p$ ($0 < p < 1$).

On note X la var égale au nombre de "piles" obtenus et Y la var égale au nombre de "faces" obtenus au cours de ces n lancers. Donnons $Cov(X, Y)$.

On a d'après l'énoncé que :

$X(\Omega) = Y(\Omega) = [0, n]$ et $X + Y = n$ ou encore $Y = n - X$.

X (resp. et Y) sont des compteurs de succès "avoir pile" (resp. "ou face") dans la répétitions de n épreuves identiques et indépendantes de Bernoulli de paramètres de succès p (resp. q).

D'où $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, q)$.

Ainsi, $V(X) = V(Y) = npq$.

De plus $X + Y$ est une variable certaine (ou constante) donc $V(X + Y) = 0$, par conséquent :

$Cov(X, Y) = \frac{V(X+Y) - V(X) - V(Y)}{2} = \frac{-2npq}{2} = -npq$.

Exercice 9. 9-9

On effectue deux tirages d'une boule, avec remise de la boule tirée avant de procéder au tirage suivant, dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n (où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2). On note X et Y les numéros des deux boules tirées.

Déterminons $V(X + Y)$.

On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = [1, n]$ et $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1, n])$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([1, n])$ avec X et Y indépendantes car remise de la boule tirée.

Donc $V(X + Y) = V(X) + V(Y) = \frac{2(n^2-1)}{12} = \frac{(n^2-1)}{6}$.

Exercice 10. 9-10

On reprend l'exo 6, calculons le coefficient de corrélation linéaire.

On a $\rho(B_i, B_j) = \frac{Cov(B_i, B_j)}{\sqrt{V(B_i)V(B_j)}} = \frac{\frac{1}{n^2(n-1)}}{\sqrt{\frac{(n-1)}{n^4}}} = \frac{1}{(n-1)^2}$.

Exercice 11. 9-11

On reprend l'exo 8. Calculons $\rho(X, Y)$.

On a $X + Y = n$ donc $Y = -X + n$ ($a = -1 < 0$) donc d'après le cours : $\rho(X, Y) = -1$.

Exercice 12. 9-12

On reprend l'exo 9. Calculons $\rho(X, Y)$.

X et Y sont indépendantes donc $\rho(X, Y) = 0$.

Exercice 13. 9-13 **Loi du max, loi du min suite de var**

On tire au hasard et successivement n boules ($n \geq 2$), avec remise après chaque tirage de la boule tirée, dans une urne contenant m boules numérotées de 1 à m (avec $m \geq 1$).

Pour tout entier naturel $i \in [1, n]$, on note X_i la var égale au numéro de la boule tirée au i -ème tirage. On pose $S_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et $I_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Montrons que $\forall k \in [1, m]$, on a : $(S_n \leq k) = \bigcap_{i=1}^n (X_i \leq k)$ et $(I_n > k) = \bigcap_{i=1}^n (X_i > k)$.

Pour tout entier naturel $i \in [1, m]$, $X_i(\Omega) = [1, m]$ donc $S_n(\Omega) = I_n(\Omega) = [1, m]$.

$\forall \omega \in \Omega$, dire que le plus grand numéro de la boule tirée au cours des n tirages, $S_n(\omega)$ est inférieur ou égal à k est équivalent à dire que les n numéros $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)$ sont tous inférieurs ou égaux à k , par conséquent :

$$\forall k \in [1, m], [S_n \leq k] = \bigcap_{i=1}^n ([X_i \leq k]).$$

De même on a :

$\forall \omega \in \Omega$, dire que le plus petit numéro de la boule tirée au cours des n tirages, $I_n(\omega)$ est strictement supérieur à k est équivalent à dire que les n numéros $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)$ sont tous strictement supérieurs à k , par conséquent :

$$\forall k \in [1, m], [I_n > k] = \bigcap_{i=1}^n ([X_i > k]).$$

Loi de S_n et I_n .

Le tirage étant avec remise, pour tout entier naturel $i \in [1, n]$, les X_i sont mutuellement indépendantes et $X_i \hookrightarrow \mathcal{U}([1, m])$.

$$\text{Ainsi : } \forall k \in [1, m], P([S_n \leq k]) = \prod_{i=1}^n P([X_i \leq k]) \text{ et } P([I_n > k]) = \prod_{i=1}^n P([X_i > k]).$$

Et, pour tout entier naturel $i \in [1, n]$, $\forall k \in [1, m]$, $P(X_i \leq k) = \frac{k}{m}$ par équiprobabilité d'où :

$$\forall k \in [1, m], P([S_n \leq k]) = \left(\frac{k}{m}\right)^n \text{ et } \forall k \in [1, m], P([I_n > k]) = \left(1 - \frac{k}{m}\right)^n.$$

On a de plus que :

$[S_n = k] \cup [S_n \leq k-1] = [S_n \leq k]$ donc par incompatibilité des événements :

$$\forall k \in [1, m], P([S_n = k]) = P([S_n \leq k]) - P([S_n \leq k-1]) = \left(\frac{k}{m}\right)^n - \left(\frac{k-1}{m}\right)^n.$$

$[I_n = k] \cup [I_n > k] = [I_n > k-1]$ donc par incompatibilité des événements :

$$\forall k \in [1, m], P([I_n = k]) = P([I_n > k-1]) - P([I_n > k]) = \left(1 - \frac{k-1}{m}\right)^n - \left(1 - \frac{k}{m}\right)^n.$$

Exercice 14. 9-14

Soit une suite de var $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, indépendantes dont la loi commune est donnée,

$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X_n = 1) = 1/3, P(X_n = 2) = 2/3$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$, donnons la loi de S_n .

On a d'après l'énoncé : $\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n(\Omega) = \{1, 2\}$.

Posons $\forall k \in \mathbb{N}^*, Y_k = X_k - 1$ alors $Y_k(\Omega) = \{0, 1\}$, d'où les variables Y_k suivent une loi de Bernoulli de paramètre $2/3$, car : $P(Y_k = 1) = P(X_k = 2) = 2/3$ et $P(Y_k = 0) = P(X_k = 1) = 1/3$.

Les variables $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant indépendantes, les variables $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ aussi par lemme des coalitions.

On sait donc d'après le cours que $\sum_{k=1}^n Y_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 2/3)$.

On a de plus : $\sum_{k=1}^n Y_k = \sum_{k=1}^n (X_k - 1) = \sum_{k=1}^n X_k - \sum_{k=1}^n 1 = S_n - n$, donc $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k + n$ et $S_n(\Omega) = [n, 2n]$.

$$\forall i \in [n, 2n], P(S_n = i) = P\left(\sum_{k=1}^n Y_k + n = i\right) = P\left(\sum_{k=1}^n Y_k = i - n\right).$$

Par conséquent :

$$\forall i \in [n, 2n], P(S_n = i) = \binom{n}{i-n} \left(\frac{2}{3}\right)^{i-n} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n-i}$$

Exercice 15. 9-15 On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de var, mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi géométrique de paramètre p (avec $0 < p < 1$).

1. Pour tout entier naturel non nul n , on pose $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$.

Pour tout $i \in [1, n]$, on a $X_i(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc $S_n(\Omega) = [n, +\infty[$.

En admettant la formule (*) $\sum_{k=m_1}^{m_2} \binom{k}{m_1} = \binom{m_2+1}{m_1+1}$ avec $m_1 \leq m_2$, montrons par récurrence sur n que la loi de

S_n est donnée par : $\forall k \in [n, +\infty[, P(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$.

Initialisation : pour $n = 1$, on a pour tout entier k de $\mathbb{N}^*$, $P(S_1 = k) = P(X_1 = k) = pq^{k-1}$.

Mais on a aussi $\binom{k-1}{0} p^1 (1-p)^{k-1} = pq^{k-1}$.

Donc l'initialisation est vérifiée.

Hérédité : supposons pour n entier naturel non nul fixé que $\forall k \in [n, +\infty[$,

$P(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$.

On remarque que $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ et $S_n(\Omega) = [n, +\infty[$.

Ainsi on a $\forall k \in [n+1, +\infty[, P(S_{n+1} = k) = P(S_n + X_{n+1} = k)$.

On utilise alors le SCE ($S_n = j$) $j \in [n, +\infty[$ et la FPT pour obtenir la loi de la somme :

$\forall k \in [n+1, +\infty[$,

$$\begin{aligned} P(S_{n+1} = k) &= P(S_n + X_{n+1} = i) \\ &= \sum_{j \in [n, +\infty[, k \in \mathbb{N}^*, j+i=k} P(S_n = j \cap X_{n+1} = i) \\ &= \sum_{j=n}^{k-1} P(S_n = j \cap X_{n+1} = k-j) \text{ car } k-j \geq 1 \Leftrightarrow j \leq k-1 \\ &= \sum_{j=n}^{k-1} P(S_n = j) P(X_{n+1} = k-j) \text{ par lemme des coalitions, indépendances de } S_n, X_{n+1} \\ &= \sum_{j=n}^{k-1} \binom{j-1}{n-1} p^n (1-p)^{j-n} pq^{k-j-1} \text{ par HR et } X_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \\ &= p^{n+1} q^{k-n-1} \sum_{j=n}^{k-1} \binom{j-1}{n-1} \\ &= p^{n+1} q^{k-n-1} \sum_{j=n-1}^{k-2} \binom{j}{n-1} \text{ par changement } j \leftrightarrow j-1 \\ &= \binom{k-1}{n} p^{n+1} q^{k-n-1} \text{ car on utilise le résultat admis (*)} \end{aligned}$$

L'hérédité est vérifiée.

Conclusion : Pour tout entier naturel non nul n , $\forall k \in [n, +\infty[, P(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$.

2. On se propose de retrouver directement la loi de S_n . On considère alors que, lors d'une suite infinie d'épreuves indépendantes donnant un succès avec la probabilité p , la var X_1 peut être considérée comme le rang d'apparition du premier succès et, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, chaque var X_k peut être considérée comme le rang d'apparition du k^e succès à partir du $(k-1)^e$ succès.

Pour tout entier naturel k non nul, on désignera par N_k la var égale au nombre de succès obtenu lors des k premières épreuves.

(a) La var S_n représente alors le rang d'apparition du n^e succès.

(b) Pour tout k de $S_n(\Omega)$, on a donc $[S_n = k] = [N_{k-1} = n-1 \cap A_k]$.

Car l'événement $[S_n = k]$ est réalisé si et seulement si on a effectué k épreuves pour obtenir enfin le n^e succès. Par conséquent, après $(k-1)$ épreuves, on avait $n-1$ succès et à la k^e épreuve on a eu le n^e succès.

(c) D'après la question précédente, on a :

$\forall k \geq n$,

$$\begin{aligned} P([S_n = k]) &= P([N_{k-1} = n-1 \cap A_k]) \\ &= P([N_{k-1} = n-1]) P(A_k) \text{ par indépendances des épreuves} \\ &= \binom{k-1}{n-1} p^{n-1} q^{k-1-(n-1)} p \text{ car } N_k \hookrightarrow \mathcal{B}(k-1, p), P(A_k) = p \\ &= \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n} \end{aligned}$$