

Densités

EXERCICE 1: [Indications] - Cours - Calculer -

Soit $f(x) = \frac{\alpha}{e^x + e^{-x}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- Justifier qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que f soit la densité d'une variable aléatoire X et déterminer sa valeur.
- Expliciter la fonction de répartition de X .

EXERCICE 2: [Indications] - Cours - Calculer - On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } |x| \geq 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Existe-t-il $C \in \mathbb{R}$ de sorte que $g = Cf$ soit une densité d'une variable aléatoire X . (Si oui, déterminer C .)
- Supposons que X soit une variable aléatoire de densité g .
 - Déterminer $P(2X^2 - 5X + 2 \leq 0)$.
 - Déterminer la fonction de répartition de X .
 - Retrouver, grâce à la fonction de répartition, $P(2X^2 - 5X + 2 \leq 0)$.
 - X admet-elle une espérance? une variance?

EXERCICE 3: [Indications] - Chercher - Calculer -

☆☆

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = C \left(1 - e^{-\frac{1}{x^2}}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

Déterminer C de sorte que f définisse une densité de probabilités sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 4: [Indications] - Cours -

On pose $F(x) = \begin{cases} Ae^{x-1} & \text{si } x \leq 1 \\ 1 - \frac{A}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- Déterminer $A \in \mathbb{R}$ tel que F soit une fonction de répartition.
- On suppose que X est une variable de fonction de répartition F . Montrer que X est à densité et la déterminer.

EXERCICE 5: [Indications] - Raisonner - Soit X une V.A.R. admettant pour densité f . (On pourra supposer f continue sur $\mathbb{R}$.)

- Montrer que $|X|$ est V.A.R. admettant pour densité :

$$\text{i.e.} \quad x \mapsto \begin{cases} (f(x) + f(-x)) \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(x) \\ (f(x) + f(-x)) \text{ si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Montrer que X^2 est V.A.R. admettant pour densité :

$$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}} (f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})) \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(x).$$

EXERCICE 6: [Indications] - Calculer - Cours - Soit $\lambda > 0$. Le temps de survie d'une savonnette mesuré en jours est une variable aléatoire T définie par sa densité de probabilité

$$f(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t} \quad \forall t \geq 0$$

- Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
- Déterminer la fonction de répartition F de T .
- On suppose que $E(T) = 20$. Calculer λ .
- Calculer la probabilité pour qu'une savonnette dure plus de 30 jours sachant qu'elle est toujours là au bout de 10 jours.

Autour de la loi uniforme

EXERCICE 7: [Indications] - Raisonner - Chercher - Quand on met une rallonge à la table de la salle à manger, la nappe est trop courte de 10cm pour couvrir la table. On la dispose alors en laissant deux bandes de table non convertes à chaque extrémité. La position de la nappe par rapport aux extrémités de la table est laissée au hasard. La variable aléatoire X égale à la largeur de l'espace découvert d'une extrémité suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0; 10]$. On note Y la largeur découverte la plus grande et Z la plus petite.

- Déterminer la loi de probabilité de Y .
- Déterminer la loi de probabilité de Z .

EXERCICE 8: [Indications] - Cours - Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[-1; 1]$. Déterminer la loi de $\frac{X}{2}, \frac{Y}{2}$ puis $\frac{X+Y}{2}$.

EXERCICE 9: [Indications] Loi exponentielle; sans mémoire

Un sous-marin voyage en plongée, mais doit cependant refaire surface de temps en temps pour prendre l'air et renouveler l'atmosphère. On suppose que la durée d'une plongée en jours suit une loi exponentielle de paramètre λ . En dépouillant tous les livres de bord, on constate que 88,7% des plongées ont duré plus de 6 jours.

1. Donner une estimation du paramètre λ .
2. Calculer la probabilité pour qu'une plongée dépasse une semaine.
3. Sachant que le sous-marin évolue immergé depuis une semaine, calculer la probabilité pour que la durée dépasse 13 jours.

EXERCICE 10: [Indications] – Calculer – Cours – Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre θ .

1. Montrer que $X + Y$ est à densité, et en déterminer une densité.
2. Montrer que X^3 est à densité, et en déterminer une densité.
3. Montrer que $\min(X, Y^3)$ est à densité. (On ne demande pas de la calculer.)
4. Montrer que $X - Y$ est à densité et déterminer une densité de $X - Y$. ☆

EXERCICE 11: [Indications] – Calculer – Modéliser – Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1[$.

1. Calculer, pour $\lambda > 0$, la fonction de répartition de la variable aléatoire

$$X = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$$

et en déduire sa loi.

2. En déduire un programme permettant de simuler une variable aléatoire de loi exponentielle.

EXERCICE 12: [Indications] – Cours – Raisonner – Calculer – (Dans cet exercice, on ne tiendra pas compte des années bissextiles.)

Le président des Etats-Unis se prépare à décréter l'embargo économique contre Cuba. (Situation hypothétique!) Ses conseillers ont estimé que la durée de la crise suivrait une loi exponentielle de moyenne quatre ans. On suppose exacte cette estimation.

1. Déterminer le paramètre de la loi de T , nombre d'années d'embargo.
2. On note X le nombre de jours d'embargo. Traduire l'énoncé à l'aide de X .
3. Sachant qu'il fume deux cigares par jour, calculer le nombre minimum de boîtes de 500 Havanes qu'il doit faire acheter par sa secrétaire pour ne pas en manquer, avec une probabilité supérieure à 0.95.

EXERCICE 13: [Indications] – Calculer – Modéliser – Soit A une V.A.R. suivant la loi $\mathcal{N}(5, 2)$.

1. Déterminer $P(A \leq 5)$
2. a) Déterminer $P(A \leq 6)$
b) En déduire $P(5 \leq A \leq 6)$
c) En déduire $P(4 \leq A \leq 6)$
3. a) Déterminer le nombre z_1 tel que $P(A \leq z_1) = 0,95$
b) En déduire le nombre z_2 tel que $P(A > z_2) = 0,95$
4. Déterminer le nombre z_3 tel que $P(|A - 5| \leq z_3) = 0,9$

EXERCICE 14: [Indications] – Calculer – Raisonner – Soit X une v.a. de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Soit $Z = e^X$. Montrer que Z est une variable aléatoire à densité, dont on déterminera une densité f^Z . (Cette loi s'appelle la loi log-normale.)
2. Montrer que Z admet des moments de tous ordres. Les calculer. ☆
3. En déduire l'espérance et la variance de Z .

EXERCICE 15: [Indications] – Cours – Soit X une v.a. de loi $\mathcal{N}(2, 1)$, déterminer la loi de

1. $Y = -X$.
2. $Y = 3X$.
3. $Y = X + b$

EXERCICE 16: [Indications] – Cours – Mobiliser – Louise achète 9 sacs de blé à Robert d'une contenance étiquetée de 80kg chacun. (Elle s'attend donc à avoir 720kg de blé...) Robert d'étant pas toujours attentif, la masse du blé contenu dans un sac suit en réalité une loi normale $\mathcal{N}(80; 0.25)$. Soit X la quantité de blé, en kilogrammes, que Robert lui a effectivement vendu.

1. Établir la loi de X .
2. Calculer la probabilité pour que Louise ait acheté en réalité moins de 720 kg de blé.
3. Dans le mois qui suit, les souris mangent en moyenne 50 kg de blé avec un écart-type de 20kg. En supposant que cette perte due aux rongeurs suit une loi normale, on note Y la quantité de blé qui lui restera au bout du mois, quand elle commencera à l'utiliser pour nourrir ses poules. Établir la loi de Y .

4. a) Déterminer a tel que $\Phi(a) = 0.05$ (où Φ est la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite.)
- b) Chaque poule picore en moyenne 150 grammes de blé par jours, avec un écart-type de 50, en suivant une loi normale. Quelle est la loi de la quantité de blé mangée en un an par une poule ? (*On suppose que le chat a mangé les souris.*)
- c) Combien Louise peut-elle nourrir de poules au maximum pendant un an (année non bissextile), avec une probabilité égale à 0.95 de ne pas manquer de grain ?

EXERCICE 17: [Indications] Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t^2+3t-1} dt$.

Divers

EXERCICE 18: [Indications] – *Chercher – Raisonner* – Soit X une variable aléatoire. à densité.

1. Supposons que X soit de carré intégrable (i.e. admet un moment d'ordre 2). Démontrer qu'il existe un unique réel x_0 tel que la fonction $g : x \mapsto E((X - x)^2)$ soit minimum en ce point. Déterminer x_0 et $g(x_0)$. ☆
2. On appelle médiane de X un réel m tel que

$$P(X \geq m) \geq \frac{1}{2} \quad P(X \leq m) \geq \frac{1}{2}.$$

- a) Montrer que $\inf\{x \in \mathbb{R} \mid P(X \leq x) \geq \frac{1}{2}\}$ existe. ☆
- b) Posons $m = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid P(X \leq x) \geq \frac{1}{2}\}$. Montrer que m est une médiane. ☆☆
- c) Supposons que la variable X soit à densité. Montrer que, si m est une médiane, alors

$$P(X \geq m) = P(X \leq m) = \frac{1}{2}$$

- d) Montrer qu'en général, une médiane n'est pas forcément unique. (On pourra examiner par exemple une variable aléatoire finie.)

Indications

Exercice 1

1. Un changement de variable en par exemple $u = e^x$ serait bienvenu.

Exercice 3

On pensera à se ramener à l'intégrale connue $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$. (Valeur à rappeler.)

Pour ce faire, essayer un changement de variable puis une intégration par partie.

Exercice 7

1. Exprimer Y en fonction de X . $Y = \begin{cases} X & \text{si } X \geq 5 \\ 10 - X & \text{si } X < 5 \end{cases} = \sup(X, 10 - X)$
2. Pour ne pas avoir à tout recommencer, chercher une relation entre Y et Z .

Exercice 10

2. Commencer par déterminer la fonction de répartition de X^3 .
4. Utiliser un exercice de cours pour déterminer la densité de $-Y$.

Exercice 12

3. Plutôt que de calculer le nombre de cigares, on pourra calculer le nombre n de jours pour lesquels la probabilité que l'embargo ne dure pas plus de n jours soit supérieure à 0,95.

Exercice 16

4. c) Déterminer la loi de la quantité de grain T mangée par n poules en un an. Puis se ramener à une variable suivant une loi normale centrée réduite pour pouvoir utiliser la table de la loi normale.

Exercice 18

2. a) Montrer que l'inf existe revient à montrer que l'ensemble est non vide et minoré.
- b) On rappelle que si $m = \inf A$, alors il existe une suite (m_n) d'éléments de A tels que $\lim_{n \rightarrow +\infty} m_n = m$.