

Loi marginale, loi conjointe et corrélation

EXERCICE 1: [Indications] – Cours – Calculer – Mobiliser – Soit (X, Y) un couple de v.a.d. dont la loi est donnée par

$$P((X = i) \cap (Y = j)) = \left(\frac{1}{2}\right)^{i+j} \quad \forall (i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$$

1. Déterminer la loi de X . Déterminer $\mathbb{E}[X]$ et $V(X)$.
2. Montrer que X et Y suivent la même loi. En déduire $\mathbb{E}[Y]$ et $V(Y)$.
3. Est-ce que X et Y sont indépendantes ?
4. Calculer $V(4X - 5Y)$.
5. Soit $c \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$. Calculer $P(\min(X, Y) < c)$.

EXERCICE 2: [Indications] – Cours – Calculer – Soient a et b deux nombres entiers tels que $0 < a < b$ et $\lambda > 0$. On considère un vecteur aléatoire (X, Y) dont la loi de probabilité est définie par :

$$\forall i, j \in \mathbb{N} \quad P(X = i, Y = j) = \begin{cases} e^{-b\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} \binom{j}{i} a^i (b-a)^{j-i} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}$$

1. Déterminer la loi marginale de Y . Donner $\mathbb{E}(Y)$, $Var(Y)$.
2. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant que $Y = j$.
3. Déterminer la loi marginale de X .

EXERCICE 3: [Indications] – Cours – Calculer – Soient X et Y deux v.a.d. indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre p . On note $V = \inf(X, Y)$ et $W = X - Y$. Déterminer la loi du couple (V, W) .

EXERCICE 4: [Indications] – Modéliser – Calculer –

On jette n fois un dé à 6 faces. On note X le nombre de 1 et Y le nombre de 2. Déterminer le coefficient de corrélation entre X et Y .

EXERCICE 5: [Indications] – Cours – Chercher –

Soient X_1, X_2, X_3 des variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi de Poisson respectivement $\mathcal{P}(\lambda_1)$, $\mathcal{P}(\lambda_2)$, $\mathcal{P}(\lambda_3)$.

1. Déterminer $P(X_1 + X_2 + X_3 \leq 1)$
2. Déterminer la covariance de $U = X_1 + X_2$, $V = X_1 + X_3$.
3. Les variables U et V sont-elles indépendantes ?

EXERCICE 6: [Indications] – Cours – Calculer – Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles suivant une loi uniforme sur l'ensemble $S = \{(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)\}$, au sens où

$$P(X = i, Y = j) = \frac{1}{4} \quad \forall (i, j) \in S$$

1. Calculer la loi de X et de Y ainsi que leurs espérances.
2. Calculer la covariance des variables X et Y . Celles-ci sont-elles indépendantes ?
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Conditions

EXERCICE 7: [Indications] – Cours – Chercher – Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$. On suppose que

$$p(X = -1) = p_1, \quad p(X = 1) = p_2 \quad \text{où } p_1, p_2 \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$$

$$\mathcal{L}(Y) = \mathcal{U}(\{-1, 0, 1\})$$

1. Déterminer la loi de $S = X + Y$.
2. On définit la variable aléatoire Z par :

$$Z = \begin{cases} \theta_1 & \text{si } X + Y = 0 \\ \theta_2 & \text{sinon} \end{cases}$$

où θ_1, θ_2 sont des réels distincts fixés.

- a) Montrer que la loi de Z est indépendante de p_1 et p_2 .
- b) Déterminer les valeurs de θ_1 et θ_2 de sorte que $\mathbb{E}[Z] = 3$ et $V(Z) = 2$

EXERCICE 8: [Indications] – Mobiliser – Calculer – Soit (X, Y) un couple de v.a.d. indépendantes telles que

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda) \quad Y \sim \mathcal{P}(\mu)$$

Donner la loi conditionnelle de X sachant que $X + Y = n$.

EXERCICE 9: [Indications] – *Calculer* – Soient $p \in [0; 1]$, X une v.a.d. suivant une loi géométrique de paramètre p et Y une v.a.d. telle que la loi de Y sachant ($X = k$) soit une loi $\mathcal{B}(k, p)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Déterminer la loi de Y . On admettra à cet effet que pour tout $x \in]-1, 1[$, on a

$$\sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1) \dots (k-n+1) x^{k-n} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

EXERCICE 10: [Indications] – *Modéliser* – *Calculer* –

Depuis sa première plantation de haricots, lorsque Jack fait pousser de nouveaux plants, certains haricots sont magiques, d'autres non. La probabilité pour qu'un haricot soit magique est $p = 0, 1$.

Jack cueille sept haricots au hasard. On note X le nombre de haricots magiques.

1. Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

Jack place ces sept haricots dans un chapeau, puis en prend deux au hasard. On note Y le nombre de haricots magiques parmi les deux choisis.

2. Établir une formule donnant $P(Y_{/(X=x)} = k)$ pour toutes les valeurs x de X ainsi que pour tout $k \in \text{Supp}(Y_{/(X=x)})$ valable pour tout $k \in \{0, 1, 2\}$.

3. En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire Y . Qu'en pensez-vous ?

EXERCICE 11: [Indications] – *Modéliser* – *Calculer* – Dans le troupeau de vaches limousines de Robert, le nombre de naissances par an suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 12$. Sachant que la probabilité pour un veau d'être une future génisse est $p = 0, 52$, on note Y le nombre de naissances et X le nombre de futures génisses parmi ces naissances.

1. Déterminer la loi de X .

2. Déterminer la loi de $Y - X$.

3. Montrer que les variables X et $Y - X$ sont indépendantes.

EXERCICE 12: [Indications] – *Modéliser* – *Mobiliser* – Le comportement au volant des personnages officiels n'est pas toujours un bon exemple : quand un gendarme relève un excès de vitesse, il peut tomber sur un député avec la probabilité p ou même sur un ministre avec la probabilité q . (On rappelle qu'un ministre ne peut être en même temps député.)

On considère n excès de vitesses verbalisés, en notant X le nombre de députés et Y le nombre de ministres en infraction.

1. Déterminer la loi de la variable X .

On note Z_k le nombre de ministres en infraction sachant que k députés ont été pris en infraction.

2. Déterminer la loi de la variable Z_k .

3. Montrer que la loi de probabilité du couple (X, Y) est définie par

$$p(X = i, Y = j) = \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} p^i q^j (1-p-q)^{n-i-j} \quad \forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket, i+j \leq n$$

4. On note T_k la proportion $\frac{Y}{X+Y}$ de ministres parmi les dignitaires pris en flagrant délit d'excès de vitesse "sachant qu'il y a k dignitaires en cause ($X+Y = k, k \in \mathbb{N}^*$)".

a) Déterminer la loi de probabilité de T_k

b) Calculer $\mathbb{E}[T_k]$

Sommes et manipulations de v.a.d.

EXERCICE 13: [Indications] – *Cours* – *Calculer* – À un péage autoroutier, n voitures franchissent au hasard et indépendamment l'une des trois barrières de péage numérotées 1, 2, 3 mises à leur disposition. On note X_i la variable aléatoire dénombrant les voitures ayant franchi la barrière i .

1. Déterminer la loi de X_1 .

2. Calculer les variances de X_1, X_2 et de $X_1 + X_2$

3. En déduire la covariance de X_1 et X_2 .

4. Les variables X_1, X_2 sont-elles indépendantes ?

EXERCICE 14: [Indications] – *Chercher* – ☆

Soient $p, q \in]0; 1[$, et X, Y deux v.a. indépendantes telles que $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$ et $Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(q)$.

1. On pose $Z = XY$. Calculer $\mathbb{E}[Z]$.

2. On pose $W = X + Y$.

a) Déterminer la loi de W .

b) Déterminer $\mathbb{E}[W]$.

c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que W suive une loi binomiale. Dans ce cas, donner les paramètres de la loi. ☆

EXERCICE 15: [Indications] – *Modéliser* – *Calculer* – Le poinçonneur des lilas perfore en moyenne un ticket de première classe pour neuf de deuxième classe.

Le nombre de faux tickets qu'il reconnaît dans une journée suit une loi de Poisson de moyenne 3. Il les glisse dans sa poche en refusant le passage au fraudeur.

En quittant son service, il vide sa poche. Quatre confettis qu'y sont glissés par hasard.

Calculer la probabilité pour que le nombre de confettis de deuxième classe qu'il y trouve soit strictement supérieur au nombre de faux tickets.

(On rappelle que lorsque les tickets étaient poinçonnés, la pince produisait des confetti.)

EXERCICE 16: [Indications] – *Cours* – B. brise en moyenne trois verres et une assiette par mois. Soit X le nombre de verres et Y le nombre d'assiettes victimes de sa maladresse en un mois.

1. En se basant sur le fait que les bris sont indépendants les uns des autres, établir les lois de probabilité des variables X et Y .

2. On note T le nombre total de verres et d'assiettes cassées. Quelle est la loi de probabilité de T ?
3. Calculer la probabilité d'avoir en un mois ni bol ni assiette cassée.

EXERCICE 17: [Indications] – *Calculer* – On jette un dé équilibré à 6 faces et on note X le nombre obtenu. Ensuite, on jette X fois une pièce de monnaie équilibrée et on note Y le nombre de "piles" obtenus.

1. Rappeler $E(X)$ et calculer $E(X^2)$, $V(X)$.
2. Calculer la loi conjointe du vecteur (X, Y)
3. Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$
4. Déterminer le coefficient de corrélation entre X et Y .

EXERCICE 18: [Indications] – *Calculer* – Soient X, Y deux v.a.d. indépendantes de loi géométrique de paramètres respectifs p_1, p_2 . Soit $Z = X - Y$. Donner l'espérance et la loi de Z .

Indications

Exercice 2

1. Reconnaître une loi de cours
2. Reconnaître une loi de cours

Exercice 3

Séparer les cas d'étude de valeurs de W positives et négatives.

Exercice 4

On pourra par exemple passer par $X + Y$.

Exercice 8

S'intéresser tout d'abord à la loi de $X + Y$.

Exercice 14

2. a) c'est une somme de binomiales mais attention, elles ne sont pas indépendantes !

Exercice 15

Après avoir modélisé la situation avec X, Y , décomposer en éléments de type $P(X = x, Y = y)$.