

Intégrales extraites des lois à densité connues

1) Avec la loi exponentielle

On sait que $\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1$, on déduit que $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}}$

On sait que $E(X) = \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$, on déduit que $\boxed{\int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^2}}$

On sait que $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{\lambda^2}$, on déduit que $E(X^2) = V(X) + (E(X))^2$

$E(X^2) = V(X) + (E(X))^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}$ ainsi $\boxed{\int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}}$

On déduit aussi que $\boxed{\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^3}}$

2) Avec la loi normale centrée réduite

On sait que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$, on déduit que $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}}$

On sait que $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ est paire donc $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{2\pi}{4}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$

On sait que $V(X) = 1 = E(X^2) - (E(X))^2$ et $E(X) = 0$ donc $E(X^2) = 1$

on déduit que $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1}$ mais aussi que $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}}$

On sait enfin que $x \mapsto x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$ est paire donc $\boxed{\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^0 x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$