

Corrigé du TD S8 : Circuit fixe dans un champ magnétique qui dépend du temps

Table des matières

1	Vrai ou faux	1
2	Inductance d'une bobine	2
2.1	Champ magnétique créé à l'intérieur du solénoïde	2
2.2	Flux à travers une spire	2
2.3	Expression de l'inductance	2
3	Expérience des étincelles de rupture	2
4	Pince ampèremétrique	3
4.1	Expression de L_2 et de M	3
4.2	Intensité du courant de court-circuit du Tore	3
4.3	Tension à vide aux bornes du Tore	4
5	Mesure d'une inductance mutuelle	4
5.1	Identification des bornes homologues	4
5.2	Relation courant-tension	5
5.3	Influence des résistances	5
5.4	Expression de L et M	5
5.5	Application numérique	5
6	Le transformateur	6
6.1	Schéma équivalent et mise en équation	6
6.2	Secondaire à vide	6
6.3	Secondaire en court-circuit	7

1 Vrai ou faux

1.1. Une bobine placée dans un champ magnétique variable est le siège d'une f.é.m induite.
VRAI

1.2. Dans une bobine placée dans un champ magnétique variable on a toujours un courant induit.

FAUX si cette bobine est en circuit ouvert

1.3. Une f.é.m induite n'apparaît dans une bobine que si on approche le pôle nord d'un aimant de l'une de ses faces.

FAUX cela marche aussi si l'on approche le pôle sud de l'aimant

1.4. Le phénomène d'induction ne s'observe que si l'inducteur se déplace par rapport à l'induit et vice-versa.

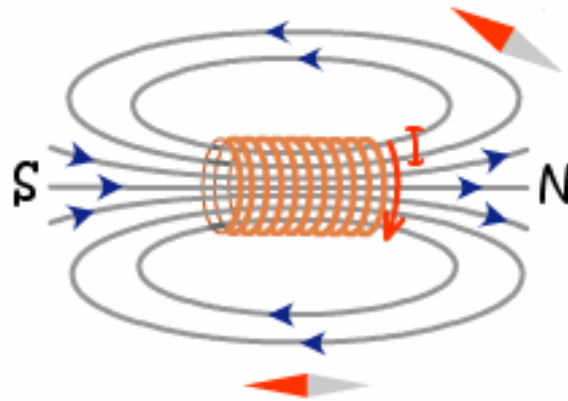
FAUX les deux peuvent être immobiles du moment que le champ magnétique créé par l'inducteur est variable

1.5. Un transformateur peut être alimenté par une tension continue.

FAUX cela va griller le transformateur si on l'alimente sous une tension continue U_0 égale à sa tension efficace nominale de fonctionnement U_n . En effet l'impédance du transfo est faible en régime continu et l'intensité du courant serait alors trop importante. On peut l'alimenter en continu mais sous tension très réduite (de l'ordre de 5% de U_n).

2 Inductance d'une bobine

2.1 Champ magnétique créé à l'intérieur du solénoïde



L'orientation de la spire est choisie telle que la normale aux spires est égale à $\vec{u}_z$. Le champ créé par la bobine d'axe (Oz) est de la forme :

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{\ell} I \vec{u}_z$$

2.2 Flux à travers une spire

Le flux de $\vec{B}$ à travers une spire, noté φ vaut :

$$\varphi = \iint_{1 \text{ spire}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{1 \text{ spire}} \mu_0 \frac{N}{\ell} I \vec{u}_z \cdot dS \vec{u}_z = \mu_0 \frac{N}{\ell} I \cdot \pi a^2$$

2.3 Expression de l'inductance

Le flux de $\vec{B}$ à travers la bobine, c'est-à-dire les N spires, noté Φ , vaut :

$$\Phi = \iint_{\text{bobine}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = N\varphi = \underbrace{\mu_0 \frac{N^2}{\ell} \pi a^2}_L I$$

3 Expérience des étincelles de rupture

3.1. Lorsque la pointe se déplace sur la lime, le circuit est régulièrement coupé (lors du passage par un sillon de la lime). Lors de chacune de ces coupures très nombreuses, il apparaît une surtension aux bornes de la bobine qui donne lieu à une étincelle de rupture entre la pointe et la lime.

4 Pince ampèremétrique

4.1 Expression de L_2 et de M

Soit $\varphi_{2 \rightarrow 2}$ le flux propre à travers une spire du tore, sachant que $\vec{dS}_2 = -dr dz \vec{u}_\theta$:

$$\begin{aligned} \varphi_{2 \rightarrow 2} &= \iint_{\text{1 spire du tore}} \vec{B}_2 \cdot \vec{dS}_2 = \int_{z=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{r=b}^{b+a} -\frac{\mu_0 N i_2}{2\pi r} \vec{u}_\theta \cdot (-dr dz \vec{u}_\theta) \\ \Rightarrow \varphi_{2 \rightarrow 2} &= \frac{\mu_0 N i_2}{2\pi} \cdot \int_{z=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dz \cdot \int_{r=b}^{b+a} \frac{1}{r} dr = \frac{\mu_0 N i_2}{2\pi} \cdot a \cdot \ln\left(\frac{a+b}{b}\right) \end{aligned}$$

On en déduit le flux propre total du tore et l'inductance propre L_2 :

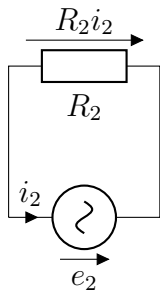
$$\Phi_{2 \rightarrow 2} = N \varphi_{2 \rightarrow 2} = \underbrace{\frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \ln\left(\frac{a+b}{b}\right)}_{L_2} \cdot i_2$$

Pour trouver M nous allons déterminer $\Phi_{2 \rightarrow 1}$. Pour cela, on peut remarquer que le flux de $\vec{B}_2$ à travers la spire 1 se limite au flux de $\vec{B}_2$ à travers une portion de la surface de la spire 1 équivalente à une spire du tore, puisque $\vec{B}_2$ est nul en dehors du tore :

$$\begin{aligned} \Phi_{2 \rightarrow 1} &= \iint_{\text{spire 1}} \vec{B}_2 \cdot \vec{dS}_1 = \int_{z=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{r=b}^{b+a} -\frac{\mu_0 N i_2}{2\pi r} \vec{u}_\theta \cdot (dr dz \vec{u}_\theta) \\ \Rightarrow \Phi_{2 \rightarrow 1} &= \underbrace{-\frac{\mu_0 N a}{2\pi} \ln\left(\frac{a+b}{b}\right)}_M \cdot i_2 \end{aligned}$$

4.2 Intensité du courant de court-circuit du Tore

On note e_2 la fem induite dans le tore. L'équation électrique du tore en court-circuit est :



$$R_2 i_2 - e_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0$$

En notation complexe, on obtient :

$$i_2 (R_2 + jL_2 \omega) = -jM \omega i_1$$

$$\Leftrightarrow i_2 = -\frac{jM \omega}{R_2 + jL_2 \omega} i_1$$

On en déduit la grandeur instantanée $i_2(t) = I_{2m} \cos(\omega t + \varphi_{i_2})$ avec :

$$I_{2m} = |i_2| = \frac{|M| \omega}{\sqrt{R_2^2 + (L_2 \omega)^2}} I_1 \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \varphi_{i_2} &= \arg\left(\frac{-jM\omega}{R_2 + jL_2\omega}\right) = \frac{\pi}{2} - \arg(R_2 + jL_2\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{L_2\omega}{R_2}\right) \\ &\Rightarrow \varphi_{i_2} = \underbrace{\arctan\left(\frac{R_2}{L_2\omega}\right)}_{\psi} \end{aligned}$$

En effet, $\arg(-jM\omega) = \frac{\pi}{2}$ car $M < 0$ et $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

Au final :

$$i_2(t) = \frac{|M|\omega I_1 \sqrt{2}}{\sqrt{R_2^2 + (L_2\omega)^2}} \cos(\omega t + \psi)$$

Si $R_2 \ll L_2\omega$, l'expression précédente devient :

$$i_2(t) = \frac{|M|\omega I_1 \sqrt{2}}{L_2\omega} \cos(\omega t) = \frac{i_1(t)}{N}$$

On a réalisé un transformateur de courant, ainsi la mesure de I_2 (valeur efficace de $i_2(t)$) permet d'en déduire $I_1 = NI_2$, sans introduire d'ampèremètre dans le circuit où circule $i_1(t)$. C'est le principe de fonctionnement d'une pince ampèremétrique.

4.3 Tension à vide aux bornes du Tore

Lorsque le tore est en circuit ouvert ($i_2 = 0$), on mesure la tension u_2 à ses bornes (en convention récepteur), telle que :

$$u_2 = -e_2 = M \frac{di_1}{dt}$$

En notation complexe, on obtient :

$$\underline{u}_2 = jM\omega \underline{i}_1$$

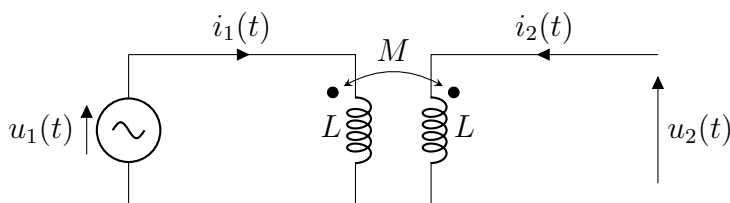
On en déduit la valeur efficace de $u_2(t)$, notée U_2 :

$$U_2 = \frac{U_{2m}}{\sqrt{2}} = \frac{|jM\omega \underline{i}_1|}{\sqrt{2}} = |M|\omega I_1$$

5 Mesure d'une inductance mutuelle

5.1 Identification des bornes homologues

Pour repérer les bornes homologues, on alimente la première bobine avec une générateur de tension sinusoïdale de fréquence suffisamment élevée pour s'assurer que $R \ll L\omega$, la deuxième bobine étant en circuit ouvert :



Dans ce montage, on remarque que :

$$u_1 = L \frac{di_1}{dt} \quad \text{et} \quad u_2 = M \frac{di_1}{dt} \quad \text{donc} \quad u_2(t) = \frac{M}{L} u_1(t)$$

En observant $u_1(t)$ et $u_2(t)$ à l'oscilloscope, si ces deux tensions sont en phase, elles pointent vers les deux bornes homologues choisies telles que M soit positif.

5.2 Relation courant-tension

Pour les deux montages, v_1 et v_2 représentent les tensions aux bornes des bobines en convention récepteur :

$$\underline{V}_1 = jL\omega\underline{I}_1 + jM\omega\underline{I}_2 + R\underline{I}_1$$

$$\underline{V}_2 = jL\omega\underline{I}_2 + jM\omega\underline{I}_1 + R\underline{I}_2$$

Pour le montage (a) : on a $\underline{I} = \underline{I}_1 = -\underline{I}_2$ et

$$\begin{aligned}\underline{V} &= -\underline{V}_2 + \underline{V}_1 = jL\omega\underbrace{(\underline{I}_1 - \underline{I}_2)}_{2\underline{I}} + jM\omega\underbrace{(\underline{I}_2 - \underline{I}_1)}_{-2\underline{I}} + R\underbrace{(\underline{I}_1 - \underline{I}_2)}_{2\underline{I}} \\ \Rightarrow \underline{V} &= j \cdot 2\omega(L - M)\underline{I} + 2R\underline{I}\end{aligned}\quad (1)$$

Pour le montage (b) : on a $\underline{I} = \underline{I}_1 = \underline{I}_2$ et

$$\begin{aligned}\underline{V} &= \underline{V}_2 + \underline{V}_1 = jL\omega\underbrace{(\underline{I}_1 + \underline{I}_2)}_{2\underline{I}} + jM\omega\underbrace{(\underline{I}_2 + \underline{I}_1)}_{2\underline{I}} + R\underbrace{(\underline{I}_1 + \underline{I}_2)}_{2\underline{I}} \\ \Rightarrow \underline{V} &= j \cdot 2\omega(L + M)\underline{I} + 2R\underline{I}\end{aligned}\quad (2)$$

5.3 Influence des résistances

Les résistances des bobines peuvent être négligées si :

$$(L - M)\omega \gg R \quad \Leftrightarrow \quad f \gg \frac{R}{2\pi(L - M)}$$

Si tel est le cas, les équations (1) et (2) deviennent :

$$(1) \quad \Rightarrow \quad \underline{V} = j \cdot 2\omega(L - M)\underline{I} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \left(\frac{V}{I}\right)_a = 2\omega(L - M) \quad (3)$$

$$(2) \quad \Rightarrow \quad \underline{V} = j \cdot 2\omega(L + M)\underline{I} \quad \Rightarrow \quad \beta = \left(\frac{V}{I}\right)_b = 2\omega(L + M) \quad (4)$$

5.4 Expression de L et M

$$\begin{aligned}(3) + (4) &\Rightarrow \alpha + \beta = 4\omega L \quad \Rightarrow \quad L = \frac{\alpha + \beta}{4\omega} \\ (4) - (3) &\Rightarrow \beta - \alpha = 4\omega M \quad \Rightarrow \quad M = \frac{\beta - \alpha}{4\omega}\end{aligned}$$

5.5 Application numérique

On calcule $\alpha = 377 \, \Omega$ et $\beta = 629 \, \Omega$, on en déduit :

$$L = \frac{377 + 629}{4 \cdot 2\pi \cdot 10^3} = 40 \, \text{mH}$$

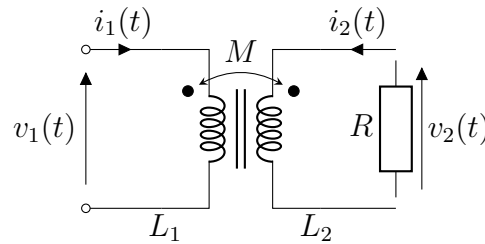
et

$$M = \frac{629 - 377}{4 \cdot 2\pi \cdot 10^3} = 10 \, \text{mH}$$

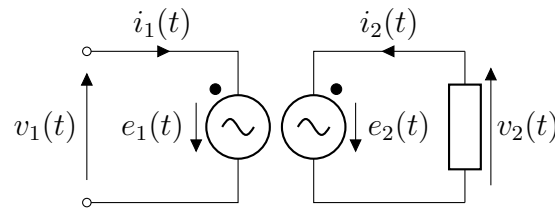
On peut vérifier à posteriori que $(L - M)\omega = 30 \cdot 10^{-3} \cdot 2\pi \cdot 10^3 = 188 \, \Omega \gg R$

6 Le transformateur

6.1 Schéma équivalent et mise en équation



Le schéma électrique équivalent est le suivant :



Avec les f.é.m qui s'écrivent :

$$e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} \quad \text{et} \quad \Phi_1 = \Phi_{1 \rightarrow 1} + \Phi_{2 \rightarrow 1} = L_1 i_1 + M i_2 = k (N_1^2 i_1 + N_1 N_2 i_2)$$

$$e_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} \quad \text{et} \quad \Phi_2 = \Phi_{2 \rightarrow 2} + \Phi_{1 \rightarrow 2} = L_2 i_2 + M i_1 = k (N_2^2 i_2 + N_1 N_2 i_1)$$

On remarque que :

$$\Phi_2 = k (N_2^2 i_2 + N_1 N_2 i_1) = k \frac{N_2}{N_1} (N_1^2 i_1 + N_1 N_2 i_2) = m \Phi_1$$

où $m = \frac{N_2}{N_1}$ est le **rapport de transformation**.

On en déduit :

$$v_2 = -e_2 = \frac{d\Phi_2}{dt} = m \frac{d\Phi_1}{dt} = m v_1$$

La loi d'OHM aux bornes de R donne :

$$v_2 = -R i_2 \quad \Rightarrow \quad m v_1 = -R i_2$$

En notation complexe :

$$m \underline{v}_1 = -R \underline{i}_2 \tag{5}$$

La loi de FARADAY donne :

$$v_1 = -e_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

En notation complexe :

$$\underline{v}_1 = j L_1 \omega \underline{i}_1 + j M \omega \underline{i}_2 \tag{6}$$

6.2 Secondaire à vide

Si $R \rightarrow \infty$, alors $\underline{i}_2 = 0$, on peut retrouver rapidement que $\frac{\underline{v}_2}{\underline{v}_1} = m$, en effet :

$$\underline{v}_1 = j L_1 \omega \underline{i}_1 \quad \text{et} \quad \underline{v}_2 = j M \omega \underline{i}_1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\underline{v}_2}{\underline{v}_1} = \frac{M}{L_1} = \frac{k N_1 N_2}{k N_1^2} = \frac{N_2}{N_1} = m$$

6.3 Secondaire en court-circuit

Lorsque le secondaire est en court-circuit ($R = 0$), alors $\underline{v}_2 = 0$, on en déduit :

$$\underline{v}_2 = jL_2\omega\underline{i}_2 + jM\omega\underline{i}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\underline{i}_2}{\underline{i}_1} = -\frac{M}{L_2} = -\frac{kN_1N_2}{kN_2^2} = -\frac{N_1}{N_2} = -\frac{1}{m}$$

Le transformateur fonctionne alors en **transformateur d'intensité**¹, il sert à mesurer l'intensité $\underline{i}_1$ du courant sans perturber le circuit dans lequel circule ce courant puisque $\underline{v}_1 = \frac{\underline{v}_2}{m} = 0$. On utilise ce type de transformateur quand la valeur efficace de $\underline{i}_1$, notée I_1 , est très importante, car il est alors plus aisé de mesurer la valeur efficace I_2 de l'intensité au secondaire, beaucoup plus faible, en choisissant $m \gg 1$.

La mesure de I_2 donne celle de $I_1 = mI_2$.

1. https://fr.wikipedia.org/wiki/Transformateur_de_courant