

Signaux 2 : Complément sur les mesures électriques

Table des matières

1	Valeur moyenne d'un signal périodique	1
1.1	Définition de la valeur moyenne d'un signal périodique	1
1.2	Exemple d'un signal sinusoïdal pur	1
1.3	Exemple d'un signal sinusoïdal comportant une composante continue	2
2	Valeur efficace d'un signal périodique	3
2.1	Définition de la valeur efficace d'un signal périodique	3
2.2	Exemple d'un signal sinusoïdal pur	3
2.3	Exemple d'un signal sinusoïdal comportant une composante continue	4
2.4	Utilité et origine de la définition de la valeur efficace	5
3	Mesures à l'aide d'un multimètre	5
4	Mesures à l'aide d'un oscilloscope	6

1 Valeur moyenne d'un signal périodique

1.1 Définition de la valeur moyenne d'un signal périodique

Définition de la valeur moyenne d'un signal périodique

La valeur moyenne d'un signal $s(t)$ périodique de période T se note $\langle s(t) \rangle$ et vaut :

$$\langle s(t) \rangle \triangleq \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) dt \tag{1}$$

où t_0 est un instant quelconque.

Pour calculer la valeur moyenne d'un signal de période T , il faut donc intégrer ce signal sur un intervalle quelconque de largeur T , puis diviser le résultat par T .

La valeur moyenne d'un signal périodique est aussi appelée « **composante continue** » de ce signal.

La valeur moyenne d'un signal permanent est égale à la valeur de ce signal.

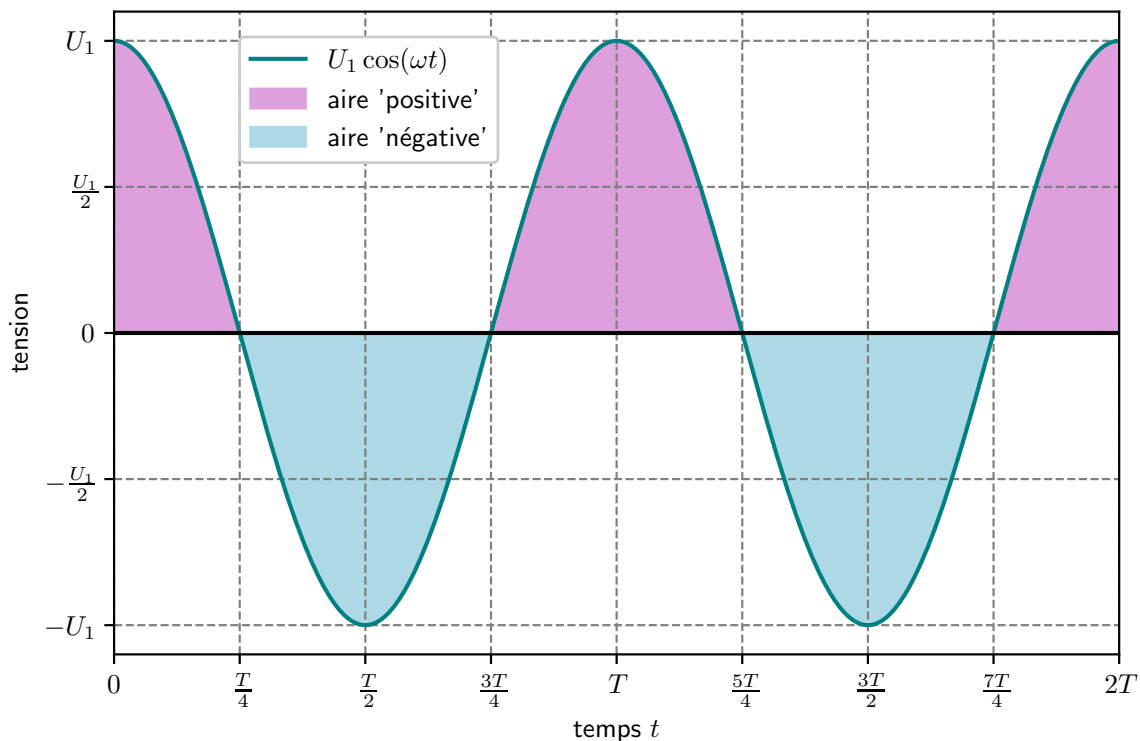
La valeur moyenne est une application linéaire.

1.2 Exemple d'un signal sinusoïdal pur

Soit une tension $u_1(t)$ sinusoïdale pure d'amplitude U_1 , de fréquence f , de période $T = \frac{1}{f}$, de phase initiale φ nulle et de pulsation ω , représentée sur la figure 1 :

$$u_1(t) = U_1 \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad f = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{et} \quad \varphi = 0$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

FIGURE 1 – Tracé de $u_1(t)$ et analyse géométrique de son intégrale

Calculons la valeur moyenne de $u_1(t)$ en prenant par exemple $t_0 = 0$:

$$\langle u_1(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T U_1 \cos(\omega t) dt = \frac{U_1}{T} \left[\frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right]_0^T = \frac{U_1}{\omega T} \left(\sin(\underbrace{\omega T}_{2\pi}) - \sin(0) \right) = 0$$

$\omega = \frac{2\pi}{T} \Leftrightarrow \omega T = 2\pi$

On peut également trouver ce résultat par une analyse géométrique de l'intégrale. En effet, l'intégrale d'une courbe, sur un intervalle donné, vaut l'aire située entre la partie positive de la courbe et l'axe des abscisses (en rose sur la figure 1) moins l'aire située entre la partie négative de courbe et l'axe des abscisses (en bleu sur la figure 1), sur cet intervalle.

On remarque que le résultat du calcul de l'intégrale précédente est nul $\forall T$, ce qui nous amène à la propriété ci-dessous.

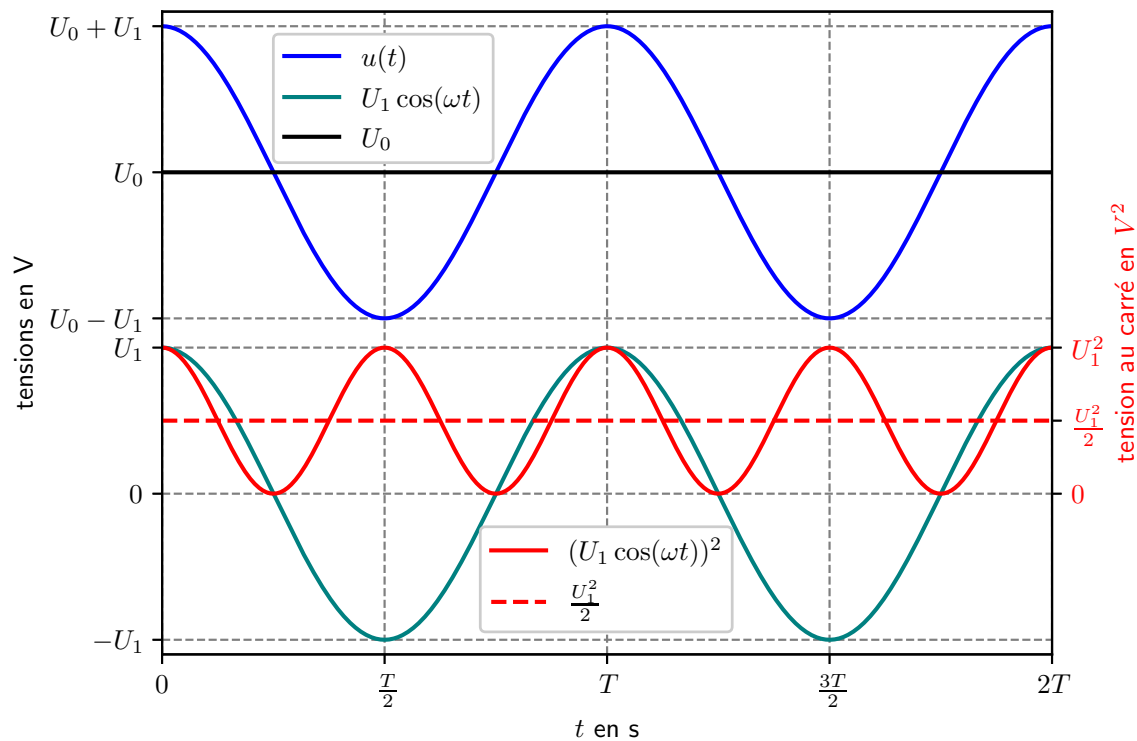
Propriété : Valeur moyenne d'un signal sinusoïdal pur

La valeur moyenne d'un signal sinusoïdal pur est nulle quelle que soit sa fréquence.

1.3 Exemple d'un signal sinusoïdal comportant une composante continue

Soit une tension $u(t)$ de période $T = \frac{1}{f}$, représentée sur la figure 2, de la forme :

$$u(t) = U_0 + u_1(t) = U_0 + U_1 \cos(\omega t) \quad \text{avec} \quad U_0 > U_1 > 0 \quad \text{et} \quad f = \frac{\omega}{2\pi}$$

FIGURE 2 – Tracé de $u(t)$ et autres courbes utiles

Calculons la valeur moyenne de $u(t)$:

$$\langle u(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T (U_0 + u_1(t)) dt = \frac{1}{T} [U_0 \times t]_0^T + \underbrace{\langle u_1(t) \rangle}_0 = \frac{U_0 T}{T} = U_0$$

2 Valeur efficace d'un signal périodique

2.1 Définition de la valeur efficace d'un signal périodique

Définition de la valeur efficace d'un signal périodique

La valeur efficace d'un signal $s(t)$ périodique de période T se note S_{eff} et vaut :

$$S_{\text{eff}} \triangleq \sqrt{\langle s^2(t) \rangle} \quad (2)$$

La valeur efficace est donc la valeur de la racine de la valeur moyenne du signal élevé au carré, encore appelée valeur RMS pour *Root Mean Square* en Anglais.

2.2 Exemple d'un signal sinusoïdal pur

Les courbes utiles sont dessinées sur la figure 2, on rappelle également une formule de trigonométrie utile :

$$\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \quad (3)$$

Calculons la valeur efficace de $u_1(t)$ notée $U_{1\text{eff}}$, d'après (3) et (2) :

$$U_{1\text{eff}}^2 = \langle U_1^2 \cos^2(\omega t) \rangle = U_1^2 \left\langle \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} \right\rangle = \frac{U_1^2}{2}$$

On remarquera en effet dans ce calcul, comme on peut l'observer sur la figure 2, que le signal $u_1^2(t)$ comporte une composante continue (ou permanente, constante au cours du temps) $\frac{U_1^2}{2}$ ainsi qu'une composante alternative sinusoïdale pure $\frac{U_1^2}{2} \cos(2\omega t)$ de pulsation 2ω (de période $\frac{T}{2}$) et de valeur moyenne nulle.

Au final :

$$U_{1\text{eff}} = \frac{U_1}{\sqrt{2}}$$

Propriété : Valeur efficace d'un signal sinusoïdal pur

La valeur efficace $U_{1\text{eff}}$ d'un signal sinusoïdal pur est égale à l'amplitude U_1 de ce signal divisée par racine de 2 :

$$U_{1\text{eff}} = \frac{U_1}{\sqrt{2}} \quad (4)$$

On notera également que $\forall \omega$ et $\forall \varphi$:

$$\langle \sin^2(\omega t + \varphi) \rangle = \langle \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle = \frac{1}{2} \quad (5)$$

2.3 Exemple d'un signal sinusoïdal comportant une composante continue

Calculons la valeur efficace de $u(t)$ notée U_{eff} :

$$\begin{aligned} U_{\text{eff}}^2 &= \langle (U_0 + U_1 \cos(\omega t))^2 \rangle \\ &= \langle U_0^2 + 2U_0U_1 \cos(\omega t) + U_1^2 \cos^2(\omega t) \rangle \\ &= \langle U_0^2 + 2U_0U_1 \cos(\omega t) \rangle + \langle U_1^2 \cos^2(\omega t) \rangle \\ &= U_0^2 + \frac{U_1^2}{2} \end{aligned}$$

Handwritten notes and corrections:

- A red circle highlights the term $\langle U_1^2 \cos^2(\omega t) \rangle$ in the third line.
- A blue bracket under $\langle U_1^2 \cos^2(\omega t) \rangle$ is labeled $U_1^2 \langle \cos^2(\omega t) \rangle$ with a $1/2$ below it.
- A blue arrow points from the final result $U_0^2 + \frac{U_1^2}{2}$ to a handwritten expansion: $= \underbrace{\langle U_0^2 \rangle}_{U_0^2} + 2U_0U_1 \underbrace{\langle \cos(\omega t) \rangle}_0 + \frac{U_1^2}{2}$.

Propriété : Valeur efficace d'un signal sinusoïdal de valeur moyenne non nulle

La valeur efficace U_{eff} d'un signal sinusoïdal, de valeur moyenne non nulle U_0 , et dont la composante alternative a une amplitude U_1 , vaut :

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{U_0^2 + \frac{U_1^2}{2}} \quad (6)$$

2.4 Utilité et origine de la définition de la valeur efficace

Considérons une résistance R alimentée par la tension $u_1(t)$ et traversée par un courant $i(t)$, la puissance instantanée reçue par la résistance (convention récepteur) est :

$$\mathcal{P}_{AC}(t) = u_1(t) \times i(t) = Ri^2(t)$$

On en déduit la puissance moyenne reçue par cette résistance :

$$\langle \mathcal{P}_{AC}(t) \rangle = R \langle i^2(t) \rangle = RI_{\text{eff}}^2$$

Si cette même résistance était alimentée par une tension permanente U et donc traversée par un courant permanent I , la puissance instantanée reçue par cette résistance serait :

$$\mathcal{P}_{DC} = U \times I = RI^2$$

On notera que $\mathcal{P}_{DC} = \langle \mathcal{P}_{DC} \rangle$ puisque cette puissance instantanée est constante dans le temps, à la différence de $\mathcal{P}_{AC}(t)$.

Utilité de la valeur efficace

Dans le cas d'une résistance, le calcul de la valeur moyenne de la puissance reçue par cette-dernière, montre que la valeur efficace du courant en régime variable joue le même rôle que la valeur constante du courant permanent en régime continu (ou permanent).

3 Mesures à l'aide d'un multimètre**Les différents types de mesures**

Il existe 3 types de mesures réalisables par les appareils de mesure :

- en mode **DC** (*Direct Current*), l'appareil mesure la composante permanente (ou « continue ») du signal. Le terme *Direct Current* signifie « courant unidirectionnel » et par extension désigne un signal permanent.
- en mode **AC** (*Alternative Current*), l'appareil mesure la valeur efficace de la composante alternative du signal. Le terme *Alternative Current* signifie « courant alternatif » et par extension désigne un signal alternatif, c'est-à-dire un signal périodique de valeur moyenne nulle.
- en mode **AC+DC**, l'appareil mesure la valeur efficace du signal pris dans son intégralité. Ce mode de mesure est parfois désigné sous le nom de mode TRMS (*True Root Mean Square*) qui signifie « valeur efficace vraie ».

On peut synthétiser les résultats des sections 1 et 2, concernant les mesures réalisées sur $u(t) = U_0 + U_1 \cos(\omega t)$, dans le tableau de la figure 3 :

Mesures réalisées au voltmètre numérique sur la tension $u(t)$		
mode utilisé	valeur théorique	type de mesure
DC	U_0	valeur moyenne
AC	$\frac{U_1}{\sqrt{2}}$	valeur efficace de la composante alternative
AC+DC	$\sqrt{U_0^2 + \frac{U_1^2}{2}}$	valeur efficace vraie

FIGURE 3 – Tableau des mesures suivant le mode utilisé sur l’appareil de mesure

4 Mesures à l’aide d’un oscilloscope

Les différents mode de couplage des voies d’un oscilloscope

Il existe 3 types de couplage des voies d’un oscilloscope :

- en couplage **DC** l’oscilloscope affiche le signal en incluant sa composante permanente (ou « continue »). Autrement dit, il affiche le signal dans son intégralité.
- en couplage **AC** l’oscilloscope affiche le signal après filtrage de sa composante permanente (ou « continue »). Autrement dit, il affiche la composante alternative du signal.
- en couplage **Ground** la voie correspondante de l’oscilloscope est reliée à la masse et ce dernier affiche donc une tension permanente de 0 V.

On notera que l’oscilloscope ne permet pas d’afficher uniquement la composante permanente d’une tension, il peut juste la filtrer.

Un oscilloscope numérique permet également de réaliser un certain nombre d’opérations sur les tensions affichées à l’écran grâce à l’onglet *Measures*, dont voici deux exemples utiles :

- *Average* ou *Mean* permet de calculer la valeur moyenne de la tension affichée
- *RMS* ou *cycle RMS* permet de calculer la valeur efficace de la tension affichée

La combinaison de ces mesures associées au couplage adapté de la voie permet donc d’obtenir les mêmes mesures que celles fournies par un voltmètre numérique. Ces combinaisons ont été regroupées dans le tableau de la figure 4.

Mesures réalisées à l’oscilloscope sur la tension $u(t)$		
couplage utilisé	type de mesure utilisé	type de mesure réalisé
DC $u_0 + u_1(t)$	Mean $\langle u_0 + u_1(t) \rangle$	valeur moyenne = u_0
AC $u_1(t)$	RMS $\sqrt{\langle u_1^2(t) \rangle}$	valeur efficace de la composante alternative = $u_1/\sqrt{2}$
DC $\underbrace{u_0 + u_1(t)}_{u(t)}$	RMS $\sqrt{\langle u^2(t) \rangle}$	valeur efficace vraie = $\sqrt{u_0^2 + u_1^2/2}$

FIGURE 4 – Tableau des mesures réalisées par l’oscilloscope