

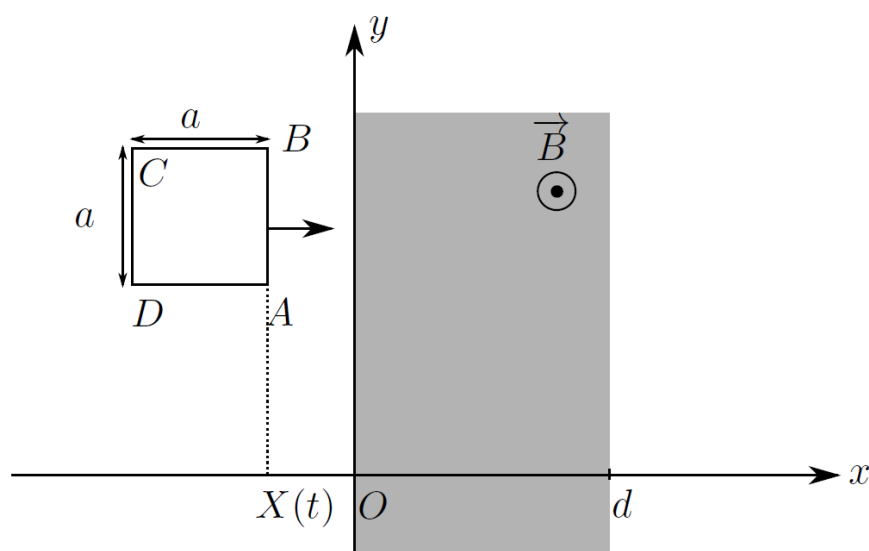
TD S9 : Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire

Table des matières

1 Déplacement d'un cadre conducteur	1
2 Oscillations de barres sur des rails	1
2.1 Rails de Laplace sans générateur	1
2.2 Rails de Laplace avec générateur	2
2.3 Oscillations d'une barre plongée dans un champ magnétique	3
2.4 Oscillations de deux barres plongées dans un champ magnétique	3
3 Modélisation d'un générateur d'énergie électrique	4

1 Déplacement d'un cadre conducteur

On suppose que le champ magnétique $\vec{B} = B\vec{u}_z$ est uniforme et constant entre les plans ($x = 0$) et ($x = d$), et nul ailleurs.



Un cadre conducteur carré, de côté a ($a < d$), de résistance totale R et de côtés parallèles aux axes (Ox) et (Oy), circule avec une vitesse constante $\vec{v} = v\vec{u}_x$. On désigne par $X(t)$ l'abscisse du côté avant du cadre. Déterminer en fonction de $X(t)$ le courant i et la force électromagnétique $\vec{F}$ résultante qui s'exerce sur le cadre :

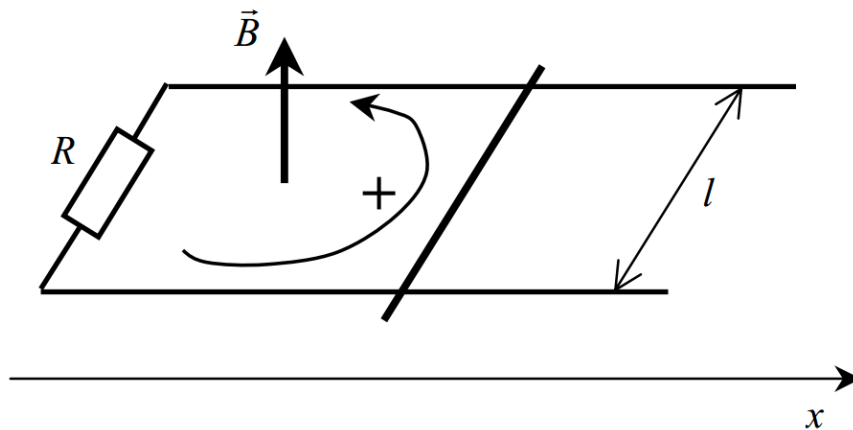
1.1. En utilisant la loi de FARADAY.

1.2. Par un bilan énergétique.

2 Oscillations de barres sur des rails

2.1 Rails de Laplace sans générateur

Une barre de masse m peut glisser sans frottements sur des rails parallèles, distants de ℓ , disposés comme sur la figure ci-dessous. En $x = 0$, les rails sont reliés par un conducteur. L'ensemble des rails, de la barre et du conducteur forme donc un circuit fermé. La résistance électrique de ce circuit est représentée par une résistance constante R localisée sur le conducteur reliant les deux rails. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique stationnaire et uniforme $\vec{B}$. On définit un sens de circulation positive sur le circuit comme indiqué sur la figure. Si un courant parcourt le circuit, l'intensité sera comptée positivement si et seulement si le courant circule effectivement dans le sens positif choisi. On néglige entièrement les phénomènes d'auto-induction. La barre est lancée avec la vitesse initiale $v_0 > 0$ dans le sens des x croissants. Soit $v(t) = \dot{x}(t)$ la vitesse de la barre à un instant t .



2.1.1. En appliquant la loi de LENZ-FARADAY, déterminer l'expression de la f.é.m. induite dans le circuit à un instant t quelconque en fonction de v , B et ℓ .

2.1.2. Si la barre est parcourue par un courant d'intensité i , comptée algébriquement, déterminer la composante selon Ox de la force de Laplace subie par la barre.

2.1.3. Faire un schéma électrique équivalent et en déduire l'équation électrique du circuit.

2.1.4. Déterminer l'équation mécanique par application du principe fondamental de la dynamique.

2.1.5. En déduire l'équation différentielle vérifiée par la vitesse v de la barre. On posera :

$$\tau = \frac{mR}{B^2\ell^2}$$

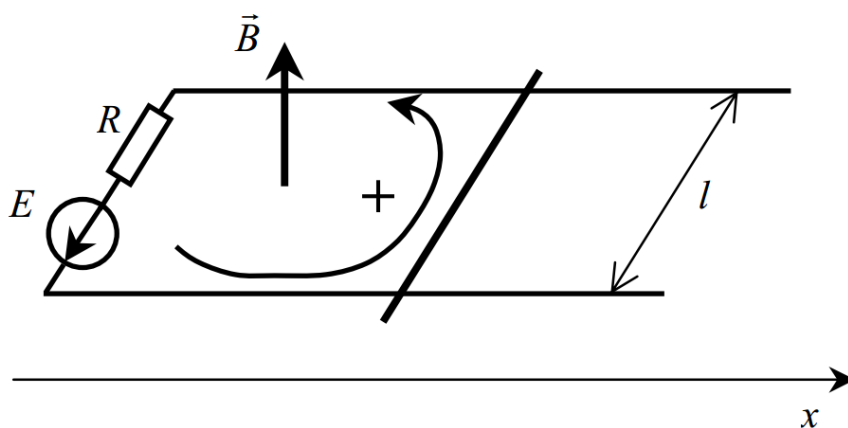
2.1.6. Résoudre complètement cette équation et tracer le graphe de v en fonction de t .

2.1.7. Multiplier chaque membre de l'équation électrique par i et chaque membre de l'équation mécanique par v . En déduire un bilan de puissance.

2.1.8. Que devient l'énergie cinétique initiale de la barre ?

2.2 Rails de Laplace avec générateur

On reprend le problème précédent mais on rajoute sur le conducteur reliant les deux rails, un générateur idéal de tension de f.é.m. constante E (cf figure). La barre est cette fois initialement immobile.



2.2.1. Écrire l'équation électrique du circuit et l'équation mécanique.

2.2.2. En déduire l'expression de la vitesse de la barre en fonction du temps. On pourra utiliser dans les expressions la constante τ définie à la question 2.1.5.

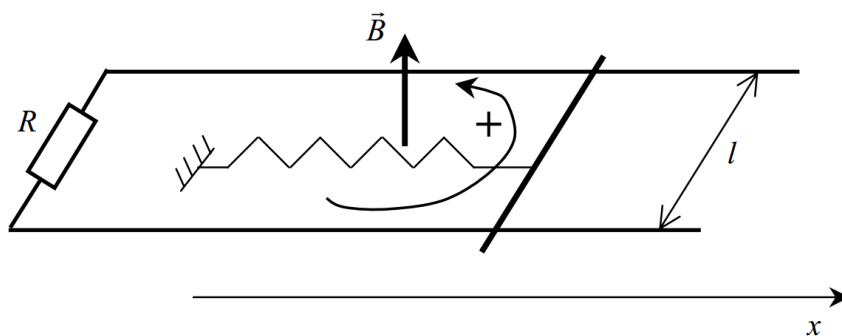
2.2.3. Tracer l'allure du graphe de v en fonction de t .

2.2.4. Déterminer l'intensité i dans le circuit en fonction de t et tracer le graphe correspondant.

2.2.5. Faire un bilan de puissance. Comment est convertie la puissance fournie par le générateur ?

2.3 Oscillations d'une barre plongée dans un champ magnétique

On reprend le dispositif précédent mais maintenant la barre est reliée à un ressort de raideur k . L'origine des abscisses est prise lorsque le ressort est au repos. À l'instant initial, l'abscisse de la barre est égale à a (avec $a > 0$) et la barre est lâchée sans vitesse initiale. La barre peut glisser sans frottement sur les rails.



2.3.1. Écrire l'équation électrique et l'équation mécanique. En déduire l'équation différentielle vérifiée par l'abscisse x de la barre. On posera :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \text{ et } \tau = \frac{mR}{B^2 \ell^2}$$

2.3.2. Résoudre complètement cette équation si $\omega_0 \tau \gg 1$.

2.3.3. Tracer l'allure du graphe de x en fonction du temps t .

2.3.4. Faire un bilan de puissance. Justifier l'égalité suivante :

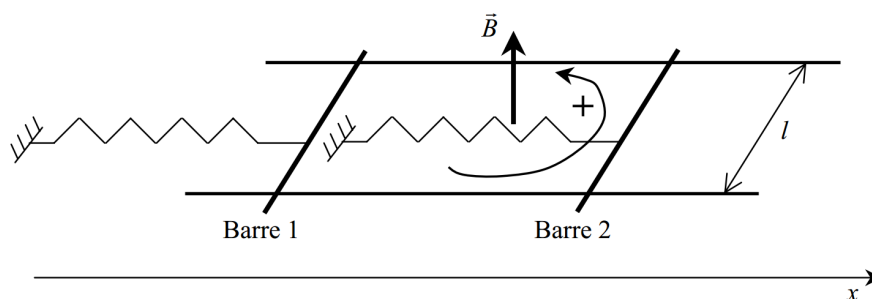
$$\int_0^{+\infty} Ri^2 dt = \frac{1}{2} ka^2$$

2.4 Oscillations de deux barres plongées dans un champ magnétique

Deux barres parallèles et identiques, de même masse m , peuvent glisser sans frottement sur deux rails, parallèles, distants de ℓ . L'ensemble des rails et des barres est dans un même plan horizontal. Les seuls mouvements possibles des barres sont des translations rectilignes parallèles à la direction Ox des rails. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique stationnaire et uniforme $\vec{B}$. Les deux barres et les tronçons de rails situés entre les barres forment un circuit fermé. Ce circuit fermé possède une résistance électrique R (non représentée sur le schéma ci-dessous) qui sera supposée constante quelle que soit la position des barres. On définit un sens de circulation positive sur ce circuit comme indiqué sur le schéma.

Chacune des barres est liée à un ressort de raideur k . La position de la barre 1 est repérée par son abscisse x_1 , comptée à partir de la position pour laquelle le ressort auquel elle est liée est au repos. De même, la position de la barre 2 est repérée par son abscisse x_2 , comptée à partir de la position pour laquelle le ressort auquel elle est liée est au repos. On se reportera à la figure ci-dessous.

À l'instant initial, les deux barres sont lâchées sans vitesse initiale aux positions $x_1(0) = a$, avec $a > 0$ et $x_2(0) = 0$.



2.4.1. Écrire l'équation électrique du circuit.

2.4.2. Appliquer le principe fondamental de la dynamique à chacune des barres et en déduire deux équations mécaniques.

2.4.3. Déduire de ce qui précède le système d'équations différentielles vérifié par x_1 et x_2 .
On posera $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et $\tau = \frac{mR}{B^2 \ell^2}$.

2.4.4. On pose $X = x_1 + x_2$ et $Y = x_1 - x_2$. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par X et l'équation différentielle vérifiée par Y .

2.4.5. Quelle est la limite de Y quand $t \rightarrow \infty$? En déduire au bout d'un temps très long :
— les expressions de x_1 et x_2 en fonction de t et la nature du mouvement des deux barres
— l'intensité i

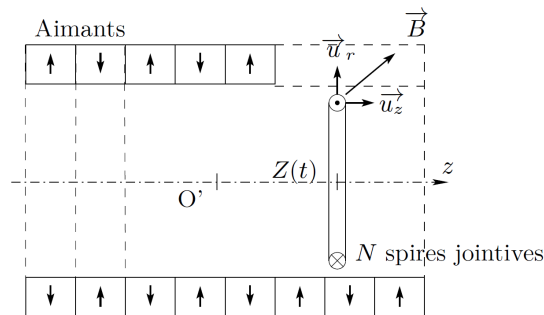
3 Modélisation d'un générateur d'énergie électrique

La partie mobile d'un générateur sur laquelle sont fixées les bobines se déplace rectilignement au milieu d'aimants permanents.

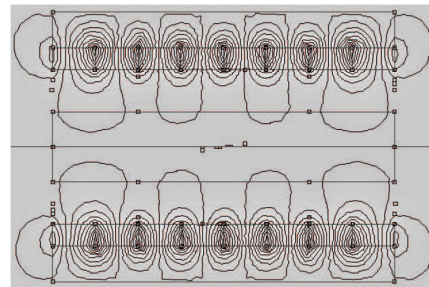
3.1. Dessiner les lignes de champ magnétique créées par un aimant permanent rectangulaire.

Le bobinage est modélisé par une bobine plate, circulaire de rayon R constituée de N spires jointives d'inductance et de résistance négligeables. La position du mobile { bobine + masse }

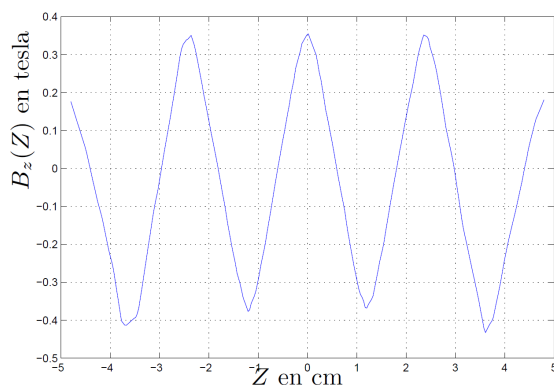
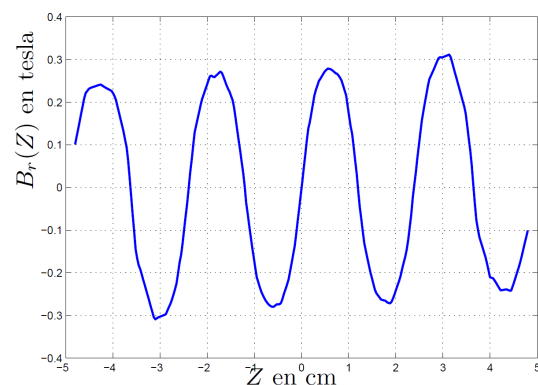
est repérée par sa distance $Z(t)$ au point O' . On note sa vitesse $v(t) = \frac{dZ}{dt}$. On repère un point M par ses coordonnées (r, θ, z) dans la base cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.



(a) Modélisation



(b) Simulation par éléments finis des lignes de champ magnétique

(c) Champ magnétique axial B_z présent sur le bobinage ($r = R$) en fonction de la position de la bobine $Z(t)$ (d) Champ magnétique radial B_r présent sur le bobinage ($r = R$) en fonction de la position de la bobine $Z(t)$

Nous supposons que le champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé par l'ensemble des aimants sur les conducteurs du bobinage varie en fonction de la position de la spire sous la forme :

$$\vec{B}(r = R, t) = B_{r0} \sin(kZ(t)) \vec{u}_r + B_{z0} \cos(kZ(t)) \vec{u}_z$$

3.2. Déterminer graphiquement, avec une précision de 10%, une valeur de B_{r0} , B_{z0} et k .

3.3. Déterminer l'expression du champ électromoteur $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$ à l'intérieur des conducteurs de la bobine.

3.4. En déduire l'expression de la force électromotrice d'induction $e(t)$ induite qui apparaît aux bornes du bobinage en fonction de $v(t)$, $Z(t)$, B_{r0} , k , N et R .

Indication : la force électromotrice est donnée par :

$$e = \int_0^{2\pi N} E_m R d\theta$$

La tension générée permet d'alimenter une charge que l'on modélisera par une résistance R_0 .

3.5. Faire un schéma électrique équivalent. En déduire l'expression du courant induit $i(t)$.

3.6. Déterminer l'expression de la résultante des forces de Laplace $\vec{F}_L$ suivant $\vec{u}_z$ s'exerçant sur la bobine.