

Réseaux optiques

Lors des chapitres précédents, nous nous sommes intéressés aux interférences à deux ondes. On peut légitimement se poser la question : « que se passe-t-il si on augmente le nombre d'ondes cohérentes interférant en un point M ? ». Cette question en amènera une seconde : « comment réaliser expérimentalement cette superposition ? ». Cette étude sera aussi l'occasion de mettre en évidence des applications en spectrométrie.

A. Interférences à N ondes

Dans ce paragraphe on étudie les interférences de N ondes émises par N sources $S_1, S_2, \dots, S_N$ quasi-monochromatiques de même pulsation ω et mutuellement cohérentes deux à deux.

On suppose de plus qu'au point M où elles parviennent :

- les N ondes ont toutes la même amplitude s_0 ,
- la différence entre les retards de phase des ondes émises par deux sources consécutives S_{m+1} et S_m est une constante : $\varphi = \varphi_{m+1} - \varphi_m$

A.1 Expression de la vibration résultante $s(M, t)$

La différence de marche étant la même entre deux motifs consécutifs, on en déduit

$$\underline{s}_3 = s_0 e^{i(\omega t - \varphi_3)} \quad \text{et} \quad \underline{s}_4 = s_0 e^{i(\omega t - \varphi_4)} = s_0 e^{i(\omega t - \varphi_3 + \varphi_3 - \varphi_4)} = \underline{s}_3 e^{-i(\varphi_4 - \varphi_3)} \quad \underline{s}_4 = \underline{s}_3 e^{-i\varphi} = \underline{s}_1 e^{-3i\varphi}$$

et plus généralement

$$\underline{s}_n = \underline{s}_1 e^{-(n-1)i\varphi}.$$

L'amplitude complexe total au point M s'écrit donc

$$\underline{s}(M, t) = \sum_{n=1}^N \underline{s}_n(M, t) = \underline{s}_1 \sum_{n=1}^N e^{-(n-1)i\varphi} = \underline{s}_1 \sum_{n=0}^{N-1} (e^{-i\varphi})^n.$$

Ce changement d'indice permet de faire apparaître la somme des N premiers termes d'une suite géométrique, d'où

$$\underline{s}(M, t) = \underline{s}_1(M, t) \frac{1 - e^{-iN\varphi}}{1 - e^{-i\varphi}}.$$

Une factorisation du numérateur et du dénominateur permet d'écrire

$$\begin{aligned} \underline{s}(M, t) &= \underline{s}_1(M, t) \frac{e^{-iN\varphi/2}}{e^{-i\varphi/2}} \times \frac{e^{iN\varphi/2} - e^{-iN\varphi/2}}{e^{i\varphi/2} - e^{-i\varphi/2}} \\ &= \underline{s}_1(M, t) \frac{e^{-iN\varphi/2}}{e^{-i\varphi/2}} \frac{2i \sin(N\varphi/2)}{2i \sin(\varphi/2)} \\ \underline{s}(M, t) &= \underline{s}_1(M, t) e^{-i(N-1)\varphi/2} \frac{\sin(N\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)} \end{aligned}$$

A.2 Intensité résultante $\mathcal{I}(M)$

L'intensité s'obtient alors par

$$\mathcal{I}(M) = \frac{1}{2} \Re(ss^*) = |s_1(M, t)| \times 1 \times \frac{\sin^2(N\varphi/2)}{\sin^2(\varphi/2)}$$

En posant $\mathcal{I}_0 = |s_1(M, t)|$ l'intensité observée sur l'écran quand une seule source émet, on trouve

$$\mathcal{I}(M) = \mathcal{I}_0 \frac{\sin^2(N\varphi/2)}{\sin^2(\varphi/2)}$$

Raisonnons sur pour φ approchant 0, par un DL en 0 :

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 \frac{\sin^2(N\varphi/2)}{\sin^2(\varphi/2)} \sim \mathcal{I}_0 \frac{(N\varphi/2)^2}{(\varphi/2)^2} \quad \text{d'où} \quad \mathcal{I} = N^2 \mathcal{I}_0 = \mathcal{I}_{\max}.$$

Ainsi, l'intensité émise se met sous la forme :

$$\mathcal{I}(M) = \mathcal{I}_{\max} \frac{\sin^2(N\varphi/2)}{N^2 \sin^2(\varphi/2)}$$

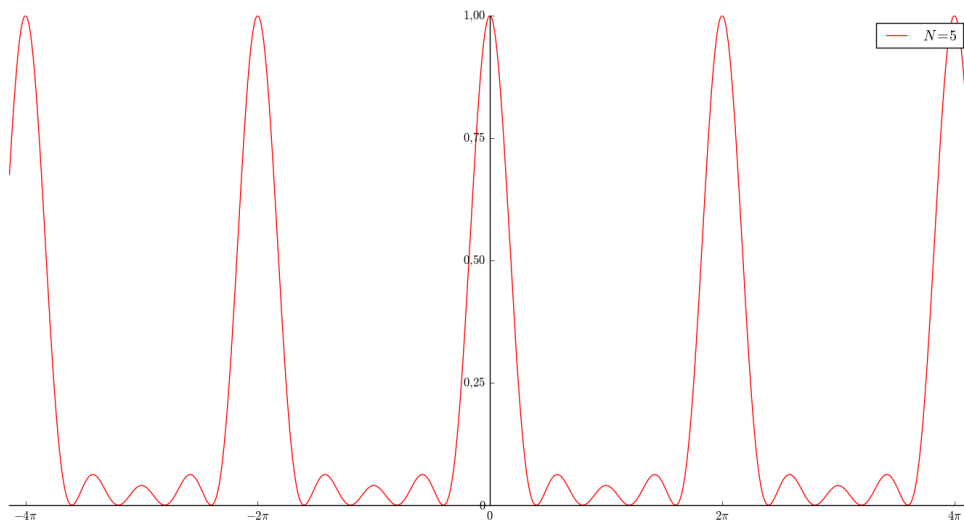


FIGURE 1 – Intensité $\mathcal{I}$ pour 5 ondes

- On observe des pics d'intensités $\mathcal{I}_{\max}$ qui correspondent à deux interférences **constructives** quand $\varphi = 2m\pi$.
- Il existe des lieux d'annulation de l'intensité $\mathcal{I} = 0$ qui correspondent à des interférences **destructives**.
- Des maxima secondaires apparaissent. Les interférences y sont partiellement constructives.
- Les maxima principaux d'intensité sont très lumineux $\mathcal{I}_{\max} = N^2 \mathcal{I}_0$. Ici, $\mathcal{I}_{\max} = 25 \mathcal{I}_0$.

A.3 Influence du nombre d'onde qui interfèrent N

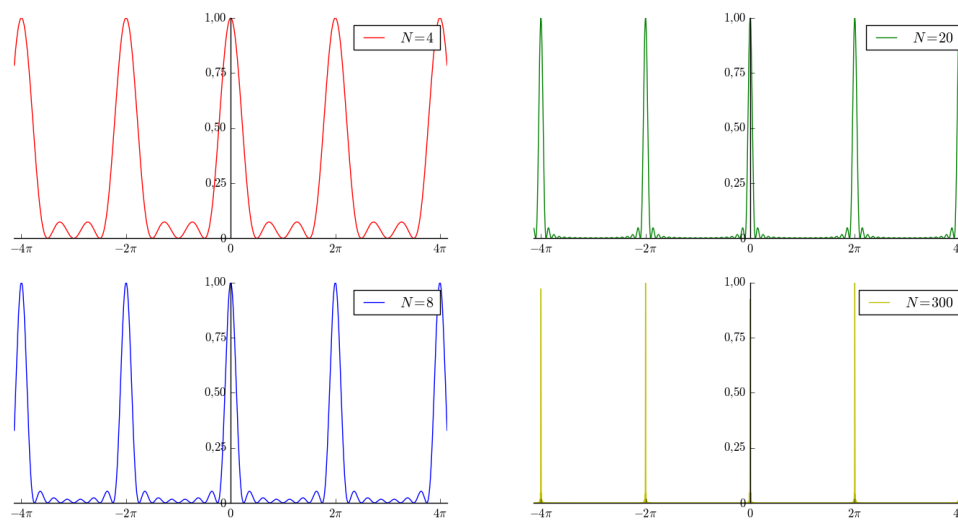


FIGURE 2 – Influence du nombre de sources N sur l'intensité $\mathcal{I}$

- Les maxima principaux sont toujours pour $\varphi = 2m\pi$.
- L'intensité des maxima secondaires décroît quand N augmente. Ils sont indétectables pour $N = 300$.
- La largeur des pics semble dépendre de N : la largeur décroît quand N augmente.

A.4 Largeur des pics

Les pics principaux sont limités par la première annulation de l'intensité.

Propriétés O5.1 - Propriété des maxima principaux d'intensité

L'intensité vibratoire résultant de la superposition de N ondes cohérente est maximale lorsque le déphasage entre deux ondes successives est :

$$\varphi = 2k\pi \quad \text{où} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Lorsque N est grand l'intensité est quasiment nulle en dehors de pics centrés autour de ces valeurs. La demi-largeur des pics de diffraction vaut :

$$\varphi = \frac{2\pi}{N}$$

B. Réseaux optiques

B.1 Description

Définition O5.1 - Réseau optique

Un réseau de diffraction est un objet plan présentant une structure périodique selon un axe (Ox) avec une période spatiale de l'ordre de grandeur des longueurs d'onde de la lumière visible.

On caractérise un réseau par cette période spatiale a appelée **pas du réseau** ou par la fréquence spatiale $n = \frac{1}{a}$, usuellement nommée **nombre de traits par millimètre**.

Dans la pratique, un réseau est constitué d'une suite de N motifs identiques. Ces motifs sont appelés traits du réseau. En appelant (Oxy) le plan du réseau, les traits sont invariants par translation le long de l'axe (Oy) et décalés chaque fois de a suivant (Ox). L'ordre de grandeur du pas a est de 1 à 10 μm et donc la fréquence spatiale est donc de 100 à 1000 traits par mm. Le nombre N de motifs varie entre quelques centaines et quelques milliers : il est toujours très grand.

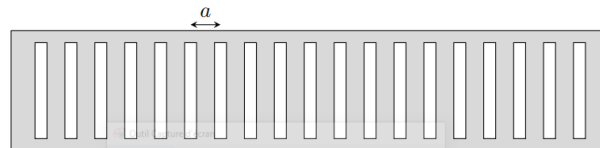


FIGURE 3 – Schématisation d'un réseau

Dans la suite, on parlera uniquement de **réseaux par transmission** : la lumière subit un phénomène de diffraction en traversant le réseau. Il existe aussi des réseaux par réflexion fonctionnant de la même manière mis à part que la lumière diffractée est réfléchi.

B.2 Différence de marche, de phase et ordre d'interférence

Le réseau est éclairé dans les conditions de FRAUNHOFER : les rayons incidents proviennent de l'infini et on observe les rayons émergents à l'infini (ou dans le plan focal d'une lentille convergente). Le faisceau incident est incliné d'un angle θ_0 et on s'intéresse au phénomène lumineux se produisant dans la direction θ , liée au point M .

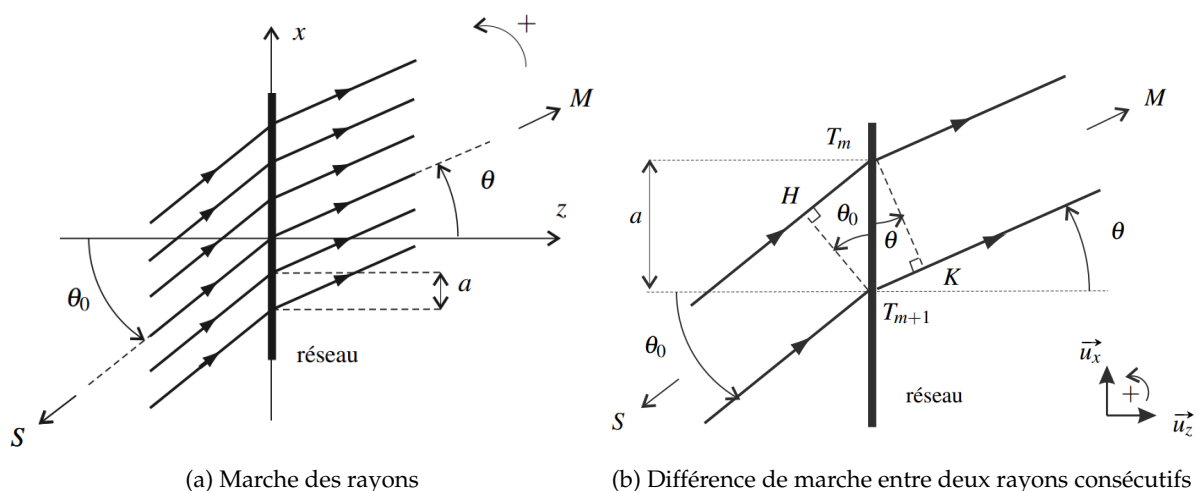


FIGURE 4 – Réseau optique par transmission

$$\begin{aligned}\delta(M) &= (ST_{m+1}M) - (ST_mM) = ((ST_{m+1}) - (ST_m)) + ((T_{m+1}M) - (T_mM)) \\ &= -(HT_m) + (T_{m+1}K)\end{aligned}$$

D'après la figure 4b, $(HT_m) = na \sin \theta_0$ et $(T_{m+1}K) = na \sin \theta$. On obtient les expressions de la différence de marche $\delta(M)$, de la différence de phase $\varphi(M)$ et de l'ordre d'interférences $p(M)$ suivantes :

$$\delta(M) = na (\sin \theta - \sin \theta_0) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(M) = \frac{2\pi na}{\lambda_0} (\sin \theta - \sin \theta_0) \quad \Leftrightarrow \quad p(M) = \frac{na}{\lambda_0} (\sin \theta - \sin \theta_0)$$

B.3 Relation fondamentale des réseaux

La situation étudiée se ramène à celle que nous avons rencontrée au paragraphe précédent. Les ondes lumineuses diffractées par chaque trait du réseau constituent N ondes cohérentes, de même amplitude, et dont les phases sont en progression arithmétique. On peut donc appliquer les résultats que nous avons déjà établis.

- Les maxima d'intensité vibratoire correspondent aux directions θ pour lesquelles il y a interférence totalement constructive des N ondes.
- Le nombre N de traits éclairés étant très grand (un faisceau lumineux de 1 cm, tombant sur un réseau de 600 traits par mm éclaire $N = 6000$ traits), l'intensité vibratoire est négligeable en dehors des directions repérées par θ_K .

Il y a des interférences constructives dans les directions θ_K pour lesquelles :

$$\varphi = 2K\pi \quad \Leftrightarrow \quad \delta = K\lambda_0 \quad \Leftrightarrow \quad p = K \quad K \in \mathbb{Z}$$

Propriété O5.2 - Relation fondamentale des réseaux

Un réseau de pas a diffracte la lumière uniquement dans les directions θ_K données par la relation fondamentale des réseaux :

$$\sin \theta_K - \sin \theta_0 = K \frac{\lambda_0}{na},$$

où K est un entier relatif appelé ordre de diffraction.

B.4 Propriétés des réseaux