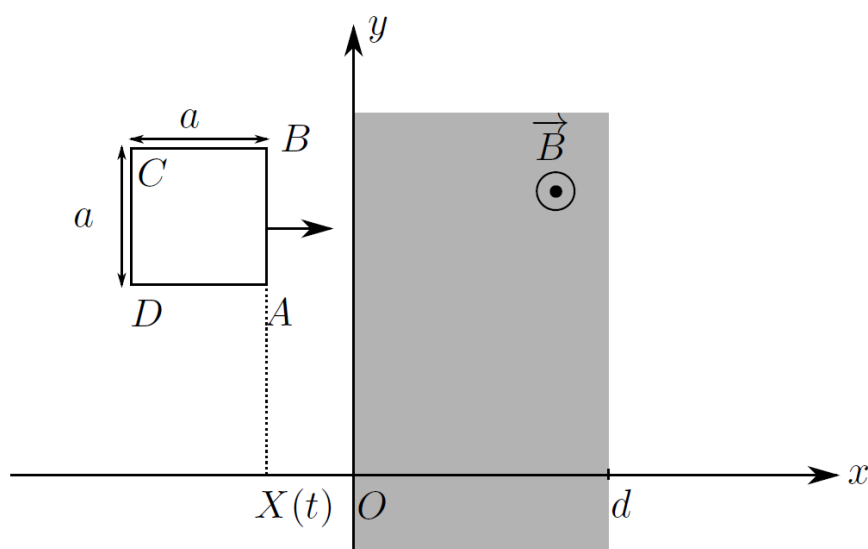


# Corrigé du TD S9

## Table des matières

|                                                                   |          |
|-------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>1 Déplacement d'un cadre conducteur</b>                        | <b>1</b> |
| <b>2 Oscillations de barres sur des rails</b>                     | <b>2</b> |
| 2.1 Rails de Laplace sans générateur $H$                          | 2        |
| 2.2 Rails de Laplace avec générateur                              | 3        |
| 2.3 Oscillations d'une barre plongée dans un champ magnétique     | 4        |
| 2.4 Oscillations de deux barres plongées dans un champ magnétique | 5        |
| <b>3 Modélisation d'un générateur d'énergie électrique</b>        | <b>7</b> |

## 1 Déplacement d'un cadre conducteur



**1.1** On oriente le cadre dans le sens  $ABCD$ . L'utilisation de la loi de Faraday nécessite de déterminer la surface plongée dans le champ magnétique pour chaque étape de la traversée :

- $X(t) < 0$ ,  $a < X(t) < d$  et  $X(t) > d + a$  : le flux est constant, donc le courant est nul.
- $0 < X(t) < a$  : la partie du cadre plongée dans le champ a pour aire  $S(t) = aX(t)$ , avec une normale selon  $\vec{u}_z$ . On en déduit :

$$\phi(t) = BaX(t), \text{ donc } e = -\frac{d\phi}{dt} = -Bav = Ri \text{ et}$$

$$\vec{F} = \int_{y_A}^{y_{A+a}} i dy \vec{u}_y \wedge B \vec{u}_z = iBa \vec{u}_x = -\frac{B^2 a^2}{R} \vec{v}$$

- $d < X < d+a$  : la partie du cadre plongée dans le champ a pour aire  $S(t) = a(a+d-X(t))$ , avec une normale selon  $\vec{u}_z$ . On en déduit :

$$\phi(t) = Ba(a+d-X(t)), \text{ donc } e = -\frac{d\phi}{dt} = Bav = Ri \text{ et}$$

$$\vec{F} = \int_{y_{D+a}}^{y_D} i dy \vec{u}_y \wedge B \vec{u}_z = -iBa \vec{u}_x = -\frac{B^2 a^2}{R} \vec{v}$$

**1.2** La force de Laplace appliquée aux côté  $AB$  et  $CD$  donne  $\vec{F} = ia[B(X) - B(X-a)]\vec{u}_x$  et donc la puissance de Laplace est donnée par :

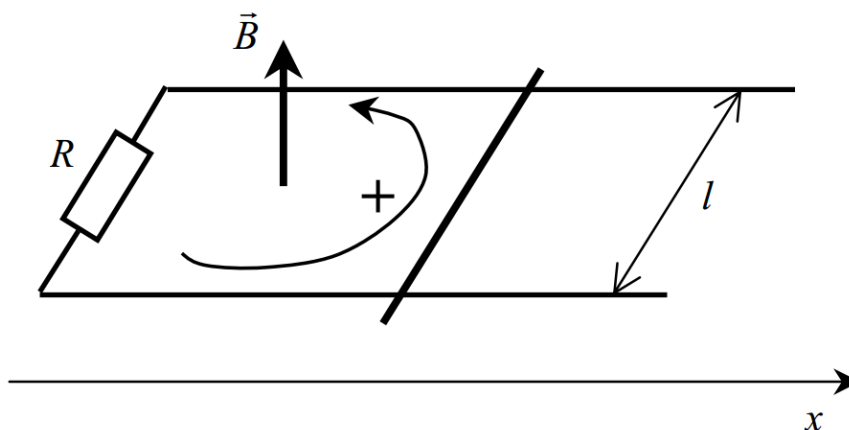
$$\mathcal{P}_L = ia[B(X) - B(X-a)]v = -ei \Rightarrow e = -a[B(X) - B(X-a)]v = Ri$$

Ce qui nous donne les expressions de  $e$  et  $i$ .

- $X < 0$ ,  $a < X < d$  et  $X > d + a$  : on a  $B(X) = B(X-a)$  et  $i$  est nulle.
- $0 < X < a$  :  $B(X) = B$  et  $B(X-a) = 0$ , d'où  $i = -\frac{Bav}{R}$
- $d < X < d + a$  :  $B(X) = 0$  et  $B(X-a) = B$ , d'où  $i = \frac{Bav}{R}$

## 2 Oscillations de barres sur des rails

### 2.1 Rails de Laplace sans générateur $H$



**2.1.1** La loi de LENZ-FARADAY donne :

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

Il faut déterminer le flux du champ magnétique à travers le circuit,  $x(t)$  donnant la position de la barre, l'aire du circuit est  $S(t) = x(t)\ell$ , d'où :

$$\phi(t) = Bx(t)\ell \Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = Bv(t)\ell$$

On a donc :

$$e = -Bv\ell$$

**2.1.2** Si la barre est parcourue par un courant d'intensité  $i$ , comptée algébriquement, déterminer la composante selon  $(Ox)$  de la force de Laplace subie par la barre. La force de Laplace est :

$$d\vec{F}_L = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

La force de Laplace sur la barre est donc :

$$\vec{F}_L = \int_0^\ell i dy \vec{u}_y \wedge (B \vec{u}_z) = \int_0^\ell iB dy \vec{u}_x = iB\ell \vec{u}_x$$

**2.1.3** La barre est équivalente à un générateur de f.e.m  $e$ . Le circuit est donc une résistance en série avec un générateur  $e$ . La loi des mailles donne directement l'équation électrique du circuit :

$$\boxed{e = Ri} \quad (1)$$

**2.1.4** Le principe fondamental de la dynamique projeté sur  $\vec{u}_x$  donne l'équation mécanique :

$$\boxed{m\ddot{x} = iB\ell} \quad (2)$$

**2.1.5** On reprend l'expression de  $i$  donné par (1) :  $i = \frac{e}{R} = -\frac{Bv\ell}{R}$  que l'on remplace dans (2) :

$$m\ddot{x} + \frac{vB^2\ell^2}{R} = 0 \Leftrightarrow \dot{v} + \frac{B^2\ell^2}{Rm}v = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\dot{v} + \frac{v}{\tau} = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{Rm}{B^2\ell^2}}$$

**2.1.6** On résout cette équation qui est une équation différentielle du premier ordre sans second membre :

$$v(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Les conditions initiales nous donne directement :

$$\boxed{v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

**2.1.7** En multipliant l'équation électrique par  $i$ , on trouve que la puissance électrique  $\mathcal{P}_e$  fournie par la f.e.m est dissipée par effet JOULE :

$$(1) \times i \Rightarrow \mathcal{P}_e = ei = Ri^2 = -Blvi$$

En multipliant l'équation mécanique par  $v$ , on trouve la puissance des forces de LAPLACE  $\mathcal{P}_L$  :

$$(2) \times v \Rightarrow m \frac{dv}{dt} v = Bliv = \mathcal{P}_L$$

Le bilan de puissance donne donc :

$$\boxed{\mathcal{P}_L = -ei = -\mathcal{P}_e}$$

**2.1.8** Le bilan de puissance peut aussi s'écrire :

$$mv \frac{dv}{dt} = Bliv = -ei = -Ri^2 \Leftrightarrow \boxed{\frac{d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}{dt} = \mathcal{P}_L = -ei = -Ri^2}$$

En conclusion : l'énergie cinétique de la barre est transmise au circuit électrique pour être dissipée par effet Joule.

## 2.2 Rails de Laplace avec générateur

**2.2.1** L'équation électrique est :

$$\boxed{E + e = Ri} \quad (3)$$

L'équation mécanique est toujours la même :

$$\boxed{m\ddot{x} = iB\ell} \quad (4)$$

**2.2.2** L'équation électrique (3) du circuit donne :

$$i = \frac{E}{R} + \frac{e}{R} = \frac{E}{R} - \frac{Bv\ell}{R}$$

On remplace dans l'équation mécanique (4) :

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{B\ell}{m} \left( \frac{E}{R} - \frac{Bv\ell}{R} \right) \\ \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} &= \frac{EB\ell}{Rm}} \end{aligned}$$

**2.2.3** La solution générale de l'équation différentielle est :

$$v(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{E}{B\ell}$$

avec la condition initiale :

$$v(0) = 0 = A + \frac{E}{B\ell} \Leftrightarrow A = -\frac{E}{B\ell}$$

soit :

$$\boxed{v(t) = \frac{E}{B\ell} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right)}$$

**2.2.4**  $i$  se déduit de la vitesse grâce à :  $i = \frac{E}{R} - \frac{Bv\ell}{R}$ . On a donc :

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

**2.2.5** En procédant comme dans la partie précédente, on a :

$$(3) \times i \Rightarrow Ei = Ri^2 - ei$$

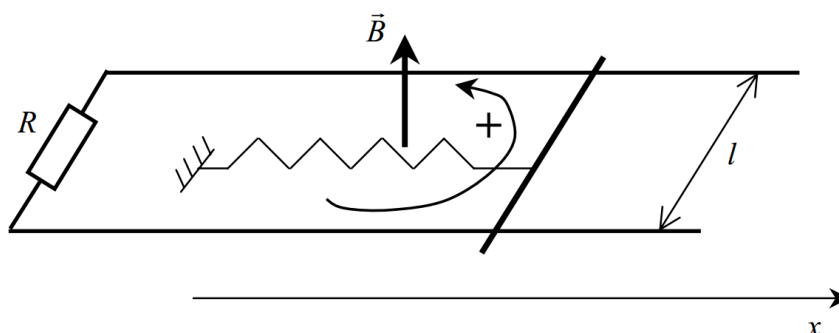
$$(4) \times v \Rightarrow m \frac{dv}{dt} v = B\ell i v = \mathcal{P}_L = -ei = Ei - Ri^2$$

au final :

$$\boxed{Ei = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right)}$$

La puissance fournie par le générateur est en partie dissipée par effet Joule et le reste est transformé en énergie cinétique.

## 2.3 Oscillations d'une barre plongée dans un champ magnétique



**2.3.1** Il faut maintenant considérer l'ensemble des forces précédentes. Le principe fondamental de la dynamique donne :

$$m\ddot{x} = -kx + iBl\dot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{B^2\ell^2}{mR}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{\tau} + \omega_0^2 x = 0}$$

**2.3.2** C'est une équation différentielle du second ordre, sans second membre. On écrit le polynôme caractéristique et on en déduit le discriminant :

$$\Delta = \frac{1}{\tau^2} - 4\omega_0^2 \ll 0 \quad \text{car} \quad \omega_0 \gg \frac{1}{\tau}$$

Les racines du polynôme sont :

$$r_+ = -\frac{1}{2\tau} + \frac{j\sqrt{4\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}}{2} \simeq -\frac{1}{2\tau} + j\omega_0$$

et

$$r_- \simeq -\frac{1}{2\tau} - j\omega_0$$

ce qui nous donne :

$$x(t) = \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right) \left( A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \right)$$

En considérant les conditions initiales, on trouve :

$$\boxed{x(t) = a \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right) \cos(\omega_0 t)}$$

**2.3.3** On obtient des **oscillations amorties**.

**2.3.4** En multipliant l'équation mécanique par  $\dot{x}$ , on obtient :

$$m\ddot{x}\dot{x} + kx\dot{x} = iBl\dot{x} = -ei = -Ri^2$$

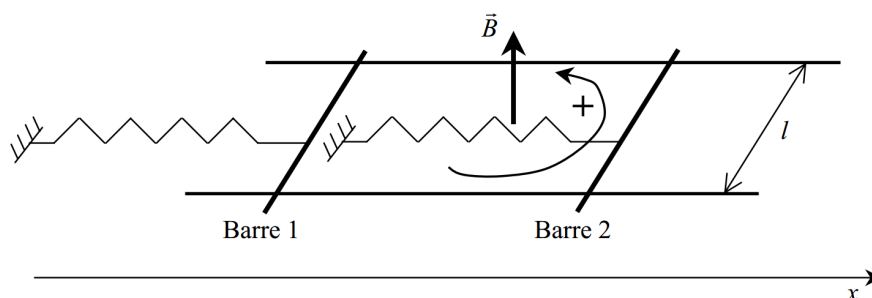
$$\Rightarrow 0 = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right)$$

On intègre cette équation entre  $t = 0$  et  $t \rightarrow \infty$  sachant que  $x(0) = a$ ,  $x(\infty) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = \dot{x}(\infty) = 0$  et on a :

$$\int_0^\infty Ri^2 dt = \frac{1}{2}ka^2$$

L'énergie mécanique initiale a donc été intégralement dissipée dans la résistance.

## 2.4 Oscillations de deux barres plongées dans un champ magnétique



**2.4.1** Les deux barres mobiles sont susceptibles d'être à l'origine d'une f.e.m  $e$ . On utilise la loi de Lenz-Faraday pour la déterminer. La surface du circuit dépend de la position des deux barres, toutefois, on ne nous donne pas la position des ressorts. En supposant que les ressorts sont à une distance  $L$  l'un de l'autre, l'aire du circuit est :

$$S = \ell(L + x_2 + \ell_{02} - x_1 - \ell_{01})$$

En dérivant, tous les termes constants disparaissent :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d(B\ell(L + x_2 + \ell_{02} - x_1 - \ell_{01}))}{dt} = -B\ell(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

Le circuit est équivalent à une résistance  $R$  en série avec un générateur de tension continue  $e$  :

$$\boxed{e = Ri}$$

**2.4.2** Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la barre 1, projetée sur  $\vec{u}_x$  :

$$\boxed{m\ddot{x}_1 = -kx_1 - iB\ell} \quad \text{car le sens conventionnel du courant est selon } -\vec{u}_y$$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la barre 2, projetée sur  $\vec{u}_x$  :

$$\boxed{m\ddot{x}_2 = -kx_2 + iB\ell} \quad \text{car le sens conventionnel du courant est selon } +\vec{u}_y$$

**2.4.3** On remplace  $i$  par son expression et on a :

$$\boxed{\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 - \frac{1}{\tau}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0}$$

$$\text{et } \boxed{\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 + \frac{1}{\tau}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0}$$

**2.4.4** En sommant les deux équations différentielles, on a :

$$\boxed{\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0}$$

En soustrayant les deux équations différentielles, on a :

$$\boxed{\ddot{Y} + \omega_0^2 Y + \frac{2}{\tau}\dot{Y} = 0}$$

**2.4.5**  $Y$  obéit à une équation différentielle avec un terme de frottement fluide, il va tendre vers 0, soit :

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} Y = 0}$$

Au bout d'un temps très long, on a donc deux barres qui ont des mouvements synchronisés car  $\dot{x}_2 = \dot{x}_1$ . La distance entre ces barres reste constante. Ainsi, on a pour  $t \rightarrow \infty$ ,  $x_2 = x_1$  (attention ! les deux abscisses n'ont pas la même origine). On résout l'équation différentielle en  $X$ , et on a  $X(t) = a \cos(\omega_0 t) = 2x_1$ , soit :

$$\boxed{x_1 = x_2 = \frac{a}{2} \cos(\omega_0 t)}$$

Les barres bougent en synchronisation, l'aire n'évolue plus au cours du temps et  $i$  **tend vers 0**.

### 3 Modélisation d'un générateur d'énergie électrique

**3.1** Voir cours EM1 pour lignes de champ.

**3.2** On mesure  $B_{r0} = 0,27 \text{ T}$  et  $B_{z0} = 0,35 \text{ T}$ . Le champ a une période spatiale de  $\lambda \simeq 2,5 \text{ cm}$  or  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  donc  $k = 250 \text{ m}^{-1}$ .

**3.3** On a :

$$\vec{E}_m = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} B_r \\ 0 \\ B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ vB_r \\ 0 \end{vmatrix}$$

Soit :  $\vec{E}_m = vB_r \vec{u}_\theta$

**3.4** Il faut calculer la circulation du champ électromoteur :

$$e = \int_{\text{bobine}} vB_r \vec{u}_\theta \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{2\pi N} vB_r R d\theta$$

on intègre de 0 à  $2\pi N$  car on doit intégrer sur la longueur totale du fil :

$$e = vB_{r0} \sin(kZ(t)) 2\pi RN$$

**3.5** On a :

$$i = \frac{e}{R_0} = \frac{vB_{r0} \sin(kZ(t)) 2\pi RN}{R_0}$$

**3.6** Déterminer l'expression de la résultante des forces de Laplace  $\vec{F}_L$  suivant  $\vec{u}_z$  s'exerçant sur la bobine. La force de Laplace est donnée par :

$$d\vec{F}_L = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = iR d\theta \vec{u}_\theta \wedge (B_r \vec{u}_r + B_z \vec{u}_z) = -iRB_r d\theta \vec{u}_z + iRB_z d\theta \vec{u}_r$$

Il reste à intégrer sur tout le fil et à ne garder que la partie selon  $\vec{u}_z$  :

$$\vec{F}_L = \begin{cases} iRB_z \int_0^{2\pi N} \vec{u}_r d\theta \\ 0 \\ -iRB_r \int_0^{2\pi N} \vec{u}_z d\theta \end{cases}$$

il faut faire attention,  $\vec{u}_r$  dépend de  $\theta$  :  $\vec{u}_r = \cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y$ , l'intégration de  $\vec{u}_r$  de 0 à  $2\pi$  est nulle, on a donc :

$$\vec{F}_L = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -iRB_r 2\pi N \end{cases}$$

En remplaçant  $i$  par son expression, on a :

$$\vec{F}_L = - \frac{(B_{r0} 2\pi RN \sin(kZ))^2}{R_0} \vec{u}_z$$