

I Généralités

I-1 Structure d'un espace vectoriel

Dans tout ce paragraphe, on se donne $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition

Étant donné un ensemble E , on appelle

- **Loi interne**, toute application $E \times E \rightarrow E$.
On notera $u \boxplus v$ l'image de (u, v) par cette application et l'espace ainsi défini sera noté $(E, \boxplus)$.
- **Loi externe**, toute application de $\mathbb{K} \times E$ dans E .
On note $\lambda \cdot u$ l'image de (λ, u) par cette application. L'espace ainsi défini sera noté $(E, \cdot)$.

■ Exemples :

1 ■ Pour $E = \mathbb{K}^n$, les loi classiques sont

Loi interne : $E \times E \rightarrow E$ et loi externe : $\mathbb{K} \times E \rightarrow E$
 $(u, v) \mapsto u + v$ $(\lambda, u) \mapsto \lambda u$

2 ■ Avec $E = [0; +\infty[$:

	Oui	Non
Loi interne	$E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ $(x, y) \mapsto \sqrt{xy}$ $(x \boxplus y = \sqrt{xy})$	$E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ $(x, y) \mapsto \ln(\frac{1}{2} + xy)$
Loi externe	$\mathbb{R} \times E \rightarrow \mathbb{R}$ $(\lambda, x) \mapsto \lambda^2 x$ $(\lambda \cdot x = \lambda^2 x)$	$\mathbb{R} \times E \rightarrow \mathbb{R}$ $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$

Définition

On appelle **$\mathbb{K}$ -espace vectoriel** (ou espace vectoriel sur $\mathbb{K}$) tout ensemble E muni d'une loi $\boxplus$, et d'une loi $\cdot$ telles que :

- $(E, \boxplus)$ est un groupe commutatif :
 - **loi interne** : $u \boxplus v \in E \quad \forall u, v \in E$.
 - **Commutativité** : $u \boxplus v = v \boxplus u \quad \forall u, v \in E$.
 - **élément neutre** : Il existe $0_E \in E$ tel que $0_E \boxplus u = u \boxplus 0_E = u \quad \forall u \in E$ (donc E est **non vide** !)
 - **symétrique** : Pour tout $u \in E$, il existe $v \in E$ tel que $u \boxplus v = 0_E$
 - **associativité** : Pour tous $u, v, w \in E$, $u \boxplus (v \boxplus w) = (u \boxplus v) \boxplus w$
- Distributivité / associativité de $\cdot$:
 - **loi externe** : $\forall u \in E, \alpha \in \mathbb{K}$ on a $\alpha \cdot u \in E$.
 - **distributivité de $\cdot$ par rapport à $\boxplus$** : $\forall \alpha \in \mathbb{K}, u, v \in E$, on a $\alpha \cdot (u \boxplus v) = \alpha \cdot u \boxplus \alpha \cdot v$.
 - **distributivité de $+$ par rapport à $\cdot$** : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, u \in E$, on a $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u \boxplus \beta \cdot u$.
 - **Associativité** : pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}, u \in E$, on a $(\alpha\beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$.
 - **Élément neutre** : Pour tout $u \in E$, on a $1 \cdot u = u$.

On note $(E, \boxplus, \cdot)$ cet espace.

■ Contre-Exemple(s) :

- $\mathbb{N}, \mathbb{Q}$ munis des additions et loi externe habituelle (multiplication), ne sont pas des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, (ni sur $\mathbb{C}$!) (La loi n'est pas externe.)
- Considérons $E = [0, +\infty[$ muni de la loi $\boxplus$ définie par $x \boxplus y = \sqrt{xy} \quad \forall x, y \in E$.
 - Loi interne ? On a bien $x, y \in E \Rightarrow x \boxplus y > 0$, d'où $x \boxplus y \in E$ (déjà vu)
 - Élément neutre ? $x \boxplus y = x \Leftrightarrow \sqrt{xy} = x \Leftrightarrow \sqrt{x}(y - \sqrt{x}) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0$ ou $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$: pas d'élément y commun à tous les x . Il n'y a donc pas d'élément neutre. $(E, \boxplus)$ ne peut donc pas donner lieu à un espace vectoriel.

Définition

Les éléments d'un espace vectoriel E sont appelées des **vecteurs**.
 Les éléments de $\mathbb{K}$ sur lequel est construit E sont appelés des **scalaires**.

Théorème 1

Les ensembles suivants sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$:

- $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$
- $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$
- $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$
- $(\mathcal{F}(A, E), +, \cdot)$ avec $(E, \boxplus, \bullet)$ un $\mathbb{K}$ -e.v., A un ensemble quelconque

$f + g : A \longrightarrow \mathbb{K} \quad \text{et} \quad \lambda \cdot f : A \longrightarrow \mathbb{K}$
 $x \longmapsto f(x) \boxplus g(x) \quad \quad \quad x \longmapsto \lambda \bullet (f(x))$



Notation :

On écrira souvent "ev" ou "e.v." pour "espace vectoriel" et $\mathbb{K}$ -ev" pour "espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ".

Plus généralement, quand il n'y aura pas de doute possible, on pourra dire "espace vectoriel" au lieu de " $\mathbb{K}$ -espace vectoriel".

Propriété 2

Si $(E, \boxplus, \cdot)$ est un espace vectoriel, alors :

- i ■ l'élément neutre est unique.
- ii ■ l'élément symétrique est unique.
- iii ■ pour tout $u \in E$, on a $0_E = 0 \cdot u$.
- iv ■ pour tout $u \in E$, le vecteur $(-1) \cdot u$ est le symétrique de u .

Démonstration :

■ Montrons que l'élément neutre est unique :

Soient 0_E et $0'_E$ deux éléments neutres dans E . Alors

$$0_E \underbrace{=}_{0'_E \text{ est neutre}} 0_E + 0'_E \underbrace{=}_{0_E \text{ est neutre}} 0'_E$$

■ Montrons que l'élément symétrique est unique :

Soit $u \in E$. Supposons qu'il ait deux symétriques v et w , alors

$$v = v + 0_E = v + (u + w) = (v + u) + w = 0_E + w = w$$

■ Montrons que pour tout $u \in E$, on a $0_E = 0 \cdot u$:

Soit $u \in E$. On a

$$0 \cdot u = (0 + 0) \cdot u = 0 \cdot u + 0 \cdot u$$

En ajoutant de chaque côté le symétrique de $0 \cdot u$, on obtient $0 \cdot u = 0_E$.

■ Montrons que pour tout $u \in E$, le vecteur $(-1) \cdot u$ est le symétrique de u :

Soit $u \in E$. On a

$$\square \quad 1 \cdot u + (-1) \cdot u = 0 \cdot u = 0_E$$



Notations :

- À partir de maintenant, on adoptera la notation $+$ en remplacement de $\boxplus$, sauf s'il peut y avoir confusion.
- La propriété préc. (iv) légitime la notation $-u$ pour désigner le symétrique de u ainsi que " $u - v$ " à la place de : " $u + \text{symétrique de } v$ ".

I-2

Sous-espace vectoriel



Définition

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On appelle *sous espace vectoriel ("sev") de E* tout sous ensemble F non vide de E tel que $(F, +, \cdot)$ soit un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.



VOCABULAIRE

Le terme sous-espace vectoriel "seul" est incomplet. Il faut préciser de quel e.v. il est issu : "sous espace vectoriel de ..."

■ Exemple 3 :

Dans $\mathbb{R}^3$, on a vu en première année que $\text{Vect}((1, 0, 0)) \subset \mathbb{R}^3$ était un sev de $\mathbb{R}^3$ (démonstration générale un peu plus tard)

Théorème 3 (Caractérisation des sev 1)

Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. F est un sous espace vectoriel de E si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- i ■ F est non vide (ou condition $0_E \in F$)
- ii ■ $F \subset E$.
- iii ■ $\forall u, v \in F$, on a $u + v \in F$ (stabilité de la loi interne)
- iv ■ $\forall \lambda \in \mathbb{K}, u \in F$, on a $\lambda u \in F$. (stabilité de la loi externe).

Démonstration :

● Si F est un sev de E :

- $F \subset E$ par définition de F .
- $(F, +, \cdot)$ est en particulier un espace vectoriel, donc iii et iv sont vérifiées.
- F est non vide par définition.

● Supposons que les conditions soient vérifiées, montrons que $(F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -ev.

Loi $+$:

- La loi est bien interne par hypothèse.
- associativité : héritée de E .
- commutativité : héritée de E .
- Existence de l'élément neutre dans F :

Si hypothèse " $0_E \in F$ ", alors 0_E est neutre également pour F ($0_E + u = u + 0_E \forall u \in F$.)

Si hypothèse F non vide, alors il existe $u \in F$. Ainsi, $0_E = 0 \cdot u \in F$ par hypothèse iv). Ainsi, on en revient au cas précédent.

- Symétrique : Soit $u \in F$. Comme E est un ev, un symétrique de u est $(-1) \cdot u \in F$ par stabilité de la loi externe.

Loi $\cdot$:

- Distributivité /associativité à gauche : héritée de E .
- Élément neutre 1 valable sur E donc valable sur F □

D'où le résultat et la méthode suivante :

Corollaire

Tout sev F d'un espace vectoriel E contient 0_E . De plus, $0_E = 0_F$.

Méthode 1 (Pour déterminer si F est un sev :)

En pratique, pour vérifier si un sous ensemble F d'un espace vectoriel E est un sev, on pourra donc commencer par vérifier que $F \subset E$ puis $0_E \in F$.

- ★ Si $0_E \notin F$, alors F n'est pas un sev.
- ★ Si $0_E \in F$, alors on vérifie les conditions de stabilité du TC des sev.

On obtient donc un premier exemple de sous-espace vectoriel, à connaître :

Proposition 4

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (et $\mathbb{R}$).

Démonstration :

On sait que $\mathbb{K}_n[X] \subset \mathbb{K}[X]$ qui est un eV sur $\mathbb{K}$ d'élément neutre le polynome nul P_0 .

- élément neutre :

Par définition, on sait que $P_0 \in \mathbb{K}_n[X]$.

- Stabilité par loi interne :

Soient $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$. Alors on sait que $P + Q \in \mathbb{K}[X]$ ainsi que, par propriétés sur les polynomes, $\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q) \leq n$. Ainsi, $P + Q \in \mathbb{K}_n[X]$.

- Stabilité par loi externe :

Soient $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors on sait que $\lambda \cdot P \in \mathbb{K}[X]$ ainsi que, par propriétés sur les polynomes, $\deg(\lambda P) = \begin{cases} \deg P \leq n & \text{si } \lambda \neq 0 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$. Ainsi, $\lambda \cdot P \in \mathbb{K}_n[X]$.

- Conclusion : par TCSEV, on sait alors que $\mathbb{K}_n[X]$ est un sev de $\mathbb{K}[X]$ et donc un $\mathbb{K}$ -ev. $\square$

Théorème 5 (Caractérisation des sev 2)

Soient $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel. F est un sous espace vectoriel de E si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- i ■ $F \subset E$
- ii ■ $0_E \in F$ (ou bien "F non vide")
- iii ■ $\forall u, v \in F, \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda u + v \in E$

Démonstration :

Par le théorème de caractérisation 1, il suffit de vérifier que la condition iii) est équivalente au svstème des deux conditions $\begin{cases} 1- & \forall u, v \in F, \text{ on a } u + v \in F \\ 2- & \forall \lambda \in \mathbb{K}, u \in F, \text{ on a } \lambda u \in F. \end{cases}$

- Supposons que les conditions du TCSEV1 sont vérifiées, alors $\forall u, v \in E, \lambda \in \mathbb{K}$:

$$\underbrace{\underbrace{\lambda u}_{\in F \text{ par iv}} + v}_{\in F \text{ par iii}}$$

- Supposons la condition vérifiée : $\forall u, v \in E, \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda u + v \in E$.
Montrons que la condition 1- est vérifiée : Il suffit de prendre $\lambda = 1$
Montrons que la condition 2- est vérifiée : Il suffit de prendre $v = 0_E$. $\square$

? Exercice 1

1. Dans $\mathbb{R}^2$, toute droite passant par l'origine est un $\mathbb{R}$ -ev.
2. Dans un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E , tout ensemble $\{\alpha u \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$ où $u \in E$ fixé est un sev de E . (ex dans $\mathbb{R}^2$.)

Solution

1. D est une droite de $\mathbb{R}^2$ passant par l'origine ssi il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $D = \{(x, y) \mid ax + by = 0\}$. Ainsi, :
 - $F \subset \mathbb{R}^2$ qui est un $\mathbb{R}$ -ev.
 - $\vec{0} \in \mathbb{R}^2$ car $a \times 0 + b \times 0 = 0$.
 - Pour tout $u = (x, y), v = (x', y') \in D, \lambda \in \mathbb{R}$, on a $\lambda u + v = (\lambda x + x', \lambda y + y')$, avec

$$a(\lambda x + x') + b(\lambda y + y') = \lambda(ax + by) + (ax' + by') = \lambda \times 0 + 0 = 0$$

D'où, par TCSEV, D est un sev de $\mathbb{R}^2$.

2. On note D un tel ensemble. On a
 - $D \subset \mathbb{R}^2$ qui est un $\mathbb{R}$ -ev.
 - $\vec{0} = 0u \in D$.
 - Soient $x = \alpha u, y = \beta v \in D$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$x + \lambda y = (\alpha + \lambda \beta)u \in D.$$

D'où, par TCSEV, D est un sev de $\mathbb{R}^2$.

Corollaire de la caractérisation 2 :

pour tout intervalle I , l'ensemble $C^n(I, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ -ev, où $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Démonstration :

On a $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ qui est un $\mathbb{R}$ -eV d'élément neutre f_0 la fonction nulle.

★ $f_0 \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$

★ Soient $f, g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, par résultat de cours, on sait que $f + \lambda g$ est également dans $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$. Ainsi, $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ est bien stable par C-L.

★ En conclusion, par TCSEV, $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ est bien un sev de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, et c'est donc bien un $\mathbb{R}$ -eV.

□

Proposition 6

Toute intersection de sous espaces vectoriels d'un même $\mathbb{K}$ -ev est un $\mathbb{K}$ -ev.

Démonstration :

Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de $\mathbb{K}$ -sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . Montrons que $F = \bigcap_{i \in I} F_i$ est un $\mathbb{K}$ -sev de E . Utilisons la caractérisation des sev.

• F est non vide : $0_E \in F_i \quad \forall i \in I$, d'où $0_E \in F$.

• Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x, y \in F$. Ainsi, comme tous les F_i sont des sev, par caractérisation des sev, on a

$$\lambda u + y \in F_i \quad \forall i \in I$$

autrement dit

$$\lambda u + y \in F$$

et donc, toujours par caractérisation des sev, on en déduit que F est bien un sev de E . □



Remarque :

Une intersection de sous espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -ev E n'est jamais vide, elle contient au moins toujours $\{0_E\}$.

II Famille génératrice, famille libre et base

(rappel : on considère toujours $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.)

II-1 S.e.v. engendré (Vect) et famille génératrice



Définition

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $a_1, \dots, a_r \in E$. On dit que $v \in E$ est *combinaison linéaire de* $a_1, \dots, a_r$ s'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ tels que

$$v = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_r a_r$$

Exemple 4 :

Pour $E = \mathbb{C}^4$ et $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ 1+i \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -2i \\ 1 \end{pmatrix}$ alors $v = \begin{pmatrix} i \\ -3 \\ 0 \\ 1+2i \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire de a_1, a_2, a_3 car $v = 2ia_1 + 0a_2 - a_3$.



Remarque :

Dire que v est combinaison linéaire de $a_1, \dots, a_r$ revient à dire qu'il existe $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ tels que

$$\alpha v + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_r a_r = 0 \quad \text{avec } \alpha \neq 0$$

En effet, comme $\alpha \neq 0$, on a

$$\alpha v + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_r a_r = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = \underbrace{\frac{\alpha_1}{-\alpha}}_{\lambda_1} a_1 + \dots + \underbrace{\frac{\alpha_r}{-\alpha}}_{\lambda_r} a_r = 0$$

En posant $\lambda_i = \frac{\alpha_i}{-\alpha}$ ou $\alpha_i = -\alpha \lambda_i$, avec $\alpha \neq 0$ quelconque, on peut alors passer d'un côté à l'autre sans problème.

Exemple 5 :

Si par exemple on dispose de 4 vecteurs a_1, a_2, a_3, a_4 de $\mathbb{R}^5$, tels que :

$$2a_1 + 0a_2 + \sqrt{2}a_3 - \frac{1}{3}a_4 = 0,$$

alors a_1 est combinaison linéaire de a_2, a_3, a_4 . De même, a_3 et a_4 sont combinaisons linéaires des autres. Néanmoins, on ne peut pas savoir à ce stade si a_2 est oui ou non combinaison linéaire des autres.



Définition

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $A = \{a_1, \dots, a_r\} \subset E$ une famille finie de E . On note $\text{Vect}(A)$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires possibles des éléments de A :

$$\text{Vect}(A) = \{\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_r a_r \mid \alpha_i \in \mathbb{K} \forall i = 1, \dots, r\}.$$

■ Exemples :

6 ■ Dans $\mathbb{C}^3$, on pose $A = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$. $\text{Vect}(A) = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{C}\}$.

7 ■ Dans $\mathbb{R}[X]$, on pose $A = \{1, X\}$. $\text{Vect}(A) = \mathbb{R}_1[X]$.

Ci-dessous une propriété immédiate de contenu très utile !

Propriété 7

Dans les conditions de la définition précédente, on a :

- i ■ $A \subset \text{Vect}(A)$ (i.e. $\text{Vect}(A)$ contient tous les éléments de A) ;
- ii ■ $\text{Vect}(A)$ est un $\mathbb{K}$ sous-espace vectoriel de E ;
- iii ■ $\text{Vect}(A)$ est "le plus petit $\mathbb{K}$ -sous espace vectoriel de E contenant A ", au sens où :
si $A \subset F$ où F est un $\mathbb{K}$ -sev de E , alors $\text{Vect}(A) \subset F$

Démonstration :

i) $a_i = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_r a_r \in \text{Vect}(A)$ avec $a_j = 0$ pour tout j sauf $j = i$ où $a_i = 1$.

ii) exercice

iii) Soit $u \in \text{Vect}(A)$. Alors il existe $\alpha_1, \alpha_r \in \mathbb{K}$ tels que $u = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_r a_r$.

Or, F est un $\mathbb{K}$ -ev. Ainsi, comme $a_1, \dots, a_r \in F$, et que $\alpha_1, \alpha_r \in \mathbb{K}$, on a de fait $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_r a_r \in F$. D'où $u \in F$ et donc au final

$$\square \quad \text{Vect}(A) \subset F$$

■ Exemple 8 :

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $A = \{(1, 1, 0), (2, 0, 0)\}$ et $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$. Montrer que $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$.

On observe trivialement que

$$(1, 1, 0) = 1 \times (1, 0, 0) + 1 \times (0, 1, 0) \in \text{Vect}(B), \quad (2, 0, 0) = 2 \times (1, 0, 0) + 0 \times (0, 1, 0) \in B$$

Ainsi, $(1, 1, 0), (2, 0, 0) \in B$ qui est un espace vectoriel. $\text{Vect}(A)$ étant le plus petit sev contenant A , on en déduit que

$$\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$$

De la propriété de tout à l'heure, on tire maintenant le vocabulaire suivant :



Définition

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $A = \{a_1, \dots, a_r\} \subset E$ une famille finie de E . On appelle $\text{Vect}(A)$ le $\mathbb{K}$ sous-espace vectoriel de E *engendré par A* et on dit que A est **une famille génératrice** de F .

■ Exemples :

9 ■ La famille $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), \dots, (0, 0, 1)\}$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$, car

$$\begin{aligned} \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)) &= \{x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

10 ■ La famille $\{1, X, X^n\}$ est de même génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$.

■ Exemples :

11 ■ Dans $\mathbb{R}^3$, une famille génératrice de $F = \{(x, y, z) \mid x - y + 2z = 0\}$ est
 $(1, 1, 0), (-2, 0, 1)$:

$$(x, y, z) \in F \Leftrightarrow x - y + 2z = 0 \Leftrightarrow x = y - 2z \Leftrightarrow (x, y, z) = y(1, 1, 0) + z(-2, 0, 1)$$

12 ■ Une famille génératrice de $\{P \in \mathbb{C}_2[X] \mid P(0) = 0\}$ est X, X^2 car

$$\{P \in \mathbb{C}_2[X] \mid P(0) = 0\} = \{X(aX + b) \mid a, b \in \mathbb{C}\} = \{aX^2 + bX \mid a, b \in \mathbb{C}\} = \text{Vect}(X, X^2)$$

■ Contre-Exemple(s) :

Il n'y a pas de famille génératrice finie pour $\mathbb{K}[X]$.

En effet, (par l'absurde) : supposons qu'il y en ait une, notée ici $\mathcal{F}$.

Soit $N = \max\{\deg P \mid P \in \mathcal{F}\}$. Alors $\mathcal{F} \subset \mathbb{K}_N[X]$ et donc $\mathbb{K}[X] = \text{Vect}(\mathcal{F}) \subset \mathbb{K}_N[X]$, ce qui est absurde.

II-2 Famille libre



Définition

• Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel E . On dit que la famille est **libre** (ou que les vecteurs sont *linéairements indépendants*) si

$$\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}, \quad \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \iff \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

• Une famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ non libre est dite **liée**.

Autrement dit : Une famille est libre, si on ne peut pas exprimer les vecteurs les uns en fonction des autres. S'il existe un (ou plusieurs) vecteur(s) qui sont combinaisons linéaires des autres, alors elle est trivialement liée.

■ Exemple 13 :

Si $A = \{a_1, \dots, a_r\}$ est une famille finie de E et que $v \in \text{Vect}(A)$, alors la famille $\{a_1, \dots, a_r, v\}$ est liée.

Comme $v \in \text{Vect}(A)$, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ tels que $v = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_r a_r$, c'est-à-dire

$$v + (-\lambda_1)a_1 + \dots + (-\lambda_r)a_r = 0.$$



CONFUSION

Il existe toujours $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$.
(il suffit en effet de prendre tous les $\alpha_i = 0$.)

Ce n'est pas ça qu'il faut vérifier et ceci est une erreur fréquemment commise !

Donc en pratique, le sens $\Leftarrow$ est évident. Le seul sens à vérifier est $\Rightarrow$, c'est-à-dire :

"Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, tels que $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$. Montrons que $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ "

? Exercice 2

(révisions) Dans $\mathbb{C}^3$, montrer que $\{(1, 3, -1), (2, 1, i), (1, 0, 0)\}$ est une famille libre.

Solution

On note $\mathcal{F} = \{u, v, w\}$ la famille en question (dans l'ordre énoncé). Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que $au + bv + cw = 0$. On a :

$$au + bv + cw = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ 3a + b = 0 \\ -a + ib = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow a = b = c = 0$$

Ainsi, la famille est libre.

On note par ailleurs que d'après le cours de première année, on peut également démontrer la liberté par l'argument suivant : " (u, v, w) est libre équivaut à montrer que le rang de la

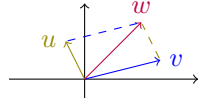
matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & i & 0 \end{pmatrix}$ vaut 3".

■ Exemple 14 :

Dans $\mathbb{R}^2$, le schéma ci-contre représente trois vecteurs liés car

$$w = u + v, \text{ i.e. } u + v - w = 0.$$

En revanche, les vecteurs u, v sont libres (ainsi que les vecteurs u, w ou les vecteurs v, w . cf ci-dessous...)



Propriété 8

Dans tout $\mathbb{K}$ -ev E , **deux** vecteurs u, v non nuls et non colinéaires forment une famille libre.

Démonstration :

Supposons qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tels que $\alpha u + \beta v = 0$. Si l'un des coefficients α, β est non nul (supposons par exemple $\alpha \neq 0$), alors $u = -\frac{\beta}{\alpha}v$ et donc u et v sont colinéaires. C'est contradictoire. Ainsi on obtient $\alpha = \beta = 0$ et la famille est libre.

□



HYPOTHÈSES !

On parle bien ci-dessus de **2** vecteurs. En effet, la propriété devient fausse à partir de 3 vecteurs.

Par exemple, pour $u = (0, 1, 0)$, $v = (1, 0, 1)$, $w = (1, 1, 1)$, on a bien des vecteurs 2 à 2 non colinéaires mais en revanche la famille est liée : $u + v - w = 0$.

■ Exemple 15 :

Montrer que la famille $\{f : x \mapsto x, g : x \mapsto e^{-x}, h : x \mapsto 1 + \cos x\} \subset \mathcal{C}^\infty(]-1, +\infty[)$ est une famille libre.

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha f + \beta g + \gamma h = 0 \quad (*)$$

On a

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \forall x > -1, \quad \alpha f(x) + \beta g(x) + \gamma h(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x > -1, \quad \alpha x + \beta e^{-x} + \gamma(1 + \cos x) = 0 \end{aligned}$$

Avec $x = 0$, on obtient $\beta + \gamma = 0$. On propose ensuite de dériver l'expression :

$$\alpha - \beta e^{-x} - \gamma \sin x = 0$$

et donc, en $x = 0$ là aussi, on a $\alpha - \beta = 0$.

Finalement, on propose de passer à la limite en $+\infty$ sur la dérivée et on trouve que, si $\gamma \neq 0$, on arrive à

$$\alpha - \gamma \sin x \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

ce qui est impossible car $\sin$ diverge, sauf dans le cas où $\gamma = 0$.

Au final, on obtient le système

$$\begin{cases} \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Ce qui après une très rapide résolution donne la seule possibilité $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

? Exercice 3

(révisions)

1. Montrer que dans un espace vectoriel, **deux** vecteurs sont linéairement indépendants ssi ils sont non colinéaires.
2. Montrer que dans $\mathbb{K}^3$, les vecteurs $(1, 1, 1)$, $(0, 6, 5)$ et $(-2, 4, 3)$ ne sont pas linéairement indépendants.

Solution

1. Notons u, v deux vecteurs.

• Supposons qu'ils soient colinéaires. Dans ce cas, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = \lambda v$ (ou $v = \lambda u$), auquel cas on a $1 \times u + (-\lambda)v = 0$, (ou $1 \times v + (-\lambda)u = 0$). Dans les deux cas, $a = b = 0$ n'est pas la seule solution à l'équation $au + bv = 0$. Ils ne sont donc pas linéairement indépendants.

• Supposons maintenant qu'ils ne soient pas linéairement indépendants. Il existe donc a, b non tous deux nuls tels que $au + bv = 0$. Si $a \neq 0$, on a alors $u = -\frac{b}{a}v$. Si $b \neq 0$, on a $v = -\frac{a}{b}u$. Dans les deux cas, u et v sont bien colinéaires!

2. On peut tout simplement vérifier que $\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} < 3$ ou alors montrer que le

système $au + bv + cw = 0$ (où u, v, w sont les trois vecteurs considérés) admet au moins une liste de solution (a, b, c) non nulle.

? Exercice 4

Vérifier que dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, les fonctions $f : x \mapsto \cos^2(x)$, $g : x \mapsto \cos(2x)$, $h : x \mapsto 1$ ne sont pas linéairement indépendantes.

Solution

On utilise directement les formules de trigonométrie. En effet, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) = 2\cos^2(x) - 1$$

i.e.

$$g = 2f - h$$

La famille n'est donc pas libre.

? Exercice 5

On note $I =]1, +\infty[$. Montrer que les fonctions $f : x \mapsto \arctan \frac{1-x}{1+x}$, $g : x \mapsto \arctan x$, $h : x \mapsto 1$ dans $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ ne sont pas linéairement indépendantes.

Solution

La relation ne saute pas forcément aux yeux ! Il faut aller chercher les coefficients ! Pour ce faire, on pose $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha f + \beta g + \gamma h = 0$$

Évalué en $x = 0$ et $x = 1$, on obtient le système

$$\begin{cases} \frac{\pi}{4}\alpha + \gamma = 0 \\ \frac{\pi}{4}\beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

qui admet une infinité de solutions $(\alpha, \beta, \gamma) \in \text{Vect}(1, 1, -\frac{\pi}{4})$. Une relation possible est donc peut-être $f + g - \frac{\pi}{4}h = 0$, mais ceci n'est pas démontré pour tout x . Il faut encore le vérifier !

L'étape suivante consiste alors à valider l'égalité pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour ce faire, on peut par exemple procéder de la manière suivante ici :

• On montre que la fonction est constante en montrant que la fonction $f + g - \frac{\pi}{4}h$ est de dérivée nulle (faire le calcul.)

• Il existe alors une constante c telle que $f + g - \frac{\pi}{4}h = c$. En évaluant en $x = 0$, on a $0 = c$. D'où la relation démontrée

$$f + g - \frac{\pi}{4}h = 0$$

Propriété 9

Toute famille de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts est libre.

Démonstration :

Montrons par récurrence sur le nombre n de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ que la famille est libre.

- Initialisation : Soit $n = 1$. P_1 est un polynome non nul. La famille $\{P_1\}$ est donc libre.
- Hérédité : Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons qu'elle est vraie pour $n + 1$. Soient $P_1, \dots, P_{n+1}$ des polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts. Quitte à renommer, on peut supposer que

$$\deg P_1 < \dots < \deg P_{n+1}$$

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{K}$ tels que

$$\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_{n+1} P_{n+1} = 0$$

On note N le degré de P_{n+1} . On a

$$\alpha_{n+1} P_{n+1}(X) = - \underbrace{(\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n)}_{\text{de degré} < N}$$

Comme $\deg P_{n+1} = N$, il est nécessaire que $\lambda_{n+1} = 0$, sinon on aboutit à une contradiction sur les degrés. D'où de plus

$$\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n = 0$$

Or la famille $P_1, \dots, P_n$ est libre par hypothèse de récurrence, d'où

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \lambda_{n+1} = 0.$$

On en conclut donc la liberté de la famille $P_1, \dots, P_{n+1}$. $\square$

II-3 Base

II.3-a) Définition



Définition

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace et $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de vecteurs de E . Si elle est libre et génératrice de E , on dit que c'est une *base* de E .

Propriété 10

- Base canonique de $\mathbb{K}^n$: $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, \dots), (0, 1, 0, \dots), \dots, (\dots, 0, 1)\}$ est une base du $\mathbb{K}$ -ev $\mathbb{K}^n$.
- Base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$: $\mathcal{B} = \{1, X, \dots, X^n\}$ est une base du $\mathbb{K}$ -ev $\mathbb{K}_n[X]$.

Démonstration :

Dans chaque cas, on a trivialement que les $\mathcal{B}$ sont des familles génératrices respectives de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}_n[X]$.

■ Dans le cas de $\mathbb{K}^n$, on montre que la famille est libre avec les techniques habituelles.

■ Dans le cas de $\mathbb{K}_n[X]$, on sait d'après le cours sur les polynômes que la famille est libre car il s'agit d'une famille de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts. $\square$

? Exercice 6

(révisions) Montrer que $\mathcal{B} = \{(1, 3, -1), (2, 1, i), (1, 0, 0)\}$ est une base de $\mathbb{C}^3$.

Solution

On a déjà montré lors d'un exercice précédent que la famille était libre. Le cours de première année nous dit alors que si une famille libre de $\mathbb{C}^3$ est de cardinal $\dim \mathbb{C}^3 = 3$, alors c'est une base. C'est bien le cas ici. La famille est donc bien une base de $\mathbb{C}^3$. (On peut également démontrer le caractère générateur de la famille, mais c'est beaucoup plus long...)

■ Exemple 16 :

Montrons que la famille $\mathcal{F} = (1 + X, 2)$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$.

Pour remarque, on gardera à l'esprit que ce qui est fait ci-dessous ne sera pas, quand nous aurons fini le cours, la stratégie optimale pour montrer ce qui est demandé.

On a tout d'abord $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}_1[X]$ une famille de polynômes de degrés 2 à deux distincts, donc libre.

Montrons ensuite que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_1[X]$:

On pose $P = aX + b \in \mathbb{R}_1[X]$ un polynôme quelconque. $\mathcal{F}$ est génératrice de $\mathbb{R}_1[X]$ ss'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $P = \alpha(1 + X) + \beta \times 2$.

Or,

$$\begin{aligned} P = \alpha(1 + X) + \beta \times 2 &\Leftrightarrow aX + b = \alpha + 2\beta + \alpha X \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = b \\ \alpha = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{1}{2}(b - a) \\ \alpha = a \end{cases} \end{aligned}$$

Étant donné qu'il existe bien une solution à l'équation, la famille est bien génératrice. (Plus tard, on verra de plus que le fait que la solution est unique assure également la liberté de la famille en même temps !)

En conclusion, la famille étant libre et génératrice de $\mathbb{R}_1[X]$, c'est une base de $\mathbb{R}_1[X]$.



Remarque :

Dans certains espaces, on ne peut pas trouver de famille finie vérifiant les propriétés libres et génératrices. (Par exemple, pour $\mathbb{K}[X]$ et $\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.) (démontré pour $\mathbb{K}[X]$ et en conséquence pour $\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.)

Théorème 11

Dans un espace vectoriel E , de toute éventuelle famille génératrice A finie non vide, on peut extraire une base de $F = \text{Vect}(A)$.

Démonstration : admise. $\square$

Commentaires :

Ce théorème dit essentiellement que si un espace vectoriel admet au moins une famille génératrice finie, alors il admet également une base, c'est-à-dire ici une famille libre et génératrice que l'on peut extraire de la famille génératrice "de départ".

■ Exemple 17 :

Soit $A = \{u_1, u_2, u_3\} \subset \mathbb{R}^3$ tels que $u_1 = (1, 0, 2)$, $u_2 = (1, 1, 1)$ et $u_3 = (0, -1, 1)$. On considère $F = \text{Vect}(A)$. Alors A est génératrice finie de F . On peut en extraire une base de F .

On sait que la famille A n'est pas libre et on a

$$u_3 = u_1 - u_2$$

Ainsi, (u_1, u_2) est encore génératrice de F . Or, ce sont deux vecteurs non colinéaires, donc ils sont libres. On a donc la famille

$$B = \{u_1, u_2\} \subset A$$

qui est génératrice de F et libre. C'est bien une base de F extraite de A .

Commentaires :

La technique est donc de retirer des éléments un par un en faisant attention à ce que la famille soit encore génératrice à chaque fois jusqu'à l'obtention d'une famille libre. Dans certains cas, un raisonnement par dimension pourra également être utile et accélérer un peu les choses. (cf p. 10)

III Dimension, rang et recherche de base

III-1 Dimension

Théorème 12

Si un espace vectoriel admet une base de cardinal n , alors toutes les bases de E sont de cardinal n .

Démonstration :

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E . Supposons qu'elles soient de cardinal différent. Quitte à les échanger, on peut supposer que $\text{card } \mathcal{B}' < \text{card } \mathcal{B}$. La base $\mathcal{B}'$ est donc en particulier une famille libre dans l'espace $\text{Vect}(\mathcal{B})$. On va montrer que ceci n'est pas possible, ce qui imposera $\text{card } \mathcal{B}' = \text{card } \mathcal{B}$.

• Montrons par récurrence sur p que "toute famille de $p + 1$ éléments de $F_p = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ est forcément liée dans E ".

* Initialisation : Si $p = 1$:

Soit $G = \{g_1, g_2\}$ une famille de $F_p = \text{Vect}(u)$. Alors il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tels que $g_1 = \alpha u$ et $g_2 = \beta u$.

Si $\alpha = \beta = 0$, alors $g_1 = g_2 = 0$, la famille G est donc liée.

Sinon, l'un des deux au moins est non nul et de plus on a clairement

$$\alpha g_2 - \beta g_1 = \alpha\beta(u - u) = 0$$

La famille G est donc bien liée.

* Hérédité : Supposons que la propriété est vraie pour $p \in \mathbb{N}$:

Soit $G = \{g_1, \dots, g_{p+2}\}$ une famille de $F_{p+1} = \text{Vect}(u_1, \dots, u_{p+1})$. Il existe alors $\lambda_1, \dots, \lambda_{p+2} \in \mathbb{R}$, $v_1, \dots, v_{p+1} \in F_p = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ tels que

$$\begin{aligned} g_1 &= \lambda_1 u_{p+1} + v_1 \\ &\vdots \\ g_{p+1} &= \lambda_{p+1} u_{p+1} + v_{p+1} \\ g_{p+2} &= \lambda_{p+2} u_{p+1} + v_{p+2} \end{aligned}$$

Si $\lambda_1 = \dots = \lambda_{p+1} = \lambda_{p+2} = 0$, alors G est une famille de F_p . En conséquence, par hypothèse de récurrence, $\{g_1, \dots, g_{p+1}\}$ est liée, et donc, la famille $G = \{g_1, \dots, g_{p+2}\}$ est liée.

Sinon, il existe un λ non nul. Quitte à renommer la famille, on peut supposer que c'est λ_{p+2} . En réécrivant la dernière ligne du système ci-dessus, on peut donc exprimer u_{p+1} en fonction de g_{p+2} et de F_p de la manière suivante :

$$u_{p+1} = \frac{1}{\lambda_{p+2}} g_{p+2} - v_{p+2}$$

On réinjecte dans le système :

$$\begin{aligned} g_1 &= \lambda_1 \frac{1}{\lambda_{p+2}} g_{p+2} - v_{p+2} + v_1 \\ &\vdots \\ g_{p+1} &= \lambda_{p+1} \frac{1}{\lambda_{p+2}} g_{p+2} - v_{p+2} + v_{p+1} \\ u_{p+1} &= \frac{1}{\lambda_{p+2}} g_{p+2} - v_{p+2} \end{aligned}$$

On en déduit que $g_1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_{p+2}} g_{p+2}, \dots, g_{p+1} - \frac{\lambda_{p+1}}{\lambda_{p+2}} g_{p+2} \in F_p$. Par hypothèse de récurrence, ces éléments sont liés, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_{p+1}$ non tous nuls tels que

$$\alpha_1 \left(g_1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_{p+2}} g_{p+2} \right) + \dots + \dots \alpha_{p+1} \left(g_{p+1} - \frac{\lambda_{p+1}}{\lambda_{p+2}} g_{p+2} \right) = 0$$

Autrement dit,

$$\alpha_1 g_1 + \dots \alpha_{p+1} g_{p+1} + \left(-\alpha_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_{p+2}} - \alpha_{p+1} \frac{\lambda_{p+1}}{\lambda_{p+2}} \right) g_{p+2} = 0$$

La famille G est donc bien liée.

- On note $n = \text{card } \mathcal{B}$. On vient donc de montrer que toute famille de cardinal $n + 1$ est liée. La famille $\mathcal{B}'$ est de cardinal supérieur ou égal à $n + 1$. Elle contient donc une famille de cardinal $n + 1$ qui sera liée. En conclusion, $\mathcal{B}'$ est liée, ce qui est contradictoire. $\square$



Définition

Un espace vectoriel E est dit de *dimension* n s'il admet une base de cardinal n . On note $\dim E = n$.

On dit qu'un espace vectoriel est de *dimension finie* s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\dim E = n$.

Exemples :

- 18 ■ $\mathbb{K}^n$ est de dimension n , une base est la base canonique $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$
- 19 ■ $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension $n + 1$. Une base est la base canonique $1, X, \dots, X^n$.

Corollaire

Soit E un espace vectoriel de dimension n . Alors :

- i ■ Toute famille libre admet au plus n éléments.
- ii ■ Toute famille génératrice admet au moins n éléments.
- iii ■ Une famille libre de n éléments est une base.
- iv ■ Une famille génératrice de n éléments est une base.

Démonstration :

- i) : C'est ce qui a été fait dans la démonstration du théorème précédent.
- ii) : S'il existe une famille génératrice avec $r < n$ éléments, alors on peut en extraire une base de cardinal $s \leq r$ et donc $s < n$, ce qui est impossible.
- iii) : On note $\mathcal{F}$ une famille libre à n éléments non génératrice. Alors il existe $v \in E$ tel que $v \notin \text{Vect}(\mathcal{F})$. Ainsi, la famille $\mathcal{F} \cup \{v\}$ est une famille libre contenant $n + 1$ élément, ce qui contredit i.)
- iv) On note $\mathcal{F}$ une famille génératrice à n éléments. Si elle n'est pas libre, alors on peut retirer un élément v de manière à ce qu'elle reste encore génératrice. On peut ensuite extraire une base de la famille $\mathcal{F} \setminus \{v\}$ qui sera donc de cardinal $\leq n - 1 < n$, ce qui est contradictoire. $\square$

Dit autrement :

- i ■ Si E admet une famille libre de cardinal p , alors $\dim E \geq p$.
- ii ■ Si E admet une famille génératrice de cardinal p , alors $\dim E \leq p$.
- iii ■ Si E admet une famille libre de cardinal p qui n'est pas génératrice, alors $\dim E > p$.
- iv ■ Si E admet une famille génératrice de cardinal p qui n'est pas libre, alors $\dim E < p$.

Voici un exemple d'utilisation de ces propriétés dans le cadre de la recherche d'une base par extraction d'une famille libre déjà vu autrement :

Exemple 20 :

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. Alors la famille $\mathcal{F} = \{2, 3 + X, X^2 - 1, X^3 + 2X - 4\}$ est une base de E :

En effet, la famille étant une famille de polynômes non nuls de degrés 2 à 2 distincts, elle est donc libre.

De plus,

$$\text{card } \mathcal{F} = 4 = \dim \mathbb{R}_3[X].$$

Ainsi, les deux arguments réunis font que c'est bien une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Ces résultats peuvent nous servir également à une justification lors de l'extraction d'une base. Par exemple :

Exemple 21 :

Soit $A = \{u_1, u_2, u_3\} \subset \mathbb{R}^3$ tels que $u_1 = (1, 0, 2)$, $u_2 = (1, 1, 1)$ et $u_3 = (0, -1, 1)$. On considère $F = \text{Vect}(A)$. Alors A est génératrice finie de F par définition. On peut en extraire une base de F .
 A contient deux vecteurs non colinéaires u_1 et u_2 . Ainsi, (d'après i))

$$\dim F \geq 2$$

De plus, on peut montrer que A n'est pas libre (mais génératrice), donc (Ppé iv))

$$\dim \text{Vect}(A) < \text{card}(A) = 3$$

Ainsi :

$$\dim \text{Vect}(A) = 2$$

Or, $B = \{u_1, u_2\}$ est une famille libre de cardinal $2 = \dim \text{Vect}(A)$, c'est donc une base de F extraite de A . (iii))

Proposition 13

Soit F un sous espace vectoriel d'un ev E de dimension finie n . Alors, F est de dimension finie et

$$\dim F \leq \dim E.$$

Démonstration :

Soit $\mathcal{B}$ une base de F . Alors $\mathcal{B} \subset E$ et c'est donc une famille libre de E . Ainsi, $\dim E \geq \text{card}(\mathcal{B}) = \dim F$. $\square$

Corollaire

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E , alors

$$F = G \iff (F \subset G \text{ et } \dim F \geq \dim G)$$

■ Exemple 22 :

Dans $\mathbb{R}[X]$, on pose $A = \{X, X - 1\}$. $\text{Vect}(A) = \mathbb{R}_1[X]$:

On a trivialement $A \subset F \Rightarrow \text{Vect}(A) \subset F$. Maintenant, comme $X, X - 1$ sont non colinéaires, ils sont libres et donc

$$\dim A \geq 2 = \dim F, \quad \text{Ainsi, } F = A.$$

III-2 Rang d'une famille

■ Définition

On appelle *rang* d'une famille A la dimension de l'espace vectoriel qu'elle engendre. On note $rg(A)$.

■ Exemples :

23 ■ $rg\{1, 2X + 1\} = 2$

24 ■ $rg\{(1, 1, 0), (3, 3, 0)\} = 1$

⚠ Remarque :
Les propriétés de la partie précédente nous permettent de dire que :

Propriété 14

i ■ $rg(a_1, \dots, a_p) \leq p$.

ii ■ $rg(a_1, \dots, a_p) < p$ ssi la famille $\{a_1, \dots, a_p\}$ n'est pas libre.

iii ■ $rg(a_1, \dots, a_p) = p$ ssi la famille $\{a_1, \dots, a_p\}$ est libre.

iv ■ $rg(a_1, \dots, a_p) = p$ ssi la famille $\{a_1, \dots, a_p\}$ est une base.

Démonstration :

i) : issue du ii) du Corollaire p.10

ii) : Si la famille $A = \{a_1, \dots, a_p\}$ est libre, alors elle est libre et génératrice de $\text{Vect}(A)$, donc

$$rg(A) = \dim \text{Vect}(A) = p$$

Ainsi, on obtient

$$rg(a_1, \dots, a_p) < p \Rightarrow \text{la famille } \{a_1, \dots, a_p\} \text{ n'est pas libre.}$$

Si la famille $A = \{a_1, \dots, a_p\}$ n'est pas libre, alors c'est la propriété iv) du Corollaire p.10 qui nous dit que

$$rg(a_1, \dots, a_p) = \dim \text{Vect}(A) < p$$

iii) : conséquence directe de i) et ii)

iv) : La famille $(a_1, \dots, a_p)$ est nécessairement génératrice de $\text{Vect}(A)$. C'est donc une conséquence immédiate de iii). $\square$

III-3 Théorème de la base incomplète

Théorème 15 de la base incomplète

Supposons que E est un $\mathbb{K}$ -ev dans il existe une famille génératrice finie. Alors, toute famille libre de E peut être complétée en une base de E .

Démonstration : admise. $\square$

■ Exemple 25 :

Dans $\mathbb{R}^3$, on veut compléter $\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ en une base $\mathbb{R}^3$.

On connaît une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ qui est la base canonique :

$$\mathcal{G} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ainsi que la dimension de $\mathbb{R}^3$: $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, ce qui va nous simplifier la tâche !

On va donc compléter la famille $\mathcal{L}$ par des éléments de $\mathcal{G}$ en veillant à garder une famille libre jusqu'à obtenir une famille génératrice. Ici, connaissant la dimension, on va donc compléter jusqu'à obtention d'une famille libre de cardinal 3.

Par exemple, on constate que

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

est une famille libre de cardinal 3 dans $\mathbb{R}^3$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

■ Exemple 26 :

On souhaite compléter la famille $\mathcal{L} = (3, 1 + X, X + X^2)$ en une base de $\mathbb{R}_4[X]$.

Pour commencer, $\mathcal{L}$ est libre par famille de polynômes non nuls de degrés 2 à 2 distincts. L'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_4[X]$ de dimension 5 admet comme famille génératrice $\mathcal{G} = (1, X, X^2, X^3, X^4, X^5)$.

On peut donc avec les mêmes arguments que tout à l'heure la compléter en une base de $\mathbb{R}_4[X]$:

$$= (3, 1 + X, X + X^2, X^3, X^4, X^5)$$

IV Coordonnées

IV-1 Unicité de la décomposition dans une base

Théorème 16 de décomposition dans une base

Soit E un espace vectoriel.

La famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ d'éléments de E est une base de E si et seulement si, pour tout vecteur $u \in E$, il existe une unique décomposition $u = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$.

Démonstration :

• Supposons que $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E . Supposons qu'il existe un élément $u \in E$ ayant deux décompositions $u = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ et $u = \alpha'_1 e_1 + \dots + \alpha'_n e_n$.

Ainsi, en soustrayant les deux égalités, on obtient

$$(\alpha_1 - \alpha'_1)e_1 + \dots + (\alpha_n - \alpha'_n)e_n = 0_E$$

La famille $(e_1, \dots, e_n)$ étant libre, on obtient par définition

$$\alpha_1 - \alpha'_1 = \dots = \alpha_n - \alpha'_n = 0$$

• Supposons que toute décomposition est unique. Montrons que la famille est libre :

Supposons qu'il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tel que

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = 0_E$$

Par unicité de la décomposition, comme $0_E = 0e_1 + \dots + 0e_n$, on obtient

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

? Exercice 7

D'après l'exercice précédent, on sait que $\mathcal{B} = \{(1, 3, -1), (2, 1, i), (1, 0, 0)\}$ est une base de $\mathbb{C}^3$. Déterminer l'unique décomposition de $(0, 4, -1 + i)$ dans cette base $\mathcal{B}$.

Solution

A vue, on constate que $\underbrace{(1, 3, -1)}_{u_1} + \underbrace{(2, 1, i)}_{u_2} - 3 \underbrace{(1, 0, 0)}_{u_3} = (0, 4, -1 + i)$

D'où

$$(0, 4, -1 + i) = u_1 + u_2 - 3u_3$$

On sait que c'est la seule décomposition possible car $\mathcal{B}$ est une base.

? Exercice 8

Montrer que la famille de polynômes $\{3 + X, X, X^2 + 1\}$ est une base de $\mathbb{K}_2[X]$ et déterminer l'unique décomposition de 1 dans $1 + X - 2X^2$ dans cette base.

Solution

Soient $P = a + bX + cX^2$ un polynôme quelconque de $\mathbb{K}_2[X]$ et $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$. Alors

$$P = \alpha(3 + X) + \beta X + \gamma(1 + X^2) \quad \begin{array}{c} \Leftrightarrow \\ \text{par identification} \end{array} \quad P = (3\alpha + \gamma) + (\alpha + \beta)X + \gamma X^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3\alpha + \gamma \\ b = \alpha + \beta \\ c = \gamma \end{cases} \quad \Leftrightarrow \dots$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{3}(a - c) \\ \beta = \frac{1}{3}(a - c) - b \\ \gamma = c \end{cases}$$

Il existe donc une seule et unique solution à la décomposition de P pour tout P . La famille $\{3 + X, X, X^2 + 1\}$ est donc une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

De plus, la décomposition de $1 + X - 2X^2$ est obtenue directement avec les coefficients $a = b = 1, c = -2$ ci-dessus :

$$1 + X - 2X^2 = 1 \cdot (3 + X) - 0 \cdot X - 2 \cdot (X^2 + 1)$$



Remarque :

Si la famille $\{e_1, \dots, e_n\}$ n'est pas libre, la décomposition n'est pas unique. (cf. exemple ci-dessous.)

■ Exemple 27 :

Supposons que $e_1 = (1, 0, 2)$, $e_2 = (1, 1, 1)$ et $e_3 = (0, -1, 1)$. **La famille n'est pas libre** car

$$e_3 = e_1 - e_2$$

On a alors par exemple

$$e_1 + e_2 + e_3 = (2, 0, 4) = 2e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

La décomposition n'est donc pas unique.



Remarque :

Si la famille $\{e_1, \dots, e_n\}$ n'est pas génératrice de l'espace E , la décomposition de $x \in E$ n'est pas toujours possible. (cf. exemple ci-dessous.)

■ Exemple 28 :

Supposons que $e_1 = (1, 0, 2)$, $e_2 = (1, 1, 1)$. **La famille n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$** . (Elle est de cardinal $2 < 3$; cf. p.10).

Le vecteur $x = (1, 0, 0)$ par exemple ne se décompose pas grâce à e_1 et e_2 .

En effet, supposons qu'une décomposition existe :

$$(1, 0, 0) = \alpha(1, 0, 2) + \beta(1, 1, 1)$$

Alors, par unicité des coefficients d'un vecteur de $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{cases} 1 = \alpha + \beta \\ 0 = \beta \\ 0 = 2\alpha + \beta \end{cases}$$

Ce qui donne $1 = \alpha = 0$. C'est absurde. **La décomposition n'existe donc pas.**

IV-2 Notion de coordonnées



Notation :

Si E est un espace vectoriel admettant une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, tout vecteur $u \in E$ admet une unique décomposition dans la base $\mathcal{B}$: $u = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$.

Pour des raisons de lourdeur d'écriture, on préfère généralement se débarrasser des notations $e_1, \dots, e_n$. On écrit alors à la place :

$$u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)_{\mathcal{B}}$$

■ Exemples :

29 ■ Dans $\mathbb{R}^3$, on note $\mathcal{B} = ((1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1))$ (base de $\mathbb{R}^3$), alors

$$(2, 1, -1)_{\mathcal{B}} = 2 \cdot (1, 1, 0) + 1 \cdot (0, 1, 1) - 1 \cdot (1, 0, 1) = (1, 3, 0)$$

30 ■ Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ et $\mathcal{B}' = (1, X-1, X^2)$ deux bases de $\mathbb{R}_3[X]$.

$$(2, -3, 2)_{\mathcal{B}} = 2 - 3X + 2X^2 = -1 \cdot 1 - 3 \cdot (X-1) + 2 \cdot X^2 = (-1, -3, 2)_{\mathcal{B}'}$$

Commentaires :

Ceci amène également à la définition suivante, qui nous permet de nous ramener à $\mathbb{K}^n$ et qui nous sera bien utile dans les futures formules matricielles :



Définition

On appelle $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ les **coordonnées** de $u = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et on note

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

le vecteur associé, nommé **vecteur coordonnées** de u dans $\mathcal{B}$



Notation :

Dans le même cadre, il arrive souvent de voir également le vecteur en ligne :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad \text{au lieu de} \quad M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$



NÉANMOINS

> seule **l'écriture en colonne** sera utilisée dans les calculs matriciels à venir.



Remarque :

$M_{\mathcal{B}}(u) \in \mathbb{K}^n$ et $u \in E$. Généralement, (sauf si $E = \mathbb{K}^n$ et que $\mathcal{B}$ est la base canonique), on a donc

$$M_{\mathcal{B}}(u) \neq u$$

Ce sont donc **deux objets différents** à différencier avec précaution dans les calculs.

■ Exemples :

31 ■ Dans $\mathbb{K}^3$, on note $\mathcal{B} = ((1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1))$ (base de $\mathbb{K}^3$), alors si

$$M_{\mathcal{B}}(u) = (2, 1, -1)$$

$$\text{on a} \quad u = 2 \cdot (1, 1, 0) + 1 \cdot (0, 1, 1) - 1 \cdot (1, 0, 1) = (1, 3, 0)$$

On voit bien que

$$u \neq M_{\mathcal{B}}(u)$$

32 ■ Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ et $\mathcal{B}' = (1, X-1, X^2)$ deux bases de $\mathbb{R}_3[X]$.

Si

$$M_{\mathcal{B}}(u) = (2, -3, 2)$$

alors

$$u = 2 - 3X + 2X^2 = -1 \cdot 1 - 3 \cdot (X-1) + 2 \cdot X^2$$

d'où

$$M_{\mathcal{B}'}(u) = (-1, -3, 2)$$

Là encore, $u \neq M_{\mathcal{B}}(u)$, $u \neq M_{\mathcal{B}'}(u)$ et en toute logique $M_{\mathcal{B}}(u) \neq M_{\mathcal{B}'}(u)$.

IV-3 Changement de base

On se donne deux bases $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ et on suppose ici que l'on dispose des coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$, c'est-à-dire

$$M_{\mathcal{B}}(e'_k) = (\alpha_{1,k}, \dots, \alpha_{n,k}) \quad \forall k = 1, \dots, n$$

■ Exemple 33 :

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on considère les bases

$$\mathcal{B} = (1, X, X^2) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}' = (\underbrace{1}_{e'_1}, \underbrace{X-1}_{e'_2}, \underbrace{(X-1)(X-2)}_{e'_3})$$

où on a alors

$$M_{\mathcal{B}}(e'_1) = (1, 0, 0), \quad M_{\mathcal{B}}(e'_2) = (-1, 1, 0), \quad M_{\mathcal{B}}(e'_3) = (2, -3, 1)$$

On se pose la question suivante :

Ayant les coordonnées d'un vecteur u dans l'une des deux bases, comment trouver les coordonnées de u dans l'autre ?

IV.3-a) Si on a les coordonnées de u dans $\mathcal{B}'$ et on veut $M_{\mathcal{B}}(u)$

i.e. on a $u = \mu_1 e'_1 + \dots + \mu_n e'_n$ et on cherche $u = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$:

Méthode n° 1 : On développe :

On connaît $M_{\mathcal{B}'}(u) = (\mu_1, \dots, \mu_n)$. Alors

$$u = \mu_1 e'_1 + \dots + \mu_n e'_n = \mu_1 (\text{expression de } e'_1 \text{ en fonction des } e_i) + \dots$$

■ Exemple 34 :

Dans les mêmes bases que dans l'exemple précédent, on cherche les coordonnées du polynôme T tel que $M_{\mathcal{B}'}(T) = (2, 0, 1)$ dans la base canonique $\mathcal{B}$, c'est-à-dire les coefficients α, β, γ tels que

$$T = \alpha e_1 + \beta e_1 + \gamma e_3 = \alpha + \beta X + \gamma X^2$$

On a

$$T = 2 + 0 \cdot (X-1) + 1 \cdot (X-1)(X-2) = 2 + (X^2 - 3X + 2) = X^2 - 3X + 4$$

D'où

$$M_{\mathcal{B}}(T) = (4, -3, 1)$$

Méthode n° 2 : Calcul matriciel

On écrit la matrice composée de l'ensemble des coordonnées de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$:

$$M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{matrix} & \begin{matrix} e'_1 & \dots & e'_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} & \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & & \\ \alpha_{n,1} & \dots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

■ Exemple 35 :

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on note encore $\mathcal{B}$ la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ et :

$$\mathcal{B}' = (\underbrace{1}_{e'_1}, \underbrace{X-1}_{e'_2}, \underbrace{(X-1)(X-2)}_{e'_3}). \quad \text{alors} \quad M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{matrix} & \begin{matrix} e'_1 & e'_2 & e'_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ X \\ X^2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Toujours avec $M_{\mathcal{B}'}(T) = (2, 0, 1)$, on a $T = 2e'_1 + 0e'_2 + 1e'_3$. Matriciellement, ceci donne

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}}(T) &= 2M_{\mathcal{B}}(e'_1) + 0M_{\mathcal{B}}(e'_2) + 1M_{\mathcal{B}}(e'_3) \\ &= 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{M_{\mathcal{B}'}(T)} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On observe alors ci-dessus ici pour résumer que :

$$M_{\mathcal{B}}(T) = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') M_{\mathcal{B}'}(T)$$

Ce principe se généralise en fait à tous les cas possibles :



Définition

Étant données deux bases $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ telles que

$$e'_k = (\alpha_{1,k}, \dots, \alpha_{n,k})_{\mathcal{B}} \quad \forall k = 1, \dots, n$$

on note

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{matrix} & \begin{matrix} e'_1 & \dots & e'_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} & \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \dots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

qu'on appelle *matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$* .

Théorème 17 (Formule de changement de base)

Étant donné un espace vectoriel E et deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, pour tout $u \in E$, on a

$$M_{\mathcal{B}}(u) = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')M_{\mathcal{B}'}(u)$$

avec $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ inversible.

Démonstration :

Réécrire l'exemple ci-dessus avec des valeurs générales ! L'inversibilité sera justifiée à la fin du chapitre. $\square$

■ Exemple 36 :

Si $\mathcal{B}' = \{(1, 0, 2), (0, 1, 1), (1, -1, 0)\}$ et $u = (-1, 0, 1)_{\mathcal{B}'}$, alors les coordonnées de u dans la base canonique sont :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

i.e. $u = (0, -1, -2)$.

IV.3-b) Si on a les coordonnées de u dans $\mathcal{B}$ et on veut $M_{\mathcal{B}'}(u)$

i.e. on a $u = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ et on cherche $u = \mu_1 e'_1 + \dots + \mu_n e'_n$:

■ Exemple 37 :

Dans $\mathbb{R}_3[X]$, avec toujours $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ et : $\mathcal{B}' = (\underbrace{1}_{e'_1}, \underbrace{X-1}_{e'_2}, \underbrace{(X-1)(X-2)}_{e'_3})$,

on cherche les coordonnées du polynôme $T = X^2 - 3X + 4$ dans la base $\mathcal{B}'$, c'est-à-dire les coefficients α, β, γ tels que

$$T = \alpha e'_1 + \beta e'_2 + \gamma e'_3 = \alpha + \beta(X-1) + \gamma(X-1)(X-2)$$

Méthode n° 1 : Par résolution de système

On développe l'expression de droite, et on résout les équations obtenues pour trouver les coefficients μ_i .

■ Exemple 38 :

Dans l'exemple précédent, on a

$$X^2 - 3X + 4 = (\alpha - \beta + 2\gamma) + X(\beta - 3\gamma) + \gamma X^2$$

La famille $(1, X, X^2)$ étant libre, il y a unicité des coefficients et on peut identifier :

$$\begin{cases} 1 &= \gamma \\ -3 &= \beta - 3\gamma \\ 4 &= \alpha - \beta + 2\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \text{résolution...} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha &= 2 \\ \beta &= 0 \\ \gamma &= 1 \end{cases}$$

Méthode n° 1 : Par inversion de matrice

On a vu tout à l'heure que $M_{\mathcal{B}}(u) = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')M_{\mathcal{B}'}(u)$. Alors

$$M_{\mathcal{B}'}(u) = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')^{-1}M_{\mathcal{B}}(u)$$

En effet, si on note $P = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$, comme elle est inversible, en multipliant à gauche par P^{-1} l'égalité $M_{\mathcal{B}}(u) = PM_{\mathcal{B}'}(u)$, on obtient ce qui est dit dans la méthode.

■ Exemple 39 :

On considère la base de $\mathbb{R}_2[X]$: $\mathcal{B}' = (1, X-1, (X-1)(X-2))$. On cherche les coordonnées du polynôme $X^2 - 3X + 4$ dans cette base.

$$\text{On pose } P = \begin{matrix} & \begin{matrix} e'_1 & \dots & e'_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ X \\ X^2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad P \text{ est inversible avec } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

alors les coordonnées de $X^2 - 3X + 4$ dans la base $\mathcal{B}'$ sont :

$$M_{\mathcal{B}'}(T) = P^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

IV.3-c) Propriétés des matrices de passage

Pour commencer, on peut remarquer que les passages de bases s'enchaînent telle une relation de Chasles (ceci sera ssimplement dans le cadre des applications linéaires) :

Proposition 18

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, avec $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ trois bases de E . Alors

$$M_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})M_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}) = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{D})$$

Démonstration : admise. $\square$

Commentaires :

| En bref : passer de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ puis de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{D}$ revient à passer de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{D}$.

Corollaire

Étant donné un espace vectoriel E et deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, la matrice de passage $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ est inversible et on a

$$M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')^{-1} = M_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$$

Démonstration :

D'après la proposition, on a $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')M_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = Id$ (à méditer !)

De même, $M_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = M_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}') = Id$. CQFD $\square$