

CHAPITRE 17

EXO 1

$$(a) \sqrt{1+\mu} = 1 + \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{8}\mu^2 + \frac{1}{16}\mu^3 + o(\mu^3)_{\mu \rightarrow 0}$$

$$\text{donc } \sqrt{1+\frac{x}{2}} = 1 + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{32} + \frac{x^3}{128} + o(x^3)_{x \rightarrow 0}$$

$$(b) \frac{1}{3+x} = \frac{1}{3(1+x/3)} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1+x/3}$$

$$\text{Or } \frac{1}{1+\mu} = 1 - \mu + \mu^2 - \mu^3 + o(\mu^3)_{\mu \rightarrow 0}$$

$$\text{donc } \frac{1}{3+x} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} - \frac{x^3}{27} \right) + o(x^3)_{x \rightarrow 0} = \frac{1}{3} - \frac{x}{9} + \frac{x^2}{27} - \frac{x^3}{81} + o(x^3)_{x \rightarrow 0}$$

(c) La division par x nécessite de passer le DL de $\sin(x)$ à l'ordre 3

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)_{x \rightarrow 0}$$

$$\text{donc } \frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)_{x \rightarrow 0}$$

$$(d) \frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{1}{x+1} \times \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{1+x} \times \frac{1}{1-x/2}$$

$$\text{Or } \frac{1}{1+\mu} = 1 - \mu + \mu^2 - \mu^3 + o(\mu^3)_{\mu \rightarrow 0}$$

$$\text{donc } \frac{1}{(x+1)(x-2)} = -\frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + o(x^3)_{x \rightarrow 0} \right) \times \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + o(x^3)_{x \rightarrow 0} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{8} + o(x^3)_{x \rightarrow 0} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{3x^2}{4} - \frac{5x^3}{8} + o(x^3)_{x \rightarrow 0} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + o(x^3)_{x \rightarrow 0}$$

$$\begin{cases} \alpha = 1/2 \\ \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} = \frac{1/2 \times (-1/2)}{2} = -\frac{1}{8} \\ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} = \frac{1/2 \times (-1/2) \times (-3/2)}{6} = \frac{1}{16} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 (e) \quad \frac{e^x}{1-x} &= e^x \times \frac{1}{1-x} = \left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right) \left(1+x+x^2+x^3+o(x^3)\right) \\
 &= 1+x+x^2+x^3+x+x^2+x^3+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3) \\
 &= \boxed{1+2x+\frac{5}{2}x^2+\frac{8}{3}x^3+o(x^3)}_{x \rightarrow 0}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (f) \quad e^x \ln(1-x) &= \left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right) \left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right) \\
 &= -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-x^2-\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3) \\
 &= \boxed{-x-\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{3}x^3+o(x^3)}_{x \rightarrow 0}
 \end{aligned}$$

$$(g) \quad 3^x = e^{x \ln(3)} = \boxed{1+x \ln(3) + \frac{x^2 \ln(3)^2}{2} + \frac{x^3 \ln(3)^3}{6} + o(x^3)}_{x \rightarrow 0}$$

$$\begin{aligned}
 (h) \quad e^{\cos x} &= e^{1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)} = e \times e^{-\frac{x^2}{2}+o(x^3)} \\
 &= e \left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right) \\
 &= \boxed{e - \frac{ex^2}{2} + o(x^3)}_{x \rightarrow 0}
 \end{aligned}$$

$$\text{cf. } e^\mu = 1 + \mu + \frac{\mu^2}{2} + o(\mu^2)_{\mu \rightarrow 0}$$

$$\text{avec } \mu = -\frac{x^2}{2} + o(x^3)_{x \rightarrow 0}$$

$$\begin{aligned}
 (i) \quad \tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)} \\
 &= x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \text{ par DPC}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|c}
 x - x^3/6 & 1 - x^2/2 \\
 \hline
 -(x - x^3/2) & x + x^3/3 \\
 \hline
 x^3/3 & \\
 \hline
 -(x^3/3 + o(x^3)) & \\
 \hline
 o(x^3) &
 \end{array}$$

$$e^\mu = 1 + \mu + \frac{\mu^2}{2} + \frac{\mu^3}{6} + o(\mu^3)_{\mu \rightarrow 0}$$

$$\text{Ici, } \mu = x + x^3/3 + o(x^3)$$

$$\mu^2 = (x + x^3/3 + o(x^3))(x + x^3/3 + o(x^3)) = x^2 + o(x^3)$$

$$\mu^3 = (x + x^3/3 + o(x^3))(x^2 + o(x^3)) = x^3 + o(x^3)$$

$$\text{d'où } e^{\tan(x)} = 1 + x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = \boxed{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)}_{x \rightarrow 0}$$

$$(g) * \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3) \text{ donc } \frac{x}{1+x} = x - x^2 + x^3 + o(x^3)$$

$$\text{Posons } u = \frac{x}{1+x} = x - x^2 + x^3 + o(x^3)$$

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3)$$

$$u^2 = (x - x^2 + x^3 + o(x^3))(x - x^2 + x^3 + o(x^3)) = x^2 - x^3 - x^3 + o(x^3) = x^2 - 2x^3 + o(x^3)$$

$$u^3 = (x - x^2 + x^3 + o(x^3))(x^2 - 2x^3 + o(x^3)) = x^3 + o(x^3)$$

Alors

$$e^{\frac{x}{1+x}} = 1 + x - x^2 + x^3 + \frac{1}{2}(x^2 - 2x^3) + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$= 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$* (1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} u^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} u^3 + o(u^3)$$

$$\alpha = -2$$

$$\alpha(\alpha-1) = 6$$

$$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) = 24$$

$$\text{donc } \frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + o(x^3)$$

$$* \text{ Enfin } e^{\frac{x}{1+x}} \times \frac{1}{(1+x)^2} = (1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3))(1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + o(x^3))$$

$$= 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + x - 2x^2 + 3x^3 - \frac{x^2}{2} + x^3 + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$= \boxed{1 - x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}$$

$$(R) \ln\left(\frac{1}{\cos x}\right) = -\ln(\cos x) = -\ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)$$

$$\text{Or } \ln(1-u) = -u - \frac{u^2}{2} + o(u^2) \text{ avec } u = \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$\text{donc } \boxed{\ln\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \frac{x^2}{2} + o(x^3)}$$

$$(L) (1 + \sin x)^{1/x} = \exp\left(\frac{\ln(1 + \sin x)}{x}\right)$$

DIVISION PAR $x \Rightarrow$ ON Pousse
À L'ORDRE 4

$$\bullet \ln(1 + \sin x) = \ln\left(1 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)$$

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + o(u^4)_{u \rightarrow 0}$$

Ici $u = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$

$$u^2 = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) = x^2 - \frac{x^4}{6} - \frac{x^4}{6} + o(x^4)_{x \rightarrow 0} = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)_{x \rightarrow 0}$$

$$u^3 = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) = x^3 + o(x^4)$$

$$u^4 = x^4 + o(x^4)$$

donc $\ln(1+\sin x) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right) + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 + o(x^4)$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)_{x \rightarrow 0}$$

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{4} = \frac{2-3}{12}$$

$$= -\frac{1}{12}$$

d'où $\frac{\ln(1+\sin x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)_{x \rightarrow 0}$

• AINSI $(1+\sin x)^{1/x} = e^{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)} = e \times e^{-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)}$

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3)_{u \rightarrow 0}$$

Ici $u = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)_{x \rightarrow 0}$

$$u^2 = \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)_{x \rightarrow 0}\right) \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)_{x \rightarrow 0}\right) = \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)_{x \rightarrow 0}$$

$$u^3 = -\frac{x^3}{8} + o(x^3)_{x \rightarrow 0}$$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{7}{24}$$

donc $(1+\sin x)^{1/x} = e \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{12} - \frac{x^3}{48} + o(x^3)\right)$

$$-\frac{1}{12} - \frac{1}{12} - \frac{1}{48} = -\frac{2}{48} = -\frac{3}{16}$$

$$= \boxed{e \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{7x^2}{24} - \frac{3x^3}{16} + o(x^3)_{x \rightarrow 0}\right)}$$

EX02

⇒ même principe ! On a compris, ça suffit (😊)

EX03

$$(a) \quad x(1+\cos x) = x\left(1+1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) = 2x - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) \\ = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\text{donc } 2\tan(x) = 2x + \frac{2x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\text{Ainsi } x(1+\cos x) - 2\tan(x) = -\frac{x^3}{2} - \frac{2x^3}{3} + o(x^3) = -\frac{7x^3}{6} + o(x^3) \quad \boxed{\sim -\frac{7x^3}{6}}$$

$$(b) \quad (1+x)^{1/x} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$$

$$\text{Or } \ln(1+x) = x + o(x) \text{ donc } \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 + o(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

$$\text{Par composition de limites, } (1+x)^{1/x} = e^{1+o(1)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} e \text{ donc } \boxed{(1+x)^{1/x} \sim e}$$

$$(c) \quad \sin(x)^{\sin(x)} = e^{\sin(x) \ln(\sin(x))}$$

$$\sin(x) = x + o(x) \text{ donc } \ln(\sin x) = \ln(x + o(x)) = \ln(x(1+o(1))) = \ln(x) + \ln(1+o(1)) \\ = \ln(x) + o(1)$$

$$\text{Or } \sin(2x) = 2x + o(x)$$

$$\text{si bien que } \sin(2x) \ln(\sin x) = 2x \ln(x) + o(x \ln x)$$

$$\text{On sait que } \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \text{ par croissances comparées donc } \lim_{x \rightarrow 0} \sin(2x) \ln(\sin x) = 0$$

$$\text{Ainsi } \lim_{x \rightarrow 0} \sin(x)^{\sin(x)} = e^0 = 1 \text{ par composition donc } \boxed{\sin(x)^{\sin(x)} \sim 1}$$

$$\text{DANS (b) ET (c), ON UTILISE } a^b = e^{b \ln(a)}$$

EXO 4

(a) On établit un DL du numérateur puisque le dénominateur est x^2

$$e^u = 1 + u + o(u) \text{ donc } 2^x = e^{x \ln 2} = 1 + x \ln(2) + o(x) \\ 3^x = e^{x \ln 3} = 1 + x \ln(3) + o(x)$$

si bien que

$$\frac{2^x - 3^x}{x} = \frac{x \ln(2) - x \ln(3) + o(x)}{x} = \ln(2) - \ln(3) + o(1)$$

soit

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{x} = \ln(2) - \ln(3) = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

(b) $[\ln(1+x)]^x = e^{x \ln(\ln(1+x))}$ car $a^b = e^{b \ln(a)}$ par définition.
Or $\ln(1+x) = x + o(x) = x(1 + o(1))$

$$\text{donc } \ln(\ln(1+x)) = \ln(x) + \ln(1 + o(1)) = \ln(x) + o(1) \\ \text{et } x \ln(\ln(1+x)) = x \ln(x) + o(x)$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$ (croissances comparées), alors $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(\ln(1+x)) = 0$

d'où $\lim_{x \rightarrow 0} [\ln(1+x)]^x = 0$ par composition

(c) On établit un DL du numérateur:

$$e^x = 1 + x + o(x) \text{ et } \sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x + o(x) \text{ donc } e^x - \sqrt{1-x} = \frac{3}{2}x + o(x)$$

$$\text{d'où } \frac{e^x - \sqrt{1-x}}{x} = \frac{3}{2} + o(1) \text{ soit } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt{1-x}}{x} = \frac{3}{2}$$

(d) $\tan(x)^{\sin(x)} = e^{\sin(x) \ln(\tan(x))}$

Or $\sin(x) \sim x$ et $\tan(x) = x + o(x)$

$$\text{d'où } \ln(\tan(x)) = \ln(x + o(x)) = \ln(x(1 + o(1))) = \ln(x) + \ln(1 + o(1)) \sim \ln(x)$$

AINS $\sin(x) \ln(\tan(x)) \sim x \ln x$

on $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ par croissances comparées

donc $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) \ln(\ln(x)) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x)^{\sin(x)} = 1$ par composition

(e) Cette fois-ci, il faut un DL₂ du numérateur car le dénominateur équivaut à x^2
EN EFFET

• On a $e^x = 1 + x + o(x)$ donc $e^x - 1 = x + o(x) \sim x$ d'où $(e^x - 1)^2 \sim x^2$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ De plus, } 1 - x \sin(x) - \cos(x) &= 1 - x(x + o(x)) - (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) \\ &= 1 - x^2 - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ &= -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim -\frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

donc $\frac{1 - x \sin(x) - \cos(x)}{(e^x - 1)^2} \sim -\frac{1}{2}$ soit $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x \sin(x) - \cos(x)}{(e^x - 1)^2} = -\frac{1}{2}$

(f) $\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - \sin^2(x)}{x^2 \sin^2(x)}$ Or $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$
donc $\sin^2(x) = (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))$
 $= x^2 - \frac{x^4}{6} - \frac{x^4}{6} + o(x^4)$
 $= x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$

Ainsi $x^2 - \sin^2(x) = \frac{x^4}{3} + o(x^4) \sim \frac{x^4}{3}$ et $x^2 \sin^2(x) = x^4 + o(x^4) \sim x^4$

et $\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} \sim \frac{1}{3}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{3}$

EXOS On va effectuer des DL₁ en 0 des différentes fonctions proposées

(a) $\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2+x+o(x)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\frac{x}{2}+o(x)} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{2} + o(x) \right) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + o(x)$

Ainsi $\mathcal{C}_f$ a pour tangente en 0 $(T): y = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}$

$$(b) \quad g(x) = \ln\left(2\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)\right) = \ln(2) + \ln\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right) \\ = \ln(2) + \ln(1+x+o(x)) = \ln(2) + x + o(x) \quad x \rightarrow 0$$

La courbe $\mathcal{C}_g$ a pour tangente en O la droite $(T): y = \ln(2) + x$

$$(c) \quad \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln(x+1) - \ln(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln(x) \quad \text{car } \ln(x+1) = o(\ln x) \text{ puisque } \ln(x) \rightarrow -\infty \text{ et } \ln(x+1) \rightarrow 0$$

De ce fait, $h(x) \underset{0}{\sim} -x^2 \ln(x)$ donc $\frac{h(x)}{x} \underset{0}{\sim} -x \ln x$ si bien que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{x} = 0$

Ainsi;

$$h(x) = o(x) \quad x \rightarrow 0 : \text{ la courbe } \mathcal{C}_h \text{ a pour tangente en } O \quad (T): y = 0$$

EVIDEMMENT SI L'ON VEUT OBTENIR LES POSITIONS DES COURBES PAR RAPPORT AUX TANGENTES, IL FAUT POUSSER LES DL PLUS LOIN

$$(b) \quad g(x) = \ln(2) + \ln\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right) \\ \text{Or } \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3) \quad \text{avec } \begin{cases} u = x + \frac{x^2}{2} \\ u^2 = x^2 + x^3 + o(x^3) \\ u^3 = x^3 + o(x^3) \end{cases}$$

donc $\ln\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

soit

$$g(x) = \ln(2) + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{donc } g(x) - (\ln(2) + x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^3}{6}$$

Ceci montre que $\mathcal{C}_g$ est située AU-DESSUS de la tangente $(T): y = \ln(2) + x$ en O^- et en-DESSOUS en O^+

$$(d) \quad \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln(x+1) - \ln(x) = -\ln(x) + x + o(x) \quad x \rightarrow 0 \\ \text{donc } h(x) = x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = -x^2 \ln(x) + x^3 + o(x^3) \\ = -x^2 \ln(x) + o(x^2)$$

Ainsi $h(x) \underset{0}{\sim} \underbrace{x^2(-\ln x)}_{>0}$

si bien que la courbe $\mathcal{C}_h$ est située AU-DESSUS de la tangente $(T): y = 0$ au voisinage de $x = 0$

$$(c) \quad \frac{2x}{x^2-1} = -2x \times \frac{1}{1-x^2} = -2x(1+o(1)) = -2x + o(x) \text{ sur } x \rightarrow 0. \text{ On } e^u = 1 + u + o(u) \text{ sur } u \rightarrow 0$$

$$\text{donc } \exp\left(\frac{2x}{x^2-1}\right) = 1 - 2x + o(x) \text{ et } i(x) = x \exp\left(\frac{2x}{x^2-1}\right) = x - 2x^2 + o(x^2)$$

Ceci montre que la courbe Γ admet $(T): y=x$ pour tangente en 0.

De plus, $i(x) = x - 2x^2$ donc Γ est située EN-DESSOUS de (T) au voisinage de 0.

EX06

$$(a) \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \text{ donc } \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x) \text{ sur } x \rightarrow 0$$

$$\text{Ainsi } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \text{ soit } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) : \text{ la fonction } f \text{ est continue en } 0$$

$$\bullet \text{ Pour } x \neq 0, \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1 - \frac{x}{2} + o(x) - 1}{x} = -\frac{1}{2} + o(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}$$

$$\text{donc la fonction } f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = -1/2$$

$$(b) \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) \text{ sur } x \rightarrow 0 \text{ et } \sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) \text{ sur } x \rightarrow 0$$

$$\text{donc } \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \frac{x + o(x^2)}{x} = 1 + o(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

$$\text{Autrement dit, } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0) : \text{ la fonction } g \text{ est continue en } 0$$

$$\bullet \text{ Pour } x \neq 0 \quad \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{1 + o(x) - 1}{x} = o(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$\text{donc la fonction } g \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } g'(0) = 0$$

EX07 On pose à chaque fois $h = 1/x$ pour $x > 0$

$$(a) \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1} = \frac{\sqrt{1/h^2+1}}{1/h-1} = \frac{h\sqrt{1/h^2+1}}{h(1/h-1)} = \frac{\sqrt{1+h^2}}{1-h} \quad \text{car } h = \sqrt{h^2} \text{ vu que } h > 0$$

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2) \quad \text{donc } \sqrt{1+h^2} = 1 + \frac{h^2}{2} - \frac{h^4}{8} + o(h^4)$$

Comme $\frac{1}{1-h} = 1 + h + h^2 + h^3 + h^4 + o(h^4)$, il en découle que

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1} &= \left(1 + \frac{h^2}{2} - \frac{h^4}{8} + o(h^4)\right) \left(1 + h + h^2 + h^3 + h^4 + o(h^4)\right) = 1 + h + h^2 + h^3 + h^4 + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{2} + \frac{h^4}{2} - \frac{h^4}{8} + o(h^4) \\ &= 1 + h + \frac{3h^2}{2} + \frac{3h^3}{2} + \frac{11h^4}{8} + o(h^4) \end{aligned}$$

$$\text{soit } \boxed{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{2x^2} + \frac{3}{2x^3} + \frac{11}{8x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)}$$

$$(b) \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{x+2}{x}} = \sqrt{1 + \frac{2}{x}} = \sqrt{1+2h}$$

$$(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} u^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} u^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{24} u^4 + o(u^4)$$

$$\begin{cases} \alpha = 1/2 \\ \alpha(\alpha-1) = -1/4 \\ \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) = 3/8 \\ \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3) = -15/16 \end{cases}$$

$$\text{donc } \sqrt{1+u} = (1+u)^{1/2} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} - \frac{5u^4}{128} + o(u^4)$$

$$\text{Ainsi } \sqrt{1+2h} = 1 + h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{2} - \frac{5h^4}{8} + o(h^4)$$

$$\text{soit } \boxed{\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}} = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^3} - \frac{5}{8x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)}$$

$$(c) \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} = \sqrt{x^2(1+1/x^2)} - \sqrt{x^2(1-1/x^2)} = x \left(\sqrt{1+1/x^2} - \sqrt{1-1/x^2} \right) = \frac{1}{h} \left(\sqrt{1+h^2} - \sqrt{1-h^2} \right)$$

$$\text{Or } \sqrt{1+h^2} = 1 + \frac{h^2}{2} - \frac{h^4}{8} + o(h^5) \quad \text{et} \quad \sqrt{1-h^2} = 1 - \frac{h^2}{2} - \frac{h^4}{8} + o(h^5)$$

$$\text{donc } \frac{1}{h} \left(\sqrt{1+h^2} - \sqrt{1-h^2} \right) = \frac{1}{h} \left(h^2 + o(h^5) \right) = h + o(h^4)$$

si bien que

$$\boxed{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{x^2-1} = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)}$$

$$\begin{aligned}
 (d) \quad \frac{x^2+2}{x^2+x} &= \frac{x^2(1+2/x^2)}{x^2(1+1/x)} = \frac{1+2h^2}{1+h} = \frac{(1+2h^2)(1-h+h^2-h^3+h^4+o(h^4))}{h \rightarrow 0} \\
 &= 1-h+h^2-h^3+h^4 + 2h^2-2h^3+2h^4 + o(h^4) \\
 &= 1-h+3h^2-3h^3+3h^4+o(h^4) \quad h \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

soit $\boxed{\frac{x^2+2}{x^2+x} = 1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{3}{x^3} + \frac{3}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) \quad x \rightarrow +\infty}$

$$\begin{aligned}
 (e) \quad \frac{\sin(1/x)}{x+1} &= \frac{\sin(h)}{1/h+1} = \frac{h \sin(h)}{1+h} = h(h-h^3/6+o(h^3))(1-h+h^2+o(h^2)) \\
 &= (h^2-h^4/6+o(h^4))(1-h+h^2+o(h^2)) \\
 &= h^2-h^3+h^4-h^4/6+o(h^4) \\
 &= h^2-h^3+\frac{5}{6}h^4+o(h^4) \quad h \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

si bien que $\boxed{\frac{\sin(1/x)}{x+1} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{5}{6x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) \quad x \rightarrow +\infty}$

$$\begin{aligned}
 (f) \quad \ln(x+\sqrt{1+x^2}) &= \ln\left(x\left(1+\sqrt{1+1/x^2}\right)\right) = \ln(x) + \ln\left(1+\sqrt{1+1/x^2}\right) \\
 \text{d'où } \ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \ln(x) &= \ln\left(1+\sqrt{1+1/x^2}\right) = \ln\left(1+\sqrt{1+h^2}\right) \\
 &= \ln\left(1+1+\frac{h^2}{2}-\frac{h^4}{8}+o(h^4)\right) = \ln\left(2+\frac{h^2}{2}-\frac{h^4}{8}+o(h^4)\right) \\
 &= \ln\left(2\left(1+\frac{h^2}{4}-\frac{h^4}{16}+o(h^4)\right)\right) = \ln(2) + \ln\left(1+\frac{h^2}{4}-\frac{h^4}{16}+o(h^4)\right) \quad h \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2) \quad \text{avec ici } u = \frac{h^2}{4} - \frac{h^4}{16} + o(h^4) \text{ et } u^2 = \frac{h^4}{16} + o(h^4)$$

si bien que $\ln\left(1+\frac{h^2}{4}-\frac{h^4}{16}+o(h^4)\right) = \frac{h^2}{4} - \frac{h^4}{16} - \frac{h^4}{32} + o(h^4) = \frac{h^2}{4} - \frac{3h^4}{32} + o(h^4)$

Ainsi $\boxed{\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \ln(x) = \ln(2) + \frac{1}{4x^2} - \frac{3}{32x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) \quad x \rightarrow +\infty}$

REM: DANS CHAQUE CAS, ON A $x \rightarrow +\infty$ DONC $h = 1/x \rightarrow 0^+$

EX08 Dans chaque cas, on pose $h = 1/x \dots$ de sorte que $h \rightarrow 0^+$

$$(a) x(e^{1/x} - 1) = \frac{1}{h}(e^h - 1) = \frac{1}{h}(1 + h + o(h) - 1) = 1 + o(1) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1$$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{1/x} - 1) = 1$

$$(b) \left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{2x} = \left(\frac{2x(1+1/2x)}{2x(1-1/2x)}\right)^{2x} = \left(\frac{1+h/2}{1-h/2}\right)^{\frac{2}{h}} = \exp\left[\frac{2}{h}\left(\ln\left(1+\frac{h}{2}\right) - \ln\left(1-\frac{h}{2}\right)\right)\right]$$

Or $\ln(1+\frac{h}{2}) = \frac{h}{2} + o(h)$ et $\ln(1-\frac{h}{2}) = -\frac{h}{2} + o(h)$ donc $\ln(1+\frac{h}{2}) - \ln(1-\frac{h}{2}) = h + o(h)$

d'où $\frac{2}{h}(\ln(1+\frac{h}{2}) - \ln(1-\frac{h}{2})) = 2 + o(1) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 2$

On en déduit par composition de limites que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{2x} = e^2$$

$$(c) \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln(1+\frac{1}{x})} = e^{\frac{1}{h} \ln(1+h)}$$

Or $\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)$ donc $\frac{1}{h} \ln(1+h) = 1 - \frac{h}{2} + o(h)$

d'où $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{1 - \frac{h}{2} + o(h)} = e \times e^{-\frac{h}{2} + o(h)} = e \times \left(1 - \frac{h}{2} + o(h)\right)$ cf. $e^u = 1 + u + o(u)$
 $= e - \frac{eh}{2} + o(h)$

soit $x[e - (1 + \frac{1}{x})^x] = \frac{1}{h}\left[e - \left(e - \frac{eh}{2} + o(h)\right)\right] = \frac{1}{h}\left(\frac{eh}{2} + o(h)\right) = \frac{e}{2} + o(1)$

si bien que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\left[e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right] = \frac{e}{2}$ ($\ln(1/x) = -\ln(x)$)

$$(d) \ln(1+x) = \ln\left(x\left(\frac{1}{x} + 1\right)\right) = \ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \text{ donc } \frac{\ln(1+x)}{\ln(x)} = 1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln(x)} = 1 - \frac{\ln(1+h)}{\ln(h)}$$

$$\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^x = e^{x \ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)} = e^{\frac{1}{h} \ln\left(1 - \frac{\ln(1+h)}{\ln(h)}\right)}$$

$$\ln(1+h) \sim h \text{ as } h \rightarrow 0$$

Comme $\frac{\ln(1+h)}{\ln(h)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$, alors $\ln\left(1 - \frac{\ln(1+h)}{\ln(h)}\right) \sim -\frac{\ln(1+h)}{\ln(h)} \sim -\frac{h}{\ln(h)}$
 $-\infty \leftarrow \frac{h}{\ln(h)} \xrightarrow{h \rightarrow 0}$

si bien que $\frac{1}{h} \ln\left(1 - \frac{\ln(1+h)}{\ln(h)}\right) \sim -\frac{1}{\ln(h)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ par quotient de limites.

On en déduit par composition de limites que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)} \right)^x = 1$$

EX09

(a) $x^{1/x} = e^{\frac{\ln x}{x}}$ on $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ par croissances comparées

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x} = 1$ par composition

$$x^{1/x} \sim 1_{+\infty}$$

(b) $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x} = e^{3x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, alors $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}$

d'où $3x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \sim 3$. Par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x} = e^3$ soit $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x} \sim e^3_{+\infty}$

(c) Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, on a $e^{1/x} = 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ soit $e^{1/x} - 1 = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}_{+\infty}$

Par ailleurs $\sqrt{x^2+x} = \sqrt{x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = x\sqrt{1 + \frac{1}{x}} \sim x$ (pour $x > 0$, $\sqrt{x^2} = x$)

si bien que

$$\frac{e^{1/x} - 1}{\sqrt{x^2+x}} \sim \frac{1}{x^2}_{+\infty}$$

EX010

(a) Pour $x > 1$, $\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} = \sqrt{\frac{x^2}{1-1/x}} = \frac{x}{\sqrt{1-1/x}} = x\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-1/2}$

On $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} u^2 + o(u^2)$ soit $(1+u)^{-1/2} = 1 - \frac{u}{2} + \frac{3u^2}{8} + o(u^2)$

d'où $x\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-1/2} = x\left(1 + \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \boxed{x + \frac{1}{2}} + \boxed{\frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)} \rightarrow 0$

Ceci montre que Cf admet pour asymptote en $+\infty$ la droite

$$\mathcal{D}: y = x + \frac{1}{2}$$

La position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{D}$ est donnée par le signe de $f(x) - (x + \frac{1}{2})$

Or $f(x) - (x + \frac{1}{2}) \sim_{+\infty} \frac{3}{8x}$ est positif au voisinage de $+\infty$, donc $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de $\mathcal{D}$ au voisinage de $+\infty$.

LES CALCULS SONT SIMILAIRES EN $-\infty$... SAUF QUE $\sqrt{x^2} = -x$ ET DONC

$$f(x) = -x \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-1/2} = -x - \frac{1}{2} - \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

ON OBTIENT POUR ASYMPTOTE LA DROITE $\mathcal{D}: y = -x - \frac{1}{2}$ ET $f(x) - (x - \frac{1}{2}) \sim_{-\infty} \frac{3}{8x} > 0$
DONC $\mathcal{C}_f$ EST AU-DESSUS DE $\mathcal{D}$

(b) Posons $h = \frac{1}{x}$: $g(h) = \frac{1/h}{1+e^h} = \frac{1/h}{2+h+\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{6}+o(h^3)} = \frac{1}{h} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\frac{h}{2}+\frac{h^2}{4}+\frac{h^3}{12}+o(h^3)}$

OR $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3)$ avec $\begin{cases} u = \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} + \frac{h^3}{12} + o(h^3) \\ u^2 = \frac{h^2}{4} + h \times \frac{h^2}{8} + o(h^3) = \frac{h^2}{4} + \frac{h^3}{8} + o(h^3) \\ u^3 = \frac{h^3}{8} + o(h^3) \end{cases}$

$$\begin{aligned} u^2 &= \frac{h^2}{4} + h \times \frac{h^2}{8} + o(h^3) = \frac{h^2}{4} + \frac{h^3}{8} + o(h^3) \\ u^3 &= \frac{h^3}{8} + o(h^3) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{12} = \frac{6-3-2}{24} = \frac{1}{24} \right)$$

$$\text{donc } g(h) = \frac{1}{2h} \left(1 - \frac{h}{2} - \frac{h^2}{4} - \frac{h^3}{12} + \frac{h^2}{4} + \frac{h^3}{8} - \frac{h^3}{8} + o(h^3) \right) = \frac{1}{2h} \left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^3}{24} + o(h^3) \right)$$

$$= \frac{1}{2h} - \frac{1}{4} + \frac{h^2}{48} + o(h^2) = \boxed{\frac{x}{2} - \frac{1}{4}} + \boxed{\frac{1}{48x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)} \rightarrow 0^+$$

si bien que $\mathcal{C}_f$ coupe la droite $\mathcal{D}: y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$ pour asymptote en $+\infty$
et $\mathcal{C}_f$ est située AU-DESSUS de $\mathcal{D}$ au voisinage de $+\infty$

RÉSULTATS IDENTIQUES EN $-\infty$, LES CALCULS SONT RIGOREUSEMENT LES MÊMES

$$(c) \quad h = \frac{1}{x} : \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} + 1 = 1 + e^h = 2 + h + \frac{h^2}{2} + o(h^2) \\ e^{\frac{1}{x}} - 1 = e^h - 1 = h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + o(h^3) \end{cases}$$

donc

$$h(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} + 1}{e^{\frac{1}{x}} - 1} = \frac{2 + h + \frac{h^2}{2} + o(h^2)}{h(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{6} + o(h^2))} = \frac{1}{h} \times \frac{2 + h + \frac{h^2}{2} + o(h^2)}{1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{6} + o(h^2)}$$

$$= \frac{1}{h} \left(2 + \frac{h^2}{6} + o(h^2) \right)$$

$$= \frac{2}{h} + \frac{h}{6} + o(h)$$

$$= \boxed{2x} + \boxed{\frac{1}{6x} + o\left(\frac{1}{x}\right)} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0^+$$

$$\begin{array}{r|l} 2 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) & 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} \\ - (2 + x + \frac{x^2}{3}) & 2 + \frac{x^2}{6} \\ \hline \frac{x^2}{6} + o(x^2) & \\ - (\frac{x^2}{6} + o(x^2)) & \\ \hline o(x^2) & \end{array}$$

si bien que la courbe Γ_R admet pour asymptote en $+\infty$
la droite $\mathcal{D}: y = 2x$. En outre, Γ_R
est placée AU-DESSUS de $\mathcal{D}$ au voisinage de $+\infty$

MÊMES CALCULS & MÊME DL EN $-\infty$... C'EST LA MÊME
ASYMPTOTE MAIS Γ_R VA SE TROUVER EN-DESSOUS !

EXO 1

- 1) Comme $|x|+1 \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0.
De plus, $f(-x) = \frac{-x}{|-x|+1} = \frac{-x}{|x|+1} = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

AINSI la fonction f est IMPAIRE ... sa courbe est symétrique par rapport à l'origine

- 2) Étudions les variations sur $]0, +\infty[$.

Pour tout $x > 0$, on a $f(x) = \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$ donc f est dérivable et $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$.

Ainsi $f \uparrow$ sur $]0, +\infty[$.

- Enfin $f(0) = 0$ et $f(x) = \frac{x}{x+1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1 \rightarrow 1$ (expression valable pour $x > 0$).
- On complète le tableau de variations par symétrie centrale.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	+
$f(x)$	$-1 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow 1$	

Notons que comme f est impaire, sa dérivée f' (définie uniquement sur $\mathbb{R}^*$) est paire.

- 3) On reconnaît clairement le tableau de variations d'une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1, 1[$.
Retrouvons-le par le calcul. Pour $y \in] -1, 1[$ et $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x}{|x|+1} = y \quad \dots \text{ce qui montre au passage que } x \text{ et } y \text{ sont de même signe}$$

• Si $x \geq 0$ et $y \geq 0$: $f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x}{1+x} = y \Leftrightarrow x = y + xy \Leftrightarrow x - xy = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{1-y}$

• Si $x \leq 0$ et $y \leq 0$: $f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} = y \Leftrightarrow x = y - xy \Leftrightarrow x + xy = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{1+y} = \frac{y}{1-|y|}$

AINSI tout réel $y \in] -1, 1[$ admet pour unique antécédant le réel $x = \frac{y}{1-|y|}$.

Ceci montre que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1, 1[$ et que sa bijection réciproque est l'application

$$f^{-1}:] -1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$y \mapsto \frac{y}{1-|y|}$$

EX02

1) Par définition, $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ d'où $\lfloor x \rfloor - 1 \leq x - 1 < \lfloor x \rfloor$
 et donc $\boxed{x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq \lfloor x \rfloor}$

2) Comme $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, alors $\lfloor x \rfloor + 1 \leq x + 1 < (\lfloor x \rfloor + 1) + 1$
 avec $\lfloor x \rfloor + 1 \in \mathbb{Z}$. Par définition et unicité de la partie entière,
 on en déduit que $\boxed{\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1}$

3) On a: $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ et $\lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$

donc $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$

si bien que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1 \rightarrow \lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$

ou $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1 \leq x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2 \rightarrow \lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$

On a donc

$$\boxed{\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \text{ ou } \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1}$$

EX03

1) Pour $x \in]0, a[$, $0 < \frac{x}{a} < 1$ donc $\lfloor \frac{x}{a} \rfloor = 0$ et $\frac{b}{x} \lfloor \frac{x}{a} \rfloor = 0$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{b}{x} \lfloor \frac{x}{a} \rfloor = 0}$$

2) Pour tout $x > 0$, $\frac{b}{x} - 1 < \lfloor \frac{b}{x} \rfloor \leq \frac{b}{x}$ (cf. exercice 2 question 1)

donc $\frac{b}{a} - \frac{x}{a} < \frac{x}{a} \lfloor \frac{b}{x} \rfloor \leq \frac{b}{a}$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{a} = 0$, on déduit du théorème des Gendarmes que $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{a} \lfloor \frac{b}{x} \rfloor = \frac{b}{a}}$

EX04

$$A = \ln(e^{3/2}) + \sqrt{3} = \frac{3}{2} + \sqrt{3}$$

$$B = \ln(e^{1/4}) = \frac{1}{4}$$

$$C = e^{-2 \ln(2)} = e^{\ln(2^{-2})} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

$$D = e^{-2 \ln 2} = C = \frac{1}{4}$$

S'entres est le membre $\boxed{A}$

EXOS

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 > x^2$ donc $\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = |x| = \max(x, -x)$

d'où $x + \sqrt{x^2 + 1} > |x| + x \geq 0$ puisque $|x| \geq -x$

et $\sqrt{x^2 + 1} - x > |x| - x \geq 0$ puisque $|x| \geq x$

De ce fait, l'expression proposée est bien définie et l'on a

$$\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) = \ln((\sqrt{x^2 + 1} + x)(\sqrt{x^2 + 1} - x)) = \ln(x^2 + 1 - x^2) = \ln(1) = 0$$

CQFD!

EXOS

1). $1 - 3x > 0 \Leftrightarrow 1 > 3x \Leftrightarrow x < 1/3$

Pour $x \in]-\infty; 1/3[$, on a $\ln(1 - 3x) = 2 \Leftrightarrow 1 - 3x = e^2 \Leftrightarrow 3x = 1 - e^2$

AINSI $\mathcal{G} = \left\{ \frac{1 - e^2}{3} \right\} \Leftrightarrow x = \frac{1 - e^2}{3}$

• $x^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$ cf. tableau de signes de $x^2 - 9$

$x > 0 \Leftrightarrow x \in]0; +\infty[$

De ce fait, l'équation est définie sur $]3; +\infty[$

Pour $x > 3$, on a $\ln(x^2 - 9) = \ln(x) \Leftrightarrow x^2 - 9 = x \Leftrightarrow x^2 - x - 9 = 0$

$\Delta = 1 + 36 = 37$ racines: $x_1 = \frac{1 - \sqrt{37}}{2} < 0$ & $x_2 = \frac{1 + \sqrt{37}}{2} > \frac{\sqrt{36}}{2} = 3$

AINSI $\mathcal{G} = \left\{ \frac{1 + \sqrt{37}}{2} \right\}$

NE CONVIENT PAS!

CONVIENT!

2) Cette inéquation est définie pour $x+1 \neq 0$ et $2x+1 \neq 0$ soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; -1/2\}$

Pour un tel réel x , $\ln|x+1| - \ln|2x+1| \leq \ln(2) \Leftrightarrow |x+1| \leq 2|2x+1| = |4x+2|$

$\Leftrightarrow (4x+2)^2 - (x+1)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (4x+2+x+1)(4x+2-x-1) \geq 0$

$\Leftrightarrow (5x+3)(3x+1) \geq 0$

$-\infty$	-1	$-3/5$	$-1/2$	$-1/3$	$+\infty$			
+		+	0	-		-	0	+

$\mathcal{G} =]-\infty; -1[\cup]-1; -3/5[\cup]-1/3; +\infty[$

EX07

croissances comparées

(a) $\ln x = o(x^2)$ donc $\ln(x) - x^2 \underset{+\infty}{\sim} -x^2$ et $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x) - x^2) = -\infty}$

(b)
$$\begin{array}{r|l} x^3 - 8 & x-2 \\ \hline -(x^3 - 2x^2) & x^2 + 2x + 4 \\ \hline 2x^2 - 8 & \\ -(2x^2 - 4x) & \\ \hline 4x - 8 & \\ \hline 0 & \end{array}$$
 Ainsi $x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
d'où $(x-2)^2 \ln(x^3 - 8)$
 $= (x-2)^2 \ln(x-2) + (x-2)^2 \ln(x^2 + 2x + 4)$ pour $x > 2$

• Or $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2)^2 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 2} \ln(x^2 + 2x + 4) = \ln(12)$ par continuité de $\ln$

donc $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2)^2 \ln(x^2 + 2x + 4) = 0$ par produit

• Par ailleurs $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^4 \ln x = 0$ par croissances comparées

donc $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2)^2 \ln(x-2) = 0$ par composition

d'où par somme $\boxed{\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2)^2 \ln(x^3 - 8) = 0}$

(c) Pour $x > 0$, on a : $\ln(1+x) = \ln(x(1+1/x)) = \ln x + \ln(1+1/x)$
Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1/x = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+1/x) = \ln 1 = 0$ par somme et composition

Or $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ donc $\ln(1+1/x) = o(\ln x)$ et $\ln(x) + \ln(1+1/x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$

Ainsi $\frac{\ln(1+x)}{x^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(x)}{x^3}$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^3} = 0$ par croissances comparées

d'où $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^3} = 0}$

(d) Comme $\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$, on a $\ln(1+2x) \underset{0}{\sim} 2x$ et $\ln(1-4x) \underset{0}{\sim} -4x$
d'où $\frac{\ln(1+2x)}{\ln(1-4x)} \underset{0}{\sim} \frac{2x}{-4x} = -\frac{1}{2}$
soit $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{\ln(1-4x)} = -1/2}$

(e) On a : $2 = o(x)$ donc $x+2 \underset{+\infty}{\sim} x$

et : $\sqrt{x} = o(x) = o(x \ln x)$ donc $x \ln x + \sqrt{x} \underset{+\infty}{\sim} x$

Il s'agit que $\frac{x+2}{x \ln x + \sqrt{x}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(x)}$. Or, par quotient de limites, $\lim_{+\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$

AINSI $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x \ln x + \sqrt{x}} = 0$

(f) Pour tout $x > 0$, $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right)$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{n} = 0$ et que $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$

alors $\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{n}$ donc $n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} x$

AINSI $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = x$ donc par continuité de exp : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$

EXO 8

(a). $f : x \mapsto \ln(1+x^2)$ définie sur $\mathbb{R}$ car $1+x^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

• $f(-x) = \ln(1+x^2) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc f est paire

$\leadsto$ on l'étudie sur $[0; +\infty[$

• $f(0) = \ln(1) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ par somme et composition de limites

$x \mapsto 1+x^2 \nearrow$ sur $[0; +\infty[$, $\ln \nearrow$ sur $]0; +\infty[$ donc $f \nearrow$ par composition de fonctions $\nearrow$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

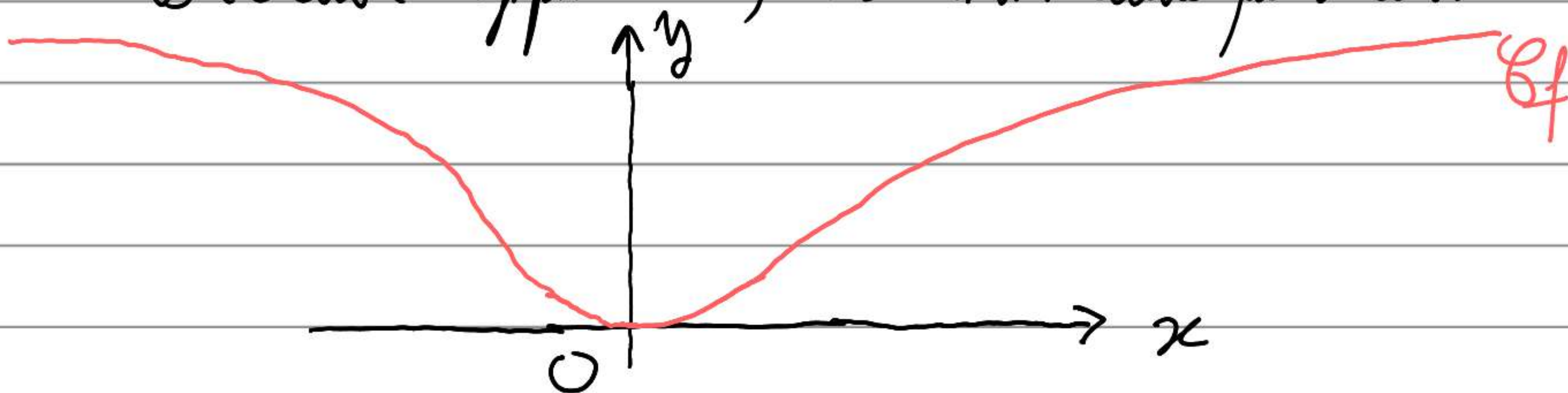
On complète le tableau grâce à la parité

Notons que f admet un minimum local en 0
 $\Rightarrow$ présence d'une tangente horizontale (car f dérivable)

ASYMPTOTES ?

Pour $x > 0$, $f(x) = \ln(x^2(1 + 1/x^2)) = 2\ln(x) + \ln(1 + \frac{1}{x^2}) \underset{+\infty}{\sim} 2\ln(x)$

Pas de droite asymptote en $+\infty$, mais la même allure que la courbe de $2\ln$



(b) $g: x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2}$ définie pour $x \neq 0$ (quotient) et $x > 0$ ($\ln$) donc $D_g =]0; +\infty[$

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$ par quotient

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ par croissances comparées donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

• g est dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables et pour $x > 0$,

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln(x) \times 2x}{x^4} = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3} \text{ et du signe de } 1 - 2\ln(x)$$

Or $1 - 2\ln(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x < e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$ par croissance de $\exp$
d'où le tableau de variations de g :

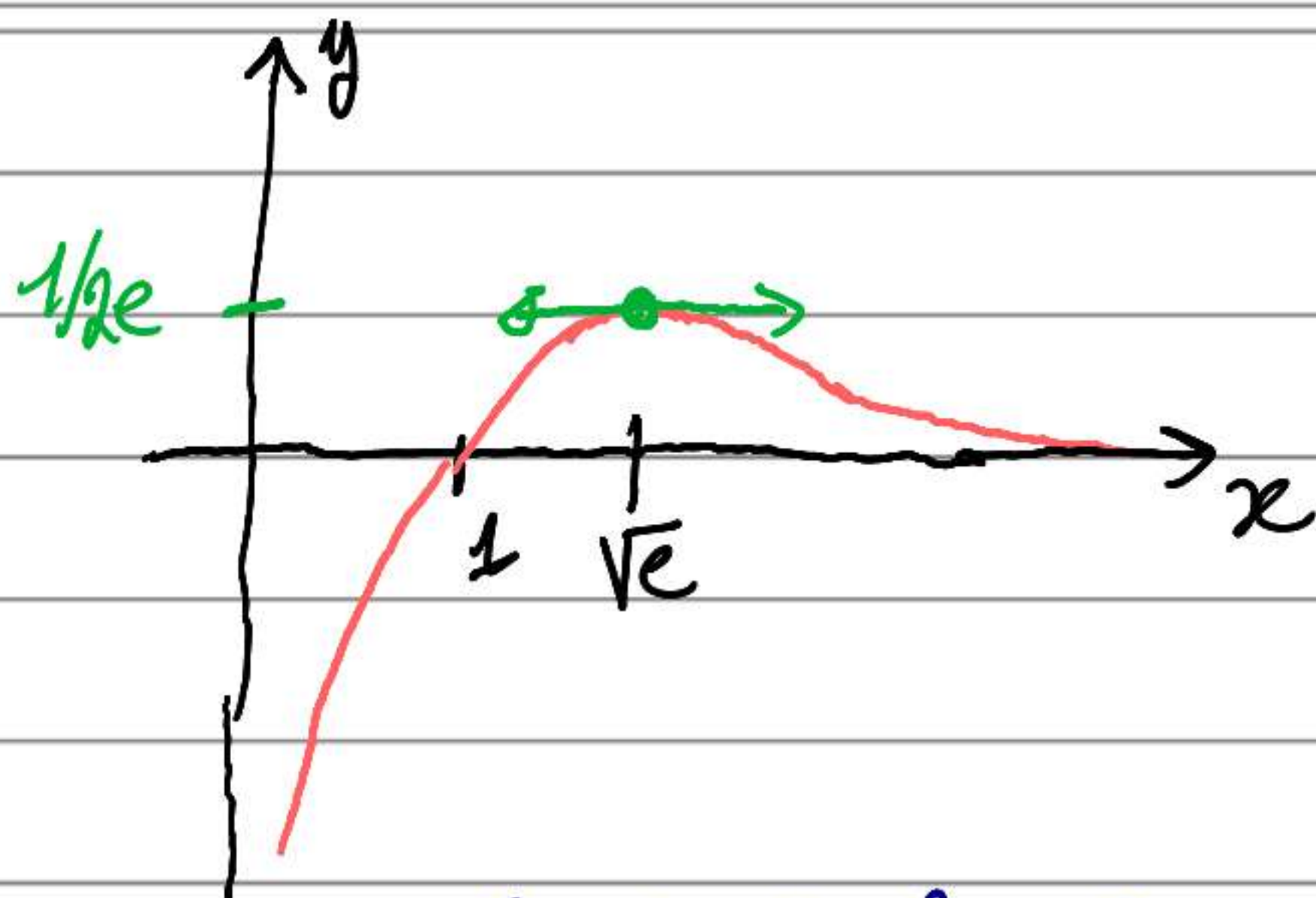
x	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{2e}$	0

$$g(\sqrt{e}) = \frac{\ln(\sqrt{e})}{(\sqrt{e})^2} = \frac{1}{2e}$$

Par la courbe de g :

- * tangente horizontale au niveau du maximum
- * (Ox) asymptote en $+\infty$ cf $\lim_{+\infty} g = 0$
- * (Oy) asymptote en 0 cf $\lim_{0} g = -\infty$

À part ça, rien de spécial à signaler ! Ah si, $f(1) = 0$



(c) $h: x \mapsto \ln(\sin x)$ est définie lorsque $\sin(x) > 0$, et périodique de période 2π (cf. $\sin$)
On va donc se concentrer de l'étude sur $]0, \pi[$

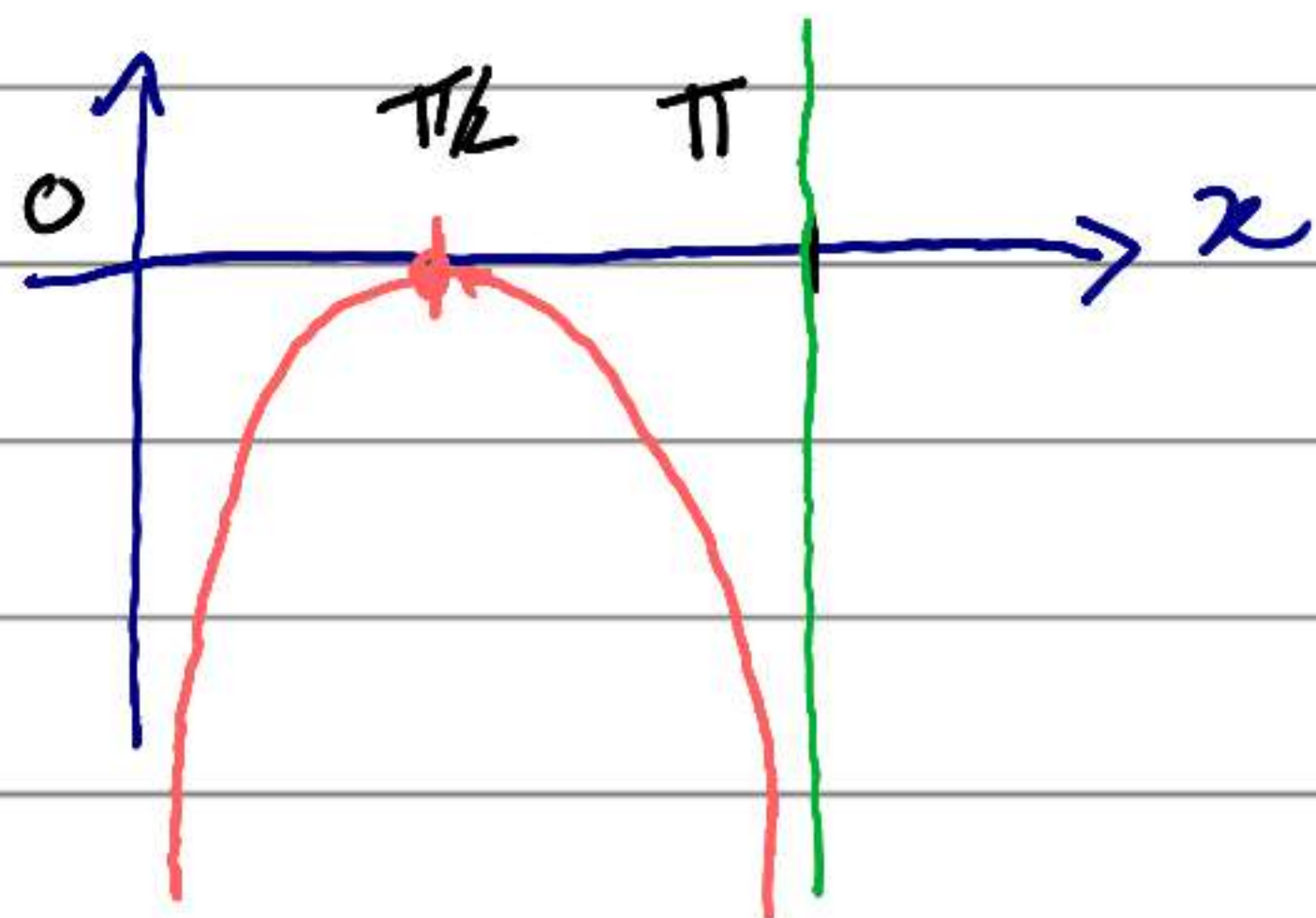
• Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(x) = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \sin(x) = 0^+$ (cf. cercle trig.)

on a par composition de limites $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \pi^-} h(x) = -\infty$

• h est dérivable car $\sin$ et $h'(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ pour $x \in]0, \pi[$, du signe de $\cos(x)$

x	0	$\pi/2$	π
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$

Du point de vue graphique
* une tangente horizontale au milieu du max
* deux asymptotes verticales en 0 et en π



Les géomètres peuvent observer que $\Delta: x = \pi/2$ est un axe de symétrie de la courbe car :

• $D_h =]0, \pi[$ est symétrique par rapport à $\pi/2$

• Pour $|x| < \pi/2$, on a

$$h\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \ln(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \ln(\cos x)$$

$$\text{donc } h\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \ln(\cos(-x)) = \ln(\cos x) = h\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

EXO 9

(a) $u: x \mapsto x^2 + x$ a pour dérivée $u': x \mapsto 2x + 1$
 donc $f = \frac{u'}{u}$ admet pour primitive $F: x \mapsto \ln|u(x)| = \boxed{\ln|x^2 + x|}$

(b) $v: x \mapsto \ln(x)$ a pour dérivée $v': x \mapsto 1/x$
 donc $g = v'v = \frac{1}{x} \times \ln(x)$ a pour primitive $G: x \mapsto \frac{v(x)^2}{2} = \boxed{\frac{\ln(x)^2}{2}}$

(c) Posons $u: x \mapsto x^2 + 1 + \sin(x)$. Alors $u': x \mapsto 2x + \cos(x)$
 et $h = \frac{u'}{(1+\sqrt{u})\sqrt{u}} = 2x \frac{1}{1+\sqrt{u}} \times \left(\frac{u'}{2\sqrt{u}} \right)$ est la dérivée de $H = 2 \ln(1 + \sqrt{u})$
 (Note: $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ is the derivative of $\sqrt{u}$)

donc h admet pour primitive $H: x \mapsto \boxed{2 \ln(1 + \sqrt{x^2 + 1 + \sin(x)})}$

EXO 10

(a) On pose $f: x \mapsto e^x - 1 - x$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^x - 1$
 Comme exp 1, alors $e^x - 1 = e^x - e^0$ est la dérivée de $x - 0 = x$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$			

$$f(0) = 1 - 1 = 0$$

On déduit du tableau de variations que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, c'est

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \geq 1 + x}$$

(b) Même démarche avec $g: x \mapsto e^x - 1 - x - x^2/2$ sur $]0; +\infty[$
 Elle est dérivable et $g'(x) = e^x - 1 - x = f(x) \geq 0$ cf question (a)

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	0	

$$g(0) = 1 - 1 = 0$$

On déduit du tableau que $g(x) \geq 0$ soit

$$\boxed{\forall x \geq 0 \quad e^x \geq 1 + x + x^2/2}$$

EXO 11

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0$ et $e^u - 1 \sim u$

donc $e^{\sin(x)} - 1 \sim \sin(x) \sim x$ soit $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin(x)} - 1}{x} = 1$

(b) Pour $x > 0$, on a : $\frac{e^{\ln(x)} - 1}{x} = \frac{x - 1}{x} = 1 - \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$

d'où $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\ln(x)} - 1}{x} = -\infty$

(c) On a $x e^x - x^2 = x(e^x - x)$. On $x = o(e^x)$ d'après les croissances comparées

donc $x e^x - x^2 \sim x e^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x e^x - x^2) = +\infty$$

(d) On a : $x^2 = o(e^x)$ d'après les croissances comparées

donc $e^x + x^2 \sim e^x$ et $\frac{e^{2x}}{e^x + x^2} \sim \frac{e^{2x}}{e^x} = e^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{e^x + x^2} = +\infty$

EXO 12

(a) $2^{x+3} = 3^{x+2} \Leftrightarrow \ln(2^{x+3}) = \ln(3^{x+2}) \Leftrightarrow (x+3) \ln(2) = (x+2) \ln(3)$

$$\Leftrightarrow 3 \ln 2 - 2 \ln 3 = x \ln 3 - x \ln 2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 \ln 2 - 2 \ln 3}{\ln 3 - \ln 2}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{3 \ln 2 - 2 \ln 3}{\ln 3 - \ln 2} \right\}$$

(b) Posons $X = 2^x$. Alors $2^{x-1} + 2^{2-x} = 3 \Leftrightarrow \frac{X}{2} + \frac{4}{X} = 3 \Leftrightarrow X^2 + 8 = 6X$

$$\Leftrightarrow X^2 - 6X + 8 = 0 \Leftrightarrow X = 2 \text{ ou } X = 4 \text{ (racines évidentes)}$$

$$\Leftrightarrow 2^x = 2 \text{ ou } 2^x = 4$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 2 \quad \text{car } \exp_2 \text{ est une bijection}$$

$$\mathcal{S} = \{1; 2\}$$

(c) Posons $X = x^{45}$. Alors $2x^{45} - 5x^{45} + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow 2X^2 - 5X + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow X = 2 \text{ (racine évidente) ou } X = 1/2$$

$$\Leftrightarrow x^{45} = 2 \text{ ou } x^{45} = 2^{-1}$$

$$\Leftrightarrow x = 2^{5/2} \text{ ou } x = 2^{-5/2} \quad \downarrow \text{ puissance } 5/2$$

$$\mathcal{Y} = \{2^{5/2}; 2^{-5/2}\}$$

(d). $5^x - 12 \times 2^x = 29 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^x - 29 \left(\frac{1}{2}\right)^x = 12$ après division par 2^x

Or $x \mapsto \left(\frac{5}{2}\right)^x$ est $\uparrow$ et $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$ est $\downarrow$ str

donc $f: x \mapsto \left(\frac{5}{2}\right)^x - 29 \left(\frac{1}{2}\right)^x$ est strictement croissante, donc injective

• Il suffit donc de trouver une solution de notre équation pour être assuré que c'est la seule.
À tout hasard, essayons $x = 3$ (une idée, comme ça...)

$$5^3 - 12 \times 2^3 = 125 - 12 \times 8 = 125 - 96 = 29 \dots \text{ MIRACLE!}$$

• Ainsi, $5^x - 12 \times 2^x = 29 \Leftrightarrow x = 3$

$$\mathcal{Y} = \{3\}$$

EXO 13

(a) (2^n) est croissante str; comme $2^9 = 512$ et $2^{10} = 1024$,

alors $2^n < 10^3 \Leftrightarrow n \leq 9$

$$\mathcal{Y} = [0; 9]$$

(b) (3^n) est str $\uparrow$; comme $3^4 = 81$ et $3^5 = 243$

alors $3^n < 100 \Leftrightarrow n \leq 4$

$$\mathcal{Y} = [0; 4]$$

(c) $(9/2)^n > 90001 \Leftrightarrow 5^n < 10000$ par passage à l'inverse

Or (5^n) est str $\uparrow$, $5^4 = 625$, $5^5 = 3125$ et $5^6 = 15625$

donc $5^n < 10000 \Leftrightarrow n \leq 5$

$$\mathcal{Y} = [0; 5]$$

EXO 14

(a) $f: x \mapsto x^n \sqrt{x} = x^{n+1/2}$ donc $f': x \mapsto (n+\frac{1}{2})x^{n-1/2} = (n+\frac{1}{2})x^{n-1}\sqrt{x}$

(b) $g: x \mapsto \sqrt[4]{e^x} = e^{x/4}$ donc $g': x \mapsto \frac{1}{4}e^{x/4}$

(c) $h: x \mapsto \ln(x + e^{(x^3-2)^{1/5}})$ donc $h': x \mapsto \frac{1 + \frac{1}{5}x^3 x (x^3-2)^{-4/5} \times e^{(x^3-2)^{1/5}}}{x + e^{(x^3-2)^{1/5}}}$

EXO 15

(a) $f: x \mapsto \exp\left(\frac{x}{x+1}\right)$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\} =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$

• $\frac{x}{x+1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{x} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e$ par continuité de $\exp$

De même $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = e$. Ainsi, $\mathcal{D}_1: y = e$ est asymptote à f en $-\infty$ et en $+\infty$

• $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} (x+1) = 0^+$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{x}{x+1} = +\infty$ par quotient et $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = +\infty$ par composition

De même, $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{x}{x+1} = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = 0$. Ainsi, $\mathcal{D}_2: x = -1$ est asymptote

• f dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et $f(x) = \exp\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)$ d'où $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \exp\left(\frac{x}{x+1}\right) > 0$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f'		+	+
f	$e \rightarrow$	$0 \rightarrow e$	

EN -1^+ on prolonge f par $f(-1) = 0$

$\frac{f(x) - 0}{x+1} = \frac{1}{x+1} \exp\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{1}{x} \times \frac{x}{x+1} \exp\left(\frac{x}{x+1}\right)$

or $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x} = -1$, $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x+1} = -\infty$ et

Il a fallu, $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - 0}{x+1} = 0$: la fonction $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ par croissances comparées
 f est dérivable à droite en -1 et $f'(-1) = 0$.

Ainsi, la courbe possède une tangente horizontale au point $(-1, 0)$



(b) $g: x \mapsto x e^{\sqrt{1-x^2}}$ définie pour $1-x^2 \geq 0$ soit $-1 \leq x \leq 1$ $\mathcal{D}_g = [-1; 1]$

Notons que $g(-x) = -g(x)$: la fonction g est IMPAIRE

g est dérivable sur $] -1; 1[$ et

$$g'(x) = e^{\sqrt{1-x^2}} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} e^{\sqrt{1-x^2}} = \frac{e^{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}} (\sqrt{1-x^2} - x^2) \text{ fonction PAIRE}$$

$\varphi: x \mapsto \sqrt{1-x^2} - x^2$ est dérivable et $\varphi'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} - 2x$ est du signe de $-x$
c'est une fonction paire

x	-1	$-\alpha$	0	α	1
φ'		$+$	0	$-$	
φ	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1
g'	$-$	0	$+$	$+$	0
g	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

$$\varphi(0) = 1 \quad \varphi(1) = -1$$

donc φ s'annule en α et en $-\alpha$

$$g(1) = 1 \quad g(0) = 0 \quad g(-1) = -1$$

$$g(\alpha) = \alpha e^{\alpha^2} \quad g(-\alpha) = -\alpha e^{\alpha^2}$$

$$\alpha \text{ solution } > 0 \text{ de } \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = x^2 \Leftrightarrow 1-x^2 = x^4 \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 1 = 0$$

Avec $X = x^2$, on obtient $X^2 + X - 1 = 0$. $\Delta = 1+4=5 \leadsto X = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ ou $X = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$
soit $x^2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\alpha = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}$ NON car $x \geq 0$

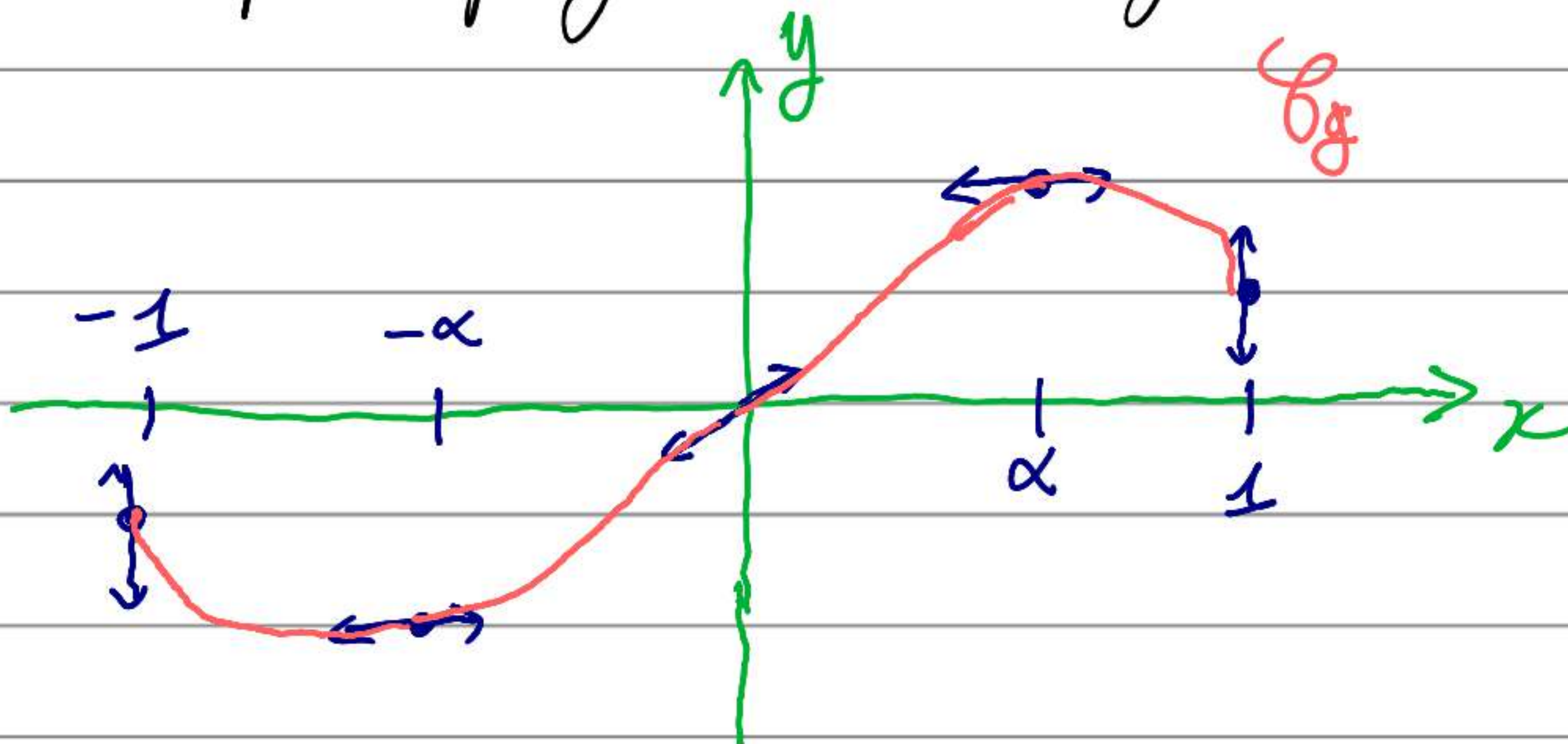
• En $-\alpha$ et α : g' s'annule donc $\mathcal{C}_g$ possède des tangentes horizontales

• En 1 et en -1 : g' n'existe pas a priori donc on regarde la limite

$e^{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow e^0 = 1$, $\sqrt{1-x^2} - x^2 \rightarrow -1$ et $\sqrt{1-x^2} \rightarrow 0^+$
 donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} g'(x) = -\infty$ par produit et quotient de limites

Par parité, on a de même $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} g'(x) = -\infty$.

Ces deux limites prouvent que $\mathcal{C}_g$ admet deux tangentes verticales en $A(1,1)$ et $B(-1,-1)$



$g'(0) = 1$
 $\Rightarrow y = x$ est la
 tangente à
 l'origine

(c) À FINIR

CHAPITRE 18

Exo 16 à 23

EXO 16

(a) $f: x \mapsto \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \times e^{\sqrt{x}}$ est la dérivée de $F: x \mapsto 2e^{\sqrt{x}}$

(b) $g: x \mapsto -1 \times \frac{-e^x}{(1+e^x)^2}$ est la dérivée de $G: x \mapsto \frac{-1}{1+e^x}$

(c) $h: x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x} \times e^{\tan x}$ est la dérivée de $H: x \mapsto e^{\tan x}$

On a déjà reconnu et utilisé $(e^u)' = u' e^u$ et $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$

EXO 17

1) $f(x) = \ln\left(\frac{a^{(b^x)}}{b^{(a^x)}}\right) = \ln(a^{(b^x)}) - \ln(b^{(a^x)}) = b^x \ln(a) - a^x \ln(b) = b^x \left(\ln(a) - \left(\frac{a}{b}\right)^x \ln(b)\right)$

Comme $1 < a < b$, alors $0 < \frac{a}{b} < 1$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^x = 0$. De plus, $\ln(a) > 0$

si bien que $f(x) \sim b^x \ln(a) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ puisque $b > 1$

Ainsi $e^{-f(x)} = \frac{b^{(a^x)}}{a^{(b^x)}} \rightarrow 0$ (compositon) soit $b^{(a^x)} = o\left(a^{(b^x)}\right)_{x \rightarrow +\infty}$

2) $g(x) = \ln\left(\frac{a^{(a^x)}}{x^{(b^x)}}\right) = \ln(a^{(a^x)}) - \ln(x^{(b^x)}) = a^x \ln(a) - x^a \ln x = a^x \left(\ln(a) - \frac{x^a \ln(x)}{a^x}\right)$

Or $\ln\left(\frac{x^a \ln(x)}{a^x}\right) = a \ln(x) + \ln(\ln x) - x \ln(a) \sim -x \ln(a) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$ car $a > 1$

puisque $\ln(\ln(x)) = o(\ln x) = o(x)$ par croissances comparées

Ainsi $\frac{x^a \ln(x)}{a^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc $g(x) \sim a^x \ln(a) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ par produit

soit $e^{-g(x)} = \frac{x^{(b^x)}}{a^{(a^x)}} \rightarrow 0$ (compositon) soit $x^{(b^x)} = o\left(a^{(a^x)}\right)_{x \rightarrow +\infty}$

EXO 18

- $\arg(\bar{z}) = 4 \arg(5-i) + \arg(1+i)$ d'après règles de calcul
Déjà, $1+i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$ donc $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
Comme $5 > 0$, $\arg(5-i) = -\arctan(1/5) + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
si bien que $\arg(\bar{z}) = \frac{\pi}{4} - 4 \arctan(1/5) + 2k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$

- Développons z avant de calculer son argument

$$(5-i)^2 = 25 - 10i + i^2 = 24 - 10i = 2(12-5i)$$

$$(5-i)^4 = 4(12-5i)^2 = 4(144 - 120i + 25i^2) = 4(119 - 120i)$$

$$z = 4(1+i)(119-120i) = 4(119 - 120i + 119i + 120) = 4(239-i)$$

$$\text{Comme } 239 > 0, \arg(z) = \arg(239-i) = -\arctan(1/239) + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Ainsi } \frac{\pi}{4} - 4 \arctan(1/5) = -\arctan(1/239) + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{soit } \frac{\pi}{4} - 4 \arctan(1/5) + \arctan(1/239) = 2k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

De plus, $0 < \arctan(1/239) < \pi/4$ et $0 < \arctan(1/5) < \pi/4$ donc $-\pi < -4 \arctan(1/5) < 0$
d'où $-3\pi/4 < \frac{\pi}{4} - 4 \arctan(1/5) + \arctan(1/239) < \pi/2$

Le seul multiple de 2π entre $-3\pi/4$ et $\pi/2$ étant 0, on a donc

$$\frac{\pi}{4} - 4 \arctan(1/5) + \arctan(1/239) = 0$$

$$\text{soit } \boxed{4 \arctan(1/5) - \arctan(1/239) = \frac{\pi}{4}}$$

EXO 19

- (a) Comme $\arctan(x)$ est du signe de x , on a nécessairement $x > 0$ ici
donc $\arctan(x) + \arctan(2x) \in]0, \pi[$. Sur cet intervalle, $\tan$ ne
prend pas 2 fois la même valeur (on exclut évidemment $\pi/2$) donc
 $\arctan(x) + \arctan(2x) = \pi/4 \Leftrightarrow \tan(\arctan x + \arctan 2x) = \tan(\pi/4)$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2x}{1-x \times 2x} = 1$$

$$\text{cf. } \tan(a+h) = \frac{\tan(a) + \tan(h)}{1 - \tan(a)\tan(h)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{1-2x^2} = 1 \Leftrightarrow 3x = 1 - 2x^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$\Delta = 9 + 8 = 17, \text{ racines } x_1 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4} \text{ et } x_2 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$$

$$y = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$$

NON cf on résout l'équation sur $\mathbb{R}_+$

(b) De même, on résout l'équation sur $\mathbb{R}_+$ et $\arctan(x) + \arctan(x^3) \in]0, \pi[$ pour $x > 0$
donc $\arctan(x) + \arctan(x^3) = \frac{3\pi}{4}$ pour $x > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x+x^3}{1-x \times x^3} = \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 \quad (\text{on applique } \tan)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+x^3}{1-x^4} = -1 \Leftrightarrow x+x^3 = x^4 - 1 \Leftrightarrow x^4 - x^3 - x - 1 = 0$$

Nécessairement $x > 1$ car $x^4 = 1 + x + x^3 > 1$

Étudions $f: x \mapsto x^4 - x^3 - x - 1$ sur $[1; +\infty[$

- $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 1 \geq 0$ car $x^3 \geq x^2 \geq 1$ sur $[1; +\infty[$
- $f(1) = -2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ par équivalent ... et même $f(2) = 5$

x	1	2	$+\infty$
f	-2	5	$+\infty$

On déduit de ce tableau que f s'annule une seule fois entre 1 et 2

AINSI la solution de l'équation est l'unique racine du polynôme $x^4 - x^3 - x - 1$ comprise dans l'intervalle $[1; 2]$

EXO 20

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|1-x^2| \leq 1+x^2$ donc $\frac{1-x^2}{1+x^2} \in]-1; 1[$ et f est parfaitement définie

Pour contre, elle n'est dérivable que lorsque $|1-x^2| \neq 1+x^2$ c'est-à-dire $x \neq 0$

RAPPEL: $\arccos$ est définie sur $[-1; 1]$ et dérivable sur $] -1; 1[$

• Notons $u(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{2-1-x^2}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2} - 1$. Alors $u'(x) = -\frac{4x}{(1+x^2)^2}$

La dérivée de $\arccos(u)$ est $u' \times \arccos'(u) = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$ (pour $|u| < 1$)

$$\text{or } 1-u^2(x) = 1 - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2 = \frac{(1+x^2)^2 - (1-x^2)^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4x^2}{(1+x^2)^2} \text{ donc } \sqrt{1-u^2(x)} = \frac{2|x|}{1+x^2}$$

$$\text{De ce fait, } f'(x) = \frac{+4x}{(1+x^2)^2} \times \frac{1+x^2}{2|x|} - \frac{2}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2} \left(\frac{x}{|x|} - 1 \right) \text{ pour } x \neq 0$$

$$\text{si bien que } f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ -\frac{4}{1+x^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Pour $f(0) = \arccos(1) = 2 \arctan 0 = 0$, on en déduit que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ -4 \arctan(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Autrement dit

$$\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \begin{cases} 2 \arctan(x) & \text{si } x \geq 0 \\ -2 \arctan(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

REMARQUE Ceci se retrouve aussi en partant de la relation (à démontrer)

$$\cos(\theta) = \frac{1 - \tan^2(\theta/2)}{1 + \tan^2(\theta/2)} \text{ pour } \theta \neq \pi + 2k\pi$$

EXO 2.1

(a) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car 
On sait que $(\arctan(u))' = \frac{u'}{1+u^2}$

$$\text{Ici } u(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{e^x + 1 - 2}{e^x + 1} = 1 - \frac{2}{e^x + 1} \text{ donc } u'(x) = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$\text{et } 1+u^2 = \frac{(e^x + 1)^2 + (e^x - 1)^2}{(e^x + 1)^2} = \frac{2(e^{2x} + 1)}{(e^x + 1)^2}$$

si bien que $\boxed{f'(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}}$

REM: $f'(x) = (\arctan(e^x))'$
donc $f(x) = \arctan(e^x) + C^k$
or $f(0) = \arctan(1) = \pi/4$
et $\arctan(e^0) = \arctan(1) = \pi/4$
d'où $f(x) = \arctan(e^x) - \pi/4$

(b) g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car  (un cactus, peu change !)
On a toujours $(\arctan(u))' = \frac{u'}{1+u^2}$

$$\text{Ici } u(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1 - 2}{x^2 + 1} = 1 - \frac{2}{x^2 + 1} \text{ donc } u'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\text{et } 1+u^2 = \frac{(x^2 + 1)^2 + (x^2 - 1)^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2(x^4 + 1)}{(x^2 + 1)^2} \text{ d'où } \boxed{g'(x) = \frac{2x}{x^4 + 1}}$$

De même que précédemment $g'(x) = (\arctan(x^2))'$ donc $g(x) = \arctan(x^2) + C^k$
or $g(0) = \arctan(-1) = -\pi/4$ et $\arctan(0) = 0$
donc $g(x) = \arctan(x^2) - \pi/4$

(c) Toujours pareil avec $u(x) = \frac{1}{2x^2} = \frac{x^{-2}}{2}$ et $u'(x) = \frac{-2x^{-3}}{2} = -\frac{1}{x^3}$
Alors $1+u^2(x) = 1 + \frac{1}{4x^4} = \frac{4x^4 + 1}{4x^4}$

si bien que $h'(x) = \frac{-1}{x^3} \times \frac{4x^4}{1+4x^4} = \frac{-4x}{1+4x^4}$ soit $\boxed{h'(x) = \frac{-4x}{1+4x^4}}$

EXO 22

1) $f: x \mapsto \arctan(1/x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car 

$$f'(x) = \frac{-1/x^2}{1+1/x^2} = -\frac{1}{x^2+1} < 0$$

AINSI f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$

2) $g: x \mapsto (x+1) \arctan(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car 
et $g'(x) = 1 \times \arctan(x) + \frac{x+1}{1+x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$

Redérivons : $g''(x) = \frac{1}{x^2+1} + \frac{1 \times (1+x^2) - (x+1) \times 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2 + 1+x^2 - 2x^2 - 2x}{(1+x^2)^2}$
 $= \frac{2-2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x)}{(1+x^2)^2}$ et du signe de $(1-x)$

On en déduit les variations de g' :

• $g'(1) = \frac{\pi}{4} + 1$

• $\frac{x+1}{1+x^2} \sim \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ donc $g'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$
et $g'(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\frac{\pi}{2}$

x	$-\infty$	α	1	$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-
$g'(x)$		$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}+1$	$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$	-	0	+	+
$g(x)$	$+\infty$	$g(\alpha)$	$\frac{\pi}{2}$	$+\infty$

De ce fait, la fonction g' possède un unique point d'annulation α sur $]-\infty; 1[$ (cf. tableau de variation) ce qui permet d'en déduire le signe de g'

• $g(1) = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ • $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ par produit de limites

α vérifie $\arctan(\alpha) = -\frac{\alpha+1}{\alpha^2+1}$ donc $g(\alpha) = -\frac{(\alpha+1)^2}{1+\alpha^2}$

EXO 23

Il suffit d'établir des DL₄ de leurs dérivées, puis de les intégrer

$$1) \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$$

$$\text{Or } (1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} u^2 + o(u^2)_{u \rightarrow 0}$$

$$\text{donc } (1+u)^{-1/2} = 1 - \frac{u}{2} + \frac{3}{8} u^2 + o(u^2)_{u \rightarrow 0}$$

$$\text{soit } \arcsin'(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8} x^4 + o(x^4)_{x \rightarrow 0} \quad \text{puisque } x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$\text{donc } \boxed{\arcsin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40} x^5 + o(x^5)_{x \rightarrow 0}}$$

$$2) \arccos(x) = \pi/2 - \arcsin(x) \text{ si bien que}$$

$$\boxed{\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} + o(x^5)_{x \rightarrow 0}}$$

$$3) \operatorname{arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{Or } \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2)_{u \rightarrow 0}$$

$$\text{donc } \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)_{x \rightarrow 0}$$

$$\text{et } \boxed{\operatorname{arctan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)_{x \rightarrow 0}}$$

CHAPITRE 19

EXO 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 15 & 15 \\ 11 & 16 & 39 & 39 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 & 2 \\ 2 & -6 & 13 & 3 \\ 1 & 4 & -4 & -2 \end{pmatrix} \bullet A^5 = (A^2)^2 \times A$$

$$\bullet \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -7 & -6 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^5$$

$$\bullet \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 17 & 11 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \\ 6 & 12 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 9 & 15 \\ -5 & 5 & 9 \\ 12 & 26 & 32 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & -\sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & \cos(2\alpha) \end{pmatrix} \quad \cos \cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) \\ \text{et } \sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$\begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & -\sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & \cos(2\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad \cos \cos(3\alpha) = \cos(2\alpha)\cos(\alpha) - \sin(2\alpha)\sin(\alpha) \\ \text{et } \sin(3\alpha) = \sin(2\alpha)\cos(\alpha) + \cos(2\alpha)\sin(\alpha)$$

On montre sans difficulté par récurrence que

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(n\alpha) & -\sin(n\alpha) \\ \sin(n\alpha) & \cos(n\alpha) \end{pmatrix}$$

EX02

(a) On cherche toutes les matrices $M \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$

$$AM = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad MA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } AM = MA \Leftrightarrow \begin{cases} a+c = a \\ b+d = a+b \\ c = c \\ d = c+d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = a \end{cases} \Leftrightarrow M \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Ainsi, l'ensemble recherché est

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

(b) Même démarche avec cette fois $M \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$$AM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 3a+d+2g & 3b+e+2h & 3c+f+2i \end{pmatrix} \quad \text{donc } AM = MA$$

$$MA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3c & b+c & c \\ d+3f & e+f & 2f \\ g+3i & h+i & 2i \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = a+3c \\ b = b+c \\ c = 2c \end{cases} \quad c=0$$

$$\begin{cases} d = d+3f \\ e = e+f \\ f = 2f \end{cases} \quad f=0$$

$$3a+d+2g = g+3i \rightarrow d$$

$$3b+e+2h = h+i \rightarrow e$$

$$3c+f+2i = 2i \rightarrow 0=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ f=0 \\ d = -3a - g + 3i \\ e = -3b - h + i \end{cases}$$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -3a-g+3i & -3b-h+i & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix} \right\}$$

$$a, b, g, h, i \in \mathbb{R}$$

EX03

Si C est inversible, $A = B \times C \Leftrightarrow B = A C^{-1}$

On cherche d'inverser C : pour $X(x; y; z)$ et $Y(a; b; c)$, on a

$$CX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = a \\ 2x - y - z = b \\ -5x - 3z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = a \\ -5y + z = b - 2a \\ 10y - 8z = c + 5a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = a \\ -5y + z = b - 2a \\ -6z = a + 2b + c \end{cases}$$

$L2 \leftarrow L2 - 2L1; L3 \leftarrow L3 + 5L1 \quad L3 \leftarrow L3 + 2L2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = a - 2y + z = \frac{3a}{30} + \frac{6b}{30} - \frac{3c}{30} \\ y = (3 + 2a - b)/5 = \frac{11a}{30} - \frac{8b}{30} - \frac{c}{30} \\ z = -\frac{a}{6} - \frac{b}{3} - \frac{c}{6} = -\frac{5a}{30} - \frac{10b}{30} - \frac{5c}{30} \end{cases} \Rightarrow X = C^{-1}Y$$

$$\text{on a } C^{-1} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 11 & -8 & -1 \\ -5 & -10 & -5 \end{pmatrix}$$

VERIFICATION $CC^{-1} = I_3$

Ans

$$B = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 11 & -8 & -1 \\ -5 & -10 & -5 \end{pmatrix}$$

soit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

EX04

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$N^k = 0 \quad \forall k \geq 3$$

$$A = \alpha I + bN \quad \text{avec } I = I_4 \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme précédemment

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \underline{N^k = 0 \quad \forall k \geq 4}$$

En outre, $IN=NI=N$ donc on peut utiliser la formule du binôme de Newton :

$$A^n = (aI + bN)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b^k N^k a^{n-k} I^{n-k} = \sum_{k=0}^3 \binom{n}{k} a^{n-k} b^k N^k \quad \text{car } N^4=0$$

$$= a^n I + n a^{n-1} b N + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 N^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} a^{n-3} b^3 N^3$$

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & n a^{n-1} b & \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 & \frac{n(n-1)(n-2)}{6} a^{n-3} b^3 \\ 0 & a^n & n a^{n-1} b & \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 \\ 0 & 0 & a^n & n a^{n-1} b \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}$$

• On observe que $J=A$ dans le cas où $a=b=1$. De ce fait,

$$J^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} & \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \\ 0 & 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• Notons que $M+2I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2U$ avec $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 soit $M = 2(U-I)$. Comme $UI=IU=I$, on peut utiliser la formule du binôme de Newton :

$$M^n = 2^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} U^k = (-2)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{-k} U^k$$

Or

$$U^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3U \quad \text{donc } U^3 = 3U^2 = 9U \text{ et } U^k = 3^{k-1}U \text{ pour } k \geq 1$$

de manière plus générale

Comme $(-1)^{-k} = (-1)^k$, il vient $M^n = (-2)^n \left(I + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k \underbrace{3^{k-1}}_{1/3 \times 3^k} U \right)$

$$\text{d'où } M^n = (-2)^n I + (-2)^n \frac{U}{3} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-3)^k$$

$$\text{Binôme de Newton: } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-3)^k = (-3+1)^n = (-2)^n = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-3)^k$$

$$\text{Ainsi } M^n = (-2)^n I + (-2)^n \frac{U}{3} (-2)^n - 1 = (-2)^n \left(I + \frac{(-2)^n - 1}{3} U \right)$$

Ça paraît bizarre mais on obtient bien I pour $n=0$ et $-2(I-U) = 2(U-I) = M$ pour $n=1$... donc les calculs doivent être corrects!

$$\text{De plus, } U = U - I + I \text{ donc } I + \frac{(-2)^n - 1}{3} U = I + \frac{(-2)^n - 1}{3} (U - I) + \frac{(-2)^n - 1}{3} I$$

$$= \frac{(-2)^n - 1}{3} (U - I) + \frac{(-2)^n + 2}{3} I$$

$$\text{soit } M^n = \frac{(-2)^n}{3} \left[(-2)^n - 1 (U - I) + (-2)^n + 2 I \right]$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad M^n = \frac{(-2)^n}{3} \begin{pmatrix} (-2)^n + 2 & (-2)^n - 1 & (-2)^n - 1 \\ (-2)^n - 1 & (-2)^n + 2 & (-2)^n - 1 \\ (-2)^n - 1 & (-2)^n - 1 & (-2)^n + 2 \end{pmatrix}}$$

EXO 6

Multiplier deux matrices diagonales revient à multiplier leurs termes diagonaux.
De ce fait, $A^k = \text{Diag}(a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k)$

$$\text{et } \lambda_k A^k = \text{Diag}(\lambda_k a_1^k, \lambda_k a_2^k, \dots, \lambda_k a_n^k) \text{ pour tout } k \in \mathbb{N} \text{ et } \lambda_k \in \mathbb{C}$$

Par conséquent, si $P = \sum_{k \geq 0} \lambda_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, on a

$$P(A) = \sum_{k \geq 0} \lambda_k A^k = \text{Diag} \left(\sum \lambda_k a_1^k, \sum \lambda_k a_2^k, \dots, \sum \lambda_k a_n^k \right)$$

$$= \text{Diag} (P(a_1), P(a_2), \dots, P(a_n))$$

De fait, $P(A)=0$ si, et seulement si, $P(a_i)=0$ pour tout $i \in [1;n]$

EX06

• Pour $X(x,y,z,t)$ et $Y(a,b,c,d)$, on a :

$$AX=Y \Leftrightarrow \begin{cases} x+z+2t=a \\ 2x+y+3t=b \\ x+z=c \\ y+t=d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=c & (L3) \\ y+t=d & (L4) \\ 2t=a-c & (L1)-(L3) \\ y-2z+3t=b-2c & (L2)-2(L3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+z=c \\ y+t=d \\ -2z+2t=b-2c-d & (L4)-(L2) \\ 2t=a-c & (L3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=c \\ y+t=d \\ -2z=-a+b-c-d & (L3)-(L4) \\ 2t=a-c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=c-z = -\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} - \frac{d}{2} \\ y=d-t = -\frac{a}{2} + \frac{c}{2} + d \\ z = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} + \frac{c}{2} + \frac{d}{2} \\ t = \frac{a}{2} - \frac{c}{2} \end{cases}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

• Pour $X(x,y,z)$ et $Y(a,b,c)$, on a :

$$BX=Y \Leftrightarrow \begin{cases} y+z=a \\ x+z=b \\ x+y=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=c \\ y+z=a \\ -y+z=b-c & (L2)-(L3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=c \\ y+z=a \\ 2z=a+b-c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=c-y = -\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} \\ y=a-z = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} + \frac{c}{2} \\ z = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} - \frac{c}{2} \end{cases}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

• Pour $X(x, y, z)$ et $Y(a, b, c)$, on a :

$$CX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ -x + 2y = b \\ 3x + 2z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = \frac{b+x}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \\ z = \frac{c-3x}{2} = \frac{-3a}{2} + \frac{c}{2} \end{cases}$$

$$\bar{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

• Pour $X(x, y, z)$ et $Y(a, b, c)$, on a :

$$DX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 2z = a \\ -x + 2y - z = b \\ x + y + 4z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 2z = a \\ -3z = a + b & (L2) + (L1) \\ 3y + 6z = -a + c & (L3) - (L1) \end{cases}$$

$$(L3) + 2(L2) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 2z = a \\ 3y = a + 2b + c \\ -3z = a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2y + 2z = a + \frac{2}{3}b + \frac{2}{3}c \\ y = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}c \\ z = -\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b \end{cases}$$

d'où $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}$

• Toujours pareil :

$$EX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a \\ y + z = b \\ z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a - y = a - b + c \\ y = b - z = b - c \\ z = c \end{cases}$$

d'où $E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

• Pour $X(x, y, z)$ et $Y(a, b, c)$ on a :

$$FX=Y \Leftrightarrow \begin{cases} y+2z=a \\ x+y+2z=b \\ 2y+3z=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=b-a & (2)-(1) \\ y+2z=a \\ -z=c-2a & (3)-(1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & = -a+b \\ y=a-2z & = -3a+2c \\ z & = 2a-c \end{cases}$$

$$\boxed{F^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

EXO 7

Idee: $1-x^3 = (1-x)(1+x+x^2) \dots$ y a qu'à développer!

On applique ceci à A :

$$I-A^3 = (I-A)(I+A+A^2) = I \text{ car } A^3=0$$

si bien que $I-A$ est inversible et d'inverse $\boxed{I+A+A^2}$

REM: on pense à ce genre de formules en se rappelant les sommes de suites géométriques

$$\sum_{k=0}^n x^k = 1 \times \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad \text{si } x \neq 1$$

d'où $\boxed{1-x^{n+1} = (1-x)(1+x+x^2+\dots+x^n)}$

CHAPITRE 20

Exo 1 à 13

EXO 1

(a) Notons $u_n = (-1)^n + 1/n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

• Si $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, alors $u_{2p} = 1 + 1/2p$

donc $3/2 > u_{2p} > 1$ par stricte décroissance de cette expression

• Si $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$, alors $u_{2p+1} = -1 + \frac{1}{2p+1}$
et $0 > u_{2p+1} > -1$ toujours par stricte décroissance.

p	1	$+\infty$
u_{2p}	$3/2 \rightarrow 1$	

p	1	$+\infty$
u_{2p+1}	$0 \rightarrow -1$	

AU FINAL $\boxed{-1 < u_n \leq 3/2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ d'après ces encadrements
Comme $3/2 = u_2$, c'est le plus grand élément de A ... donc également la borne sup
Ainsi

$$\boxed{\max(A) = \sup(A) = 3/2}$$

$\rightarrow$ l'ensemble A est borné !

Au contraire, la valeur -1 n'est pas atteinte car $(-1)^n \geq -1$ et $1/n > 0$
si bien que $u_n > -1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Par contre, comme $u_{2p+1} \rightarrow -1$
alors -1 est la borne inférieure de A

PREUVE: * $u_n > -1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donc $a > -1 \quad \forall a \in A$

* Soit $\varepsilon > 0$: par définition de la limite, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$

tel que $-1 - \varepsilon < u_{n_0} < -1 + \varepsilon$ d'où $-1 < u_{n_0} < -1 + \varepsilon$

Ainsi il existe $a \in A$ tel que $-1 < a < -1 + \varepsilon$

Ceci prouve que

$$\boxed{\inf(A) = -1}$$

mais ce n'est pas un minimum
puisque $-1 \notin A$

REMARQUE le même genre de raisonnement permet de prouver que

- $\left\{ \begin{array}{l} * \text{ Si } (u_n) \nearrow \text{ strictement et } \lim u_n = l \in \mathbb{R}, \\ \text{alors } \min \{u_n / n \in \mathbb{N}\} = u_0 \text{ et } \sup \{u_n / n \in \mathbb{N}\} = l \text{ (non atteint)} \\ \\ * \text{ Si } (u_n) \searrow \text{ strictement et } \lim u_n = l \in \mathbb{R}, \\ \text{alors } \max \{u_n / n \in \mathbb{N}\} = u_0 \text{ et } \inf \{u_n / n \in \mathbb{N}\} = l \text{ (non atteint)} \end{array} \right.$

(b) Posons de même $v_n = \frac{2}{n} - n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On reconnaît l'expression d'une suite strictement décroissante (somme de suites décroissantes)

Pour ceux qui en douteraient, la fonction $f: x \mapsto \frac{2}{x} - x$ définie sur $[1; +\infty[$ a pour dérivée $f'(x) = -\frac{2}{x^2} - 1 < 0$ donc elle est bien strictement décroissante.

Par ailleurs, $v_1 = 2 - 1 = 1$ et $\lim v_n = -\infty$ (différence de limites) ce qui permet de visualiser les valeurs prises par $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

n	1	$+\infty$
v_n	1	$-\infty$

Comme $\lim v_n = -\infty$, alors l'ensemble B n'est pas minoré : il n'admet de ce fait ni min, ni inf. Par contre, comme $v_n \leq 1 = v_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble B est majoré et

$$\max(B) = \sup(B) = 1$$

EXO 2

(a) Examinons la quantité $\frac{n}{n^2+1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$

idée : trouver un encadrement valable pour tous n et n , et montrer que l'on peut tendre vers les bornes de l'encadrement en faisant tendre n et n vers des valeurs adéquates. DANS CE GENRE DE CAS, IL FAUT TATONNER UN PEU AU BROUILLON POUR SENTIR LES CHOSSES

Comme $n \geq 1$ et $m \geq 1$, on a $nm \geq n$ donc $nm+1 \geq n+1$

d'où $0 < \frac{1}{nm+1} \leq \frac{1}{n+1}$ et $\boxed{0 < \frac{n}{nm+1} \leq \frac{n}{n+1} < 1}$ pour $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$

On voit que l'ensemble A est borné et que toutes ses valeurs sont comprises entre 0 et 1. Les deux valeurs ne sont jamais atteintes (cf. inégalités strictes); montrons maintenant que ce sont les bornes supérieure et inférieure de A en exhibant des suites d'éléments de A qui convergent vers ces valeurs

Fixons $m=1$: alors $\frac{n}{nm+1} = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$

Ainsi $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A qui converge vers 1, majorant de A

De ce fait, 1 est le plus petit majorant de A (car $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \frac{n}{n+1} > 1 - \varepsilon$)
c'est la borne supérieure

$$\boxed{\sup(A) = 1}$$

Prendons $m=n$: alors $\frac{n}{nm+1} = \frac{n}{n^2+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} \rightarrow 0$

Ainsi $\left(\frac{n}{n^2+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A qui converge vers 0, minorant de A

De ce fait, 0 est le plus grand minorant de A (car $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \frac{n}{n^2+1} < \varepsilon$)
c'est la borne inférieure

$$\boxed{\inf(A) = 0}$$

REMARQUE on veut donc de voir que:

- * pour prouver qu'un majorant de A est sa borne supérieure, il suffit de trouver une suite d'éléments de A qui converge vers ce majorant.
- * pour prouver qu'un minorant de A est sa borne inférieure, il suffit de trouver une suite d'éléments de A qui converge vers ce minorant

(b) Avec $m \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$, il y a plus de valeurs possibles mais c'est plus simple.

- En effet, $\frac{n}{m+1} \geq 0$ pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^*$ donc 0 est un minorant de B

En outre, $\frac{0}{0+1} = 0 \in B$ donc $\min(B) = \inf(B) = 0$

- Pour contre, $m+1 \geq 1$ donc $\frac{n}{m+1} \leq n$... avec égalité si $n=0$
BING! l'idée jaillit!

Pour $m=0$ et $m \in \mathbb{N}$, on a $\frac{n}{m+1} = n \rightarrow +\infty$ ce qui montre que

L'ensemble B n'est pas majoré

(c) Posons $f: x \mapsto x^2 - 2x + 3$ pour $x \in \mathbb{R}$
 On a $f'(x) = 2x - 2 = 2(x-1)$ du signe de $x-1$.

Enfin $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	2	$+\infty$

Le tableau de variations permet de voir aisément que

L'ensemble C n'est pas majoré mais $\min(C) = \inf(C) = 2$

(d) Notons $u_n = a + bn$ pour $n \in \mathbb{N}$
 Alors (u_n) $\uparrow$ strictement, $u_0 = a$
 et $\lim u_n = +\infty$ puisque $b > 0$

n	0	$+\infty$
u_n	a	$+\infty$

L'ensemble D n'est pas majoré mais $\min(D) = \inf(D) = a$

(e) Même démarche avec $v_n = a + (-1)^n b$ pour $n \in \mathbb{N}$... mais il va falloir examiner (v_{2n}) et (v_{2n+1}) pour s'affranchir du $(-1)^n$

• Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{2n} = a + \frac{b}{2n}$ donc $(U_{2n}) \downarrow$
 $U_2 = a + \frac{b}{2}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{2n} = a$

n	1	$+\infty$
U_{2n}	$a + \frac{b}{2}$	a

• Pour $n \in \mathbb{N}$, $U_{2n+1} = a - \frac{b}{2n+1}$ donc $(U_{2n+1}) \uparrow$
 $U_1 = a - b$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{2n+1} = a$

n	0	$+\infty$
U_{2n+1}	$a - b$	a

On a ainsi d'après ces deux tableaux

$a < U_{2n} \leq a + \frac{b}{2}$ et $a - b \leq U_{2n+1} < a$ pour tout n

si bien que $a - b \leq U_n \leq a + \frac{b}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

AINSI l'ensemble E est borné et comme $a - b = U_1 \in E$ et $a + \frac{b}{2} = U_2 \in E$,
 alors

$$\min(E) = \inf(E) = a - b$$

et

$$\max(E) = \sup(E) = a + \frac{b}{2}$$

f) Pour $f: x \mapsto -x^2 + 2x$ sur $]1; 2[$

On a $f'(x) = 2 - 2x = 2(1 - x) < 0$

donc f est str. dec. sur $]1; 2[$.

Et on a $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$

x	1	2
$f'(x)$	-	
$f(x)$	1	0

Pour tout $x \in]1; 2[$ on a $0 < f(x) < 1$ donc l'ensemble F est borné

• Comme $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$, le minorant 0 est la borne inférieure de F ... non atteinte

• Comme $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$, le majorant 1 est la borne supérieure de F ... non atteinte

C'EST LA MÊME IDÉE QU'AVEC LES SUITES... LES LIMITES PERMETTENT DE JUSTIFIER
 QUE DES MAJORANTS / MINORANTS SONT DES BORNES SUP / INF

Ainsi

$$\inf(F) = 0$$

et

$$\sup(F) = 1$$

EXO 3

- Soit $b \in B$ (possible car $B \neq \emptyset$)
Pour tout $x \in A$, $x \leq b$ donc b est un majorant de A
Ainsi A est une partie non vide et majorée donc $\sup(A)$ existe
En outre, $\sup(A) \leq b$ puisque $\sup(A)$ est le plus petit des majorants de A
 - Comme $b \geq \sup(A)$ pour tout $b \in B$, alors $\sup(A)$ est un minorant de B
Ainsi B est une partie non vide et minorée donc $\inf(B)$ existe
Enfin $\inf(B)$ est le plus grand minorant de B donc
- $\sup(A) \leq \inf(B)$

EXO 4

- 1) • A est une partie non vide et bornée de $\mathbb{R} \Rightarrow \inf(A)$ et $\sup(A)$ existe
- En outre,
soit $\inf(A) \leq a \leq \sup(A)$ pour tout $a \in A$
soit $-\inf(A) \geq -a \geq -\sup(A)$ pour tout $a \in A$
- $-\sup(A) \leq x \leq -\inf(A)$ pour tout $x \in (-A)$

$-A$ est donc une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$, d'où l'existence de $\sup(-A)$ et $\inf(-A)$

- On vient de voir que $x \leq -\inf(A)$ pour tout $x \in (-A)$
Soit $\varepsilon > 0$: par définition de $\inf(A)$, il existe $a \in A$ tel que $a < \inf(A) + \varepsilon$
soit $-a > -\inf(A) - \varepsilon$
Ainsi il existe $x \in (-A)$ tel que $x > -\inf(A) - \varepsilon$

Ceci montre que $-\inf(A) = \sup(-A)$

- De même, $x \geq -\sup(A)$ pour tout $x \in (-A)$. Soit $\varepsilon > 0$: $\exists a \in A$, $a < \sup(A) - \varepsilon$
soit $-a > -\sup(A) + \varepsilon$. Ainsi, $\exists x \in (-A)$, $x > -\sup(A) + \varepsilon$
Ceci montre que $-\sup(A) = \inf(-A)$

2) On procède de la même façon avec l'ensemble non vide $A+x$

- On a $\inf(A) \leq a \leq \sup(A)$ pour tout $a \in A$
d'où $\inf(A)+x \leq a+x \leq \sup(A)+x$ pour tout $a \in A$
soit $\inf(A)+x \leq y \leq \sup(A)+x$ pour tout $y \in A+x$

- On veut de voir que : $\forall y \in (A+x) \quad y \leq \sup(A)+x$
Soit $\varepsilon > 0$; par définition du sup : $\exists a \in A, a > \sup(A) - \varepsilon \Rightarrow a+x > \sup(A)+x - \varepsilon$
si bien que : $\exists y \in (A+x), y > \sup(A)+x - \varepsilon$

Ceci montre que $\sup(A+x) = \sup(A) + x$

- On veut de voir que : $\forall y \in (A+x) \quad y \geq \inf(A)+x$
Soit $\varepsilon > 0$; par définition de l'inf : $\exists a \in A, a < \inf(A) + \varepsilon \Rightarrow a+x < \inf(A)+x + \varepsilon$
si bien que : $\exists y \in (A+x), y < \inf(A)+x + \varepsilon$

Ceci montre que $\inf(A+x) = \inf(A) + x$

Exo 5

1) Mq $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$

Sans perte de généralité, on peut supposer dans un premier temps que $\sup(A) \geq \sup(B)$

* Pour tout $x \in (A \cup B)$:

soit $x \in A$ et $x \leq \sup(A)$

soit $x \in B$ et $x \leq \sup(B) \leq \sup(A)$

dans tous les cas, on a bien $x \leq \sup(A) \quad \forall x \in A \cup B$

* Soit $\varepsilon > 0$; par définition du sup : $\exists a \in A, a > \sup(A) - \varepsilon$

or $A \subset A \cup B$ donc : $\exists x \in A \cup B, x > \sup(A) - \varepsilon$

Ceci montre que $\sup(A \cup B) = \sup(A)$

On établit de même que $\sup(A \cup B) = \sup(B)$ dans le cas où $\sup(B) \geq \sup(A)$, si bien que

$$\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$$

• MQ $\inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B))$

Sans perte de généralité, on peut supposer que $\inf(A) \leq \inf(B)$

* Pour tout $x \in A \cup B$

soit $x \in A$ et $x \geq \inf(A)$

soit $x \in B$ et $x \geq \inf(B) \geq \inf(A)$

donc on a bien: $\forall x \in (A \cup B), x \geq \inf(A)$

* Soit $\varepsilon > 0$; par définition de $\inf$: $\exists a \in A, a < \inf(A) + \varepsilon$

Or $A \subset A \cup B$

donc: $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in (A \cup B), x < \inf(A) + \varepsilon$

Ceci montre que $\inf(A \cup B) = \inf(A)$

* On établit de même que $\inf(A \cup B) = \inf(B)$ dans le cas où $\inf(B) \leq \inf(A)$, si bien que

$$\inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B))$$

2) Supposons que $A \cap B \neq \emptyset$

• Pour tout $x \in A \cup B$, $x \in A$ donc $\inf(A) \leq x \leq \sup(A)$

et $x \in B$ donc $\inf(B) \leq x \leq \sup(B)$

si bien que $\max(\inf(A), \inf(B)) \leq x \leq \min(\sup(A), \sup(B))$

Ceci montre que $A \cap B$ est bornée (présence d'un majorant et d'un minorant)

Comme cette partie est non vide, elle admet un sup et un inf et

$$\inf(A \cap B) \geq \max(\inf(A), \inf(B))$$

$$\sup(A \cap B) \leq \min(\sup(A), \sup(B))$$

• Peut-on dire mieux? Il y a évidemment égalité si A et B sont des intervalles... mais avec des ensembles plus vicieux, tout est possible 😊!

EXEMPLE $A = \{-1\} \cup [0; 1] \cup \{2\}$ et $B = \{-2\} \cup [0; 1] \cup \{3\}$

$\inf(A \cap B) = 0$, $\max(\inf(A), \inf(B)) = -1$ car $\inf(A) = -1$ et $\inf(B) = -2$

$\sup(A \cap B) = 1$, $\min(\sup(A), \sup(B)) = 2$ car $\sup(A) = 2$ et $\sup(B) = 3$

EXO 6

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) + (-1)^{n+1} - 3n - (-1)^n = 3n + 3 - (-1)^n - 3 - (-1)^n$
 $= 3 - 2 \times (-1)^n = \begin{cases} 3 - 2 = 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3 - (-2) = 5 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

donc $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$

La suite (u_n) est strictement croissante

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (n+1) - 3^{n+1} - n + 3^n = 1 - 3 \times 3^n + 3^n = 1 - 2 \times 3^n$
Or $3^n \geq 1$ donc $2 \times 3^n \geq 2$ d'où $u_{n+1} - u_n \leq -1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ La suite (u_n) est strictement décroissante

3) Posons $f: x \mapsto x + \cos x$ sur $[0; +\infty[$. Cette fonction est dérivable et
 $f'(x) = 1 - \sin(x) \geq 0$ (cf. $\sin \leq 1$) pour tout $x \in \mathbb{R}$: ainsi, f est croissante
si bien que

La suite (u_n) est croissante

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = u_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > u_n$

$\Rightarrow$ La suite (u_n) est strictement croissante

5) Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{3^{n+1}} - \frac{n}{3^n} = \frac{n+1-3n}{3^{n+1}} = \frac{1-2n}{3^{n+1}} < 0$ pour $n \geq 1$

$\Rightarrow$ La suite est strictement décroissante à partir du rang 1

6) Posons $f: x \mapsto (0,1)^x x^2 = e^{-x \ln(10)} x^2$ sur $[0; +\infty[$. Elle est dérivable et
 $f'(x) = -\ln(10) e^{-x \ln(10)} x^2 + e^{-x \ln(10)} x 2x = \underbrace{x e^{-x \ln(10)}}_{\geq 0} (2 - x \ln(10))$

Cette expression est du signe de $2 - x \ln(10)$. Or $2 - x \ln(10) < 0 \Leftrightarrow x > \frac{2}{\ln(10)}$
Et comme $\ln(10) > 2$ (puisque $e^2 < 9 < 10$), $1 > \frac{2}{\ln(10)}$ donc
 $f'(x) < 0$ pour $x \geq 1$: f est décroissante sur $[1; +\infty[$ d'où

La suite (u_n) est strictement décroissante à partir du rang 1

7) Posons $f: x \mapsto x^2(3-x) = 3x^2 - x^3$ sur $[0; +\infty[$. Cette fonction est dérivable et $f'(x) = 6x - 3x^2 = 3x(2-x)$ est du signe de $2-x$ puisque $3x \geq 0$.
De ce fait, $f'(x) < 0$ pour $x > 2$ donc f est strictement décroissante sur $[2; +\infty[$.

$\Rightarrow$ La suite (u_n) est strictement décroissante à partir du rang 2

8) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $u_n = \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} > 0$

$$\text{et } u_{n+1} = \prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k}{2k+1} = \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} \times \frac{2n+2}{2n+3} = u_n \times \frac{2n+2}{2n+3}$$

$$\text{donc } u_{n+1} - u_n = u_n \left(\frac{2n+2}{2n+3} - 1 \right) = \frac{-u_n}{2n+3} < 0$$

$\Rightarrow$ La suite est strictement décroissante

EXO 7

Pas du tout ! Si $(u_n) \uparrow$, alors $(u_{2n}) \uparrow$ et $(u_{2n+1}) \uparrow$ aussi.
Par contre, la réciproque est fautive : il suffit de considérer la suite de terme général

$$u_n = (-1)^n \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

Cette suite n'est ni croissante ($u_1 < u_0$) ni décroissante ($u_2 > u_1$)
mais $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = -1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, si bien que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont croissantes (car constantes).

EXO 8

1) C'est une suite arithmético-géométrique ... on peut calculer son expression

$$x = 3x - 5 \Leftrightarrow 5 = 2x \Leftrightarrow x = 5/2. \text{ Notons } \alpha = 5/2$$

$$\text{Alors } \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - 5 \\ \alpha = 3\alpha - 5 \end{cases} \Rightarrow u_{n+1} - \alpha = 3(u_n - \alpha) \text{ donc la suite } (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

définie par $v_n = u_n - \alpha$ est géométrique raison 3. Comme $v_0 = u_0 - \alpha = 1 - \alpha = -3/2$
alors $v_n = 3^n v_0 = -\frac{3^{n+1}}{2}$ d'où $u_n = v_n + \alpha = \frac{5 - 3^{n+1}}{2}$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{5-3^{n+1}}{2}$$

expression qui permet de voir que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

2) Notons $f: x \mapsto \frac{2x+3}{x+4}$ sur $[0; +\infty[$ (il est clair que $u_n \geq 0$ via la relation entre u_{n+1} et u_n)

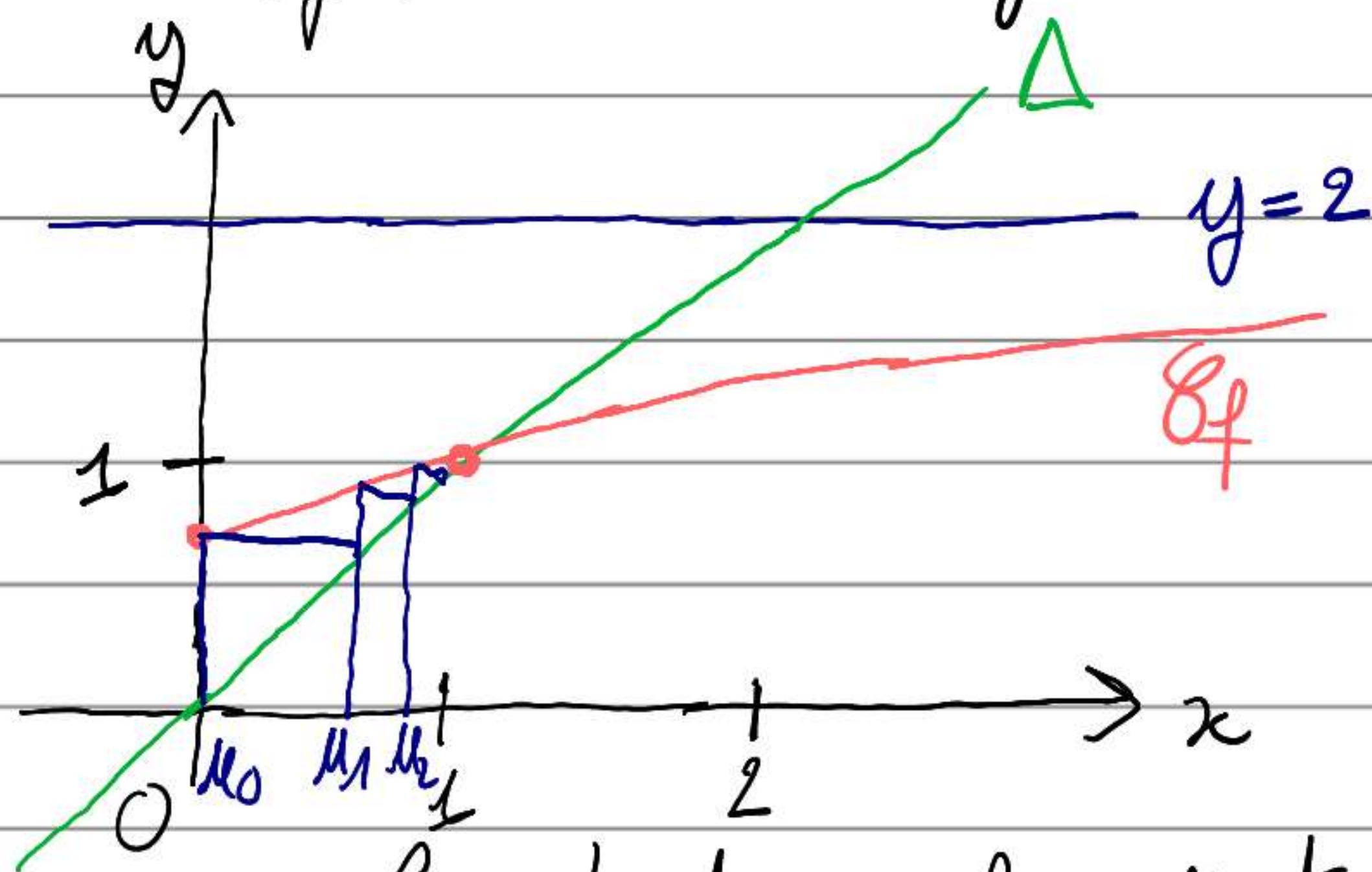
$$\text{Alors } f(x) = \frac{2x+8-5}{x+4} = \frac{2(x+4)-5}{x+4} = 2 - \frac{5}{x+4} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

donc $f'(x) = \frac{5}{(x+4)^2} > 0$: la fonction f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

$$\text{De plus } f(x) - x = \frac{2x+3-x^2-4x}{x+4} = \frac{-x^2-2x+3}{x+4} = \frac{-(x^2+2x-3)}{x+4} = \frac{-(x-1)(x+3)}{x+4}$$

et du signe de $-(x-1) = 1-x$ sur $[0; +\infty[$ (cf $x+3 > 0$ et $x+4 > 0$)

Ainsi f est au-dessus de $\Delta: y=x$ sur $[0; 1]$ et en dessous sur $[1; +\infty[$



x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$3/4$	2

La construction graphique montre que $0 \leq u_n < 1$ et $(u_n) \uparrow$ strictement, soit

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_n < u_{n+1} < 1$$

ce qui se démontre facilement par récurrence. Posons $P(n): "0 \leq u_n < u_{n+1} < 1"$

INITIALISATION

$u_0 = 0$ et $u_1 = 3/4$ donc $0 \leq u_0 < u_1 < 1$: ainsi $P(0)$ est vraie

HÉRÉDITÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé ; on suppose que $P(n)$ est vraie.

Alors $0 \leq u_n < u_{n+1} < 1$

d'où $f(0) \leq f(u_n) < f(u_{n+1}) < f(1)$ par stricte croissance de f

soit $\frac{3}{4} \leq u_{n+1} < u_{n+2} < 1$: ainsi $P(n+1)$ est vraie

CONCLUSION

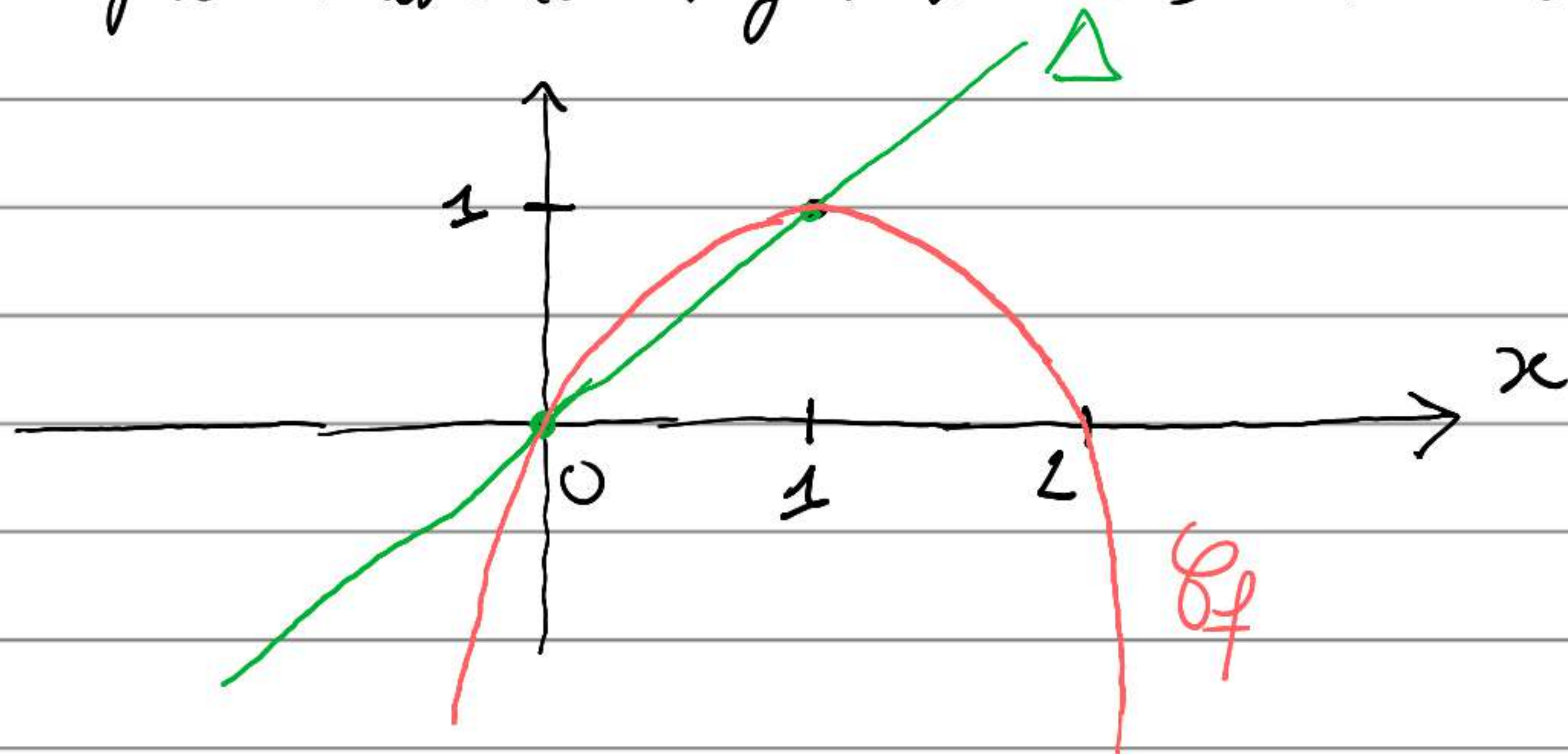
d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$; en particulier, la suite (u_n) est strictement croissante

3) Considérons $f: x \mapsto x(2-x) = 2x - x^2$ sur $\mathbb{R}$. Alors $f'(x) = 2 - 2x = 2(1-x)$ est du signe de $(1-x)$: la fonction f est $\nearrow$ sur $]-\infty; 1]$ et $\searrow$ sur $[1; +\infty[$

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$-\infty$

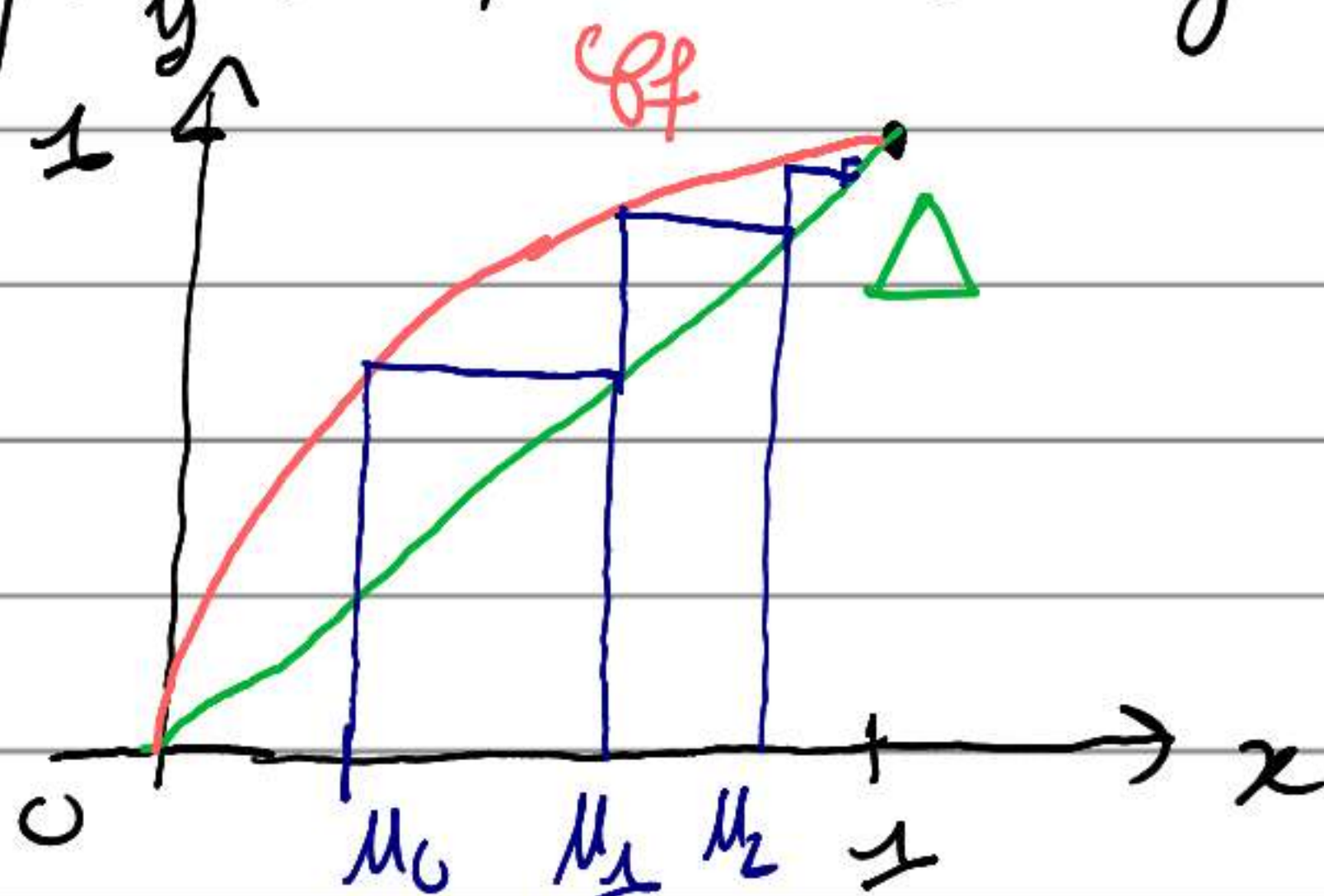
Cf est évidemment une parabole de sommet $(1; 1)$

$f(x) - x = x - x^2 = x(1-x) \geq 0$ sur $[0; 1]$ et < 0 sur $]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$
 $\Rightarrow$ Cf est au dessus de $\Delta: y=x$ sur $[0; 1]$ et en-dessous ailleurs.



Comme $f(x) \in [0; 1]$ pour tout $x \in [0; 1]$, on va voir $u_n \in [0; 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puisque $u_0 \in [0; 1]$: seule la zone entre 0 mais intéressante

La construction graphique des premiers termes suggère que $(u_n) \nearrow$ et $0 \leq u_n \leq 1$



CAS PARTICULIERS

$$u_0 = 0 \Rightarrow u_n = 0 \quad \forall n$$

$$u_0 = 1 \Rightarrow u_n = 1 \quad \forall n$$

On va donc démontrer par récurrence que :

(1) Si $u_0 = 0$, alors $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

(2) Si $u_0 = 1$, alors $u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

(3) Si $u_0 \in]0; 1[$, alors $0 < u_n < u_{n+1} < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Dans les trois hérédités, on procède de même : on part de la relation satisfaite par u_n ($P(n)$), on applique la fonction f ($\uparrow$ sur $[0; 1]$) et on en déduit la relation satisfaite par u_{n+1} ($P(n+1)$)

HERÉDITÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. Alors :

conf. str.

(1)

$$u_n = 0$$

$$\text{donc } f(u_n) = f(0)$$

$$\text{soit } u_{n+1} = 0$$

(2)

$$u_n = 1$$

$$\text{donc } f(u_n) = f(1)$$

$$\text{soit } u_{n+1} = 1$$

(3)

$$0 < u_n < u_{n+1} < 1$$

$$\text{donc } f(0) < f(u_n) < f(u_{n+1}) < f(1)^*$$

$$\text{soit } 0 < u_{n+1} < u_{n+2} < 1$$

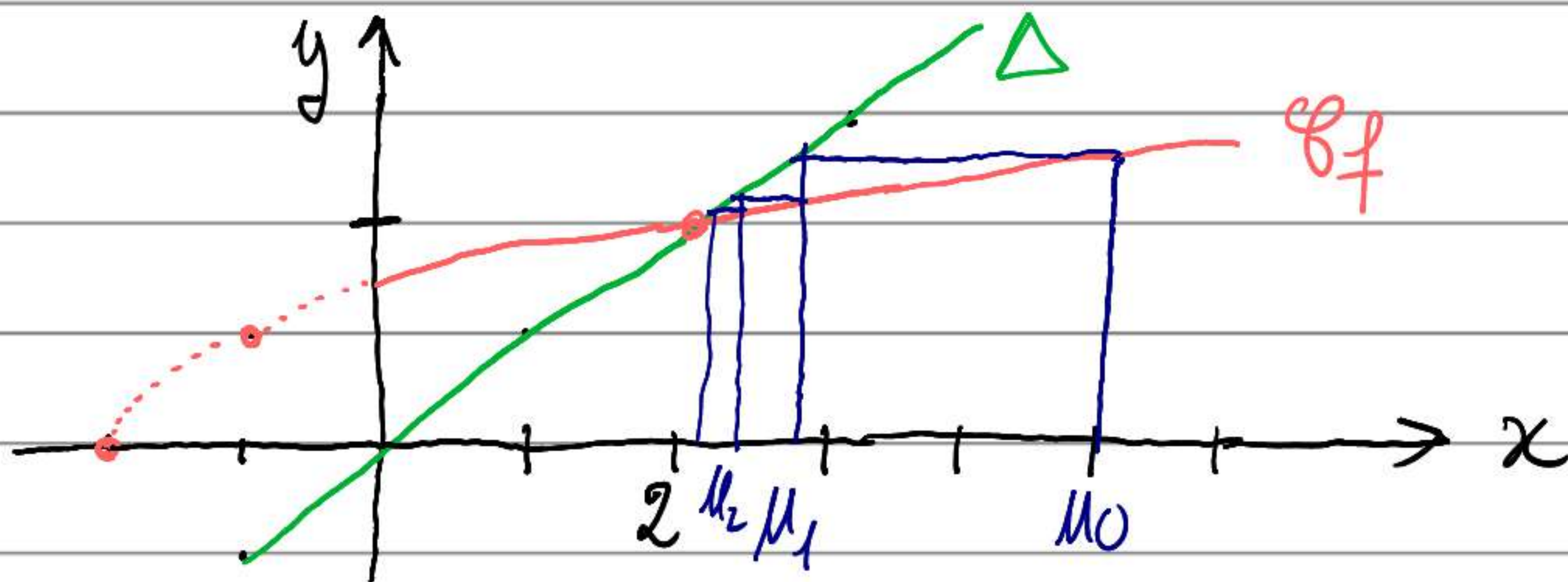
si bien que $P(n+1)$ est vraie

4) Notons $f: x \mapsto \sqrt{x+2}$ sur $[0; +\infty[$. Cette fonction est strictement croissante et sa courbe est celle de la $\sqrt{\quad}$ courbe décalée de 2 unités vers la gauche (Chapitre 7)

$$f(x) - x = \sqrt{x+2} - x = \frac{(\sqrt{x+2} + x)(\sqrt{x+2} - x)}{\sqrt{x+2} + x} = \frac{2 + x - x^2}{\sqrt{x+2} + x} \quad \text{pour } x \geq 0$$

Cette expression est du signe de $2 + x - x^2 = -(x^2 - x - 2) = -(x-2)(x+1) = (2-x)(x+1)$
donc du signe de $2-x$: ≥ 0 sur $[0; 2]$ et ≤ 0 sur $[2; +\infty[$

Ainsi f est au-dessus de $\Delta: y=x$ sur $[0; 2]$ et en dessous sur $[2; +\infty[$
ce qui nous permet d'effectuer la représentation graphique :



À vue de nez, $(u_n) \downarrow$ et $u_n > 2$: on va démontrer
par récurrence que la propriété

$$P(n): 2 < u_{n+1} < u_n$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

INITIALISATION

$u_0 = 5$ et $u_1 = \sqrt{7}$. Comme $2 < \sqrt{7} < 5$, alors $2 < u_1 < u_0$
si bien que la proposition $P(0)$ est vraie

HÉRÉDITÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $P(n)$ est vraie

$$\text{Alors } 2 < u_{n+1} < u_n$$

$$\text{d'où } f(2) < f(u_{n+1}) < f(u_n)$$

$$\text{soit } 2 < u_{n+1} < u_n$$

d'où $P(n+1)$ est vraie

car f est $\uparrow$ str sur $[0; +\infty[$

CONCLUSION

D'après le principe de récurrence, la proposition $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$
Ainsi, (u_n) est décroissante et minorée par 2.

EXO 9 Oui!

$$(a) u_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{7}\right)^k = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{7}} = 7 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}}{7 - 2} = \frac{7}{5} \left(1 - \left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}\right)$$

$$\text{or } 0 \leq \left(\frac{2}{7}\right)^{n+1} \leq 1 \text{ donc } 0 \leq 1 - \left(\frac{2}{7}\right)^{n+1} \leq 1 \text{ d'où } \boxed{0 \leq u_n \leq \frac{7}{5} \quad \forall n \in \mathbb{N}}$$

$$(b) 0 \leq n \leq n+1 \text{ donc } 0 \leq \frac{n}{n+1} \leq 1 \text{ d'où } \boxed{0 \leq u_n \leq 3 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$$

(c) À vue de nez $u_n > 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $0 < \frac{1}{u_n} < 1$ et $2 < u_{n+1} < 3$
 On va donc prouver que $2 \leq u_n \leq 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n): "2 \leq u_n \leq 3"$

INITIALISATION

$u_0 = 3$ et $2 \leq 3 \leq 3$ soit $2 \leq u_0 \leq 3$: ainsi, $P(0)$ est vraie

HÉRÉDITÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(n)$ est vraie. Alors $2 \leq u_n \leq 3$

d'où $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{2}$ (passage à l'inverse)

donc $2 + \frac{1}{3} \leq u_{n+1} \leq 2 + \frac{1}{2}$ d'où bien que $2 \leq u_{n+1} \leq 3$: ainsi, $P(n+1)$ est vraie

CONCLUSION

D'après le principe de récurrence, la proposition $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$
 soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad 2 \leq u_n \leq 3}$$

EXO 10

IDÉE : utiliser une suite constante et négative pour faire les produits d'adjoints

1) $\begin{cases} u_n = n \geq 0 \\ v_n = -1 \geq -1 \end{cases}$ donc les deux suites réelles (u_n) et (v_n)

sont bien minorées

Cependant, $u_n v_n = -n \rightarrow -\infty$ donc $(u_n v_n)$ n'est pas minorée

2) $\begin{cases} u_n = -n \leq 0 \\ v_n = -1 \leq -1 \end{cases}$ donc les deux suites réelles (u_n) et (v_n)

sont bien majorées

Cependant $u_n v_n = n \rightarrow +\infty$ donc $(u_n v_n)$ n'est pas majorée

EXO 11

(a) Par somme de limites, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^2 - 1 + \frac{1}{n} \right) = +\infty$

(b) Par produits et sommes : $\lim (1-3n) = -\infty$ et $\lim (n^2-2) = +\infty$
d'où par produit : $\lim (1-3n)(n^2-2) = -\infty$

(c) Par différence de limites : $\lim (1-5^n) = -\infty$

(d) $|-1/2| < 1$ donc $\lim (-1/2)^n = 0$ d'où $\lim u_n = 3$ par somme

(e) $\lim (n+5^n) = +\infty$ par somme d'où $\lim \frac{1}{n+5^n} = 0$ par quotient

$$(f) u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{7^k} = 1 \times \frac{1 - (1/7)^{n+1}}{1 - 1/7} = \frac{7}{6} \left(1 - \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}\right)$$

Or $\lim \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1} = 0$ d'où $\lim u_n = 7/6$ par différence et produit

(g) $u_n = \frac{\sqrt{n}-n}{2n+1} \sim \frac{-n}{2n} = -\frac{1}{2}$ donc $\lim u_n = -1/2$ par équivalence

$$(h) u_n = \frac{n}{1+\sqrt{n}} - \frac{n}{2+\sqrt{n}} = \frac{n(2+\sqrt{n}-1-\sqrt{n})}{(1+\sqrt{n})(2+\sqrt{n})} = \frac{n}{(1+\sqrt{n})(2+\sqrt{n})} \sim \frac{n}{\sqrt{n} \times \sqrt{n}} = 1$$

donc $\lim u_n = 1$ par équivalence

(i) Pour $n > 0$, on a $\sqrt{n^2+6n} = \sqrt{n^2(1+6/n)} = n\sqrt{1+\frac{6}{n}}$
Or $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} + o(u)$ donc $\sqrt{n^2+6n} = n\left(1 + \frac{3}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = n+3+o(1)$

donc $u_n = \sqrt{n^2+6n} - n = 3+o(1)$ d'où $\lim u_n = 3$

EXO 12

(a) On a $u_n = 4n^2 - n + 5 \sim 4n^2$ et $\lim 4n^2 = +\infty$ (TT) donc $\lim u_n = +\infty$

(b) $u_n = \frac{5n+3}{3n^2+5} \sim \frac{5n}{3n^2} = \frac{5}{3n}$. Or $\lim \frac{5}{3n} = 0$ (Q) donc $\lim u_n = 0$

$$(c) u_n = \frac{2n+3}{3n-1} \sim \frac{2n}{3n} = \frac{2}{3} \text{ donc } \underline{\lim u_n = 2/3}$$

$$(d) \cos(n) = o(n) \text{ donc } u_n = \cos(n) - n \sim -n. \text{ Or } \lim -n = -\infty \text{ donc } \underline{\lim u_n = -\infty}$$

$$(e) \forall n \in \mathbb{N}^* \quad -1 \leq \sin(n) \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\sin(n) \leq 1 \Rightarrow 2 \leq 3 - \sin(n) \leq 4$$

$$\Rightarrow \frac{2}{n} \leq u_n \leq \frac{4}{n}$$

$$\text{Or } \lim \frac{2}{n} = \lim \frac{4}{n} = 0 \text{ (quotients) d'où } \underline{\lim u_n = 0} \text{ (Gendarmes)}$$

AUTRE VERSION $3 - \sin(n) = o(n) \text{ donc } \lim \frac{3 - \sin(n)}{n} = 0$

$$(f) \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| = \left(\frac{3}{4}\right)^n |\cos(n)| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$\text{Or } \lim \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 \text{ puisque } |3/4| < 1 \text{ donc } \underline{\lim u_n = 0} \text{ (Gendarmes)}$$

$$(g) (-1)^n = o(n) \text{ donc } u_n = 2n + (-1)^n \sim 2n. \text{ Or } \lim 2n = +\infty \text{ donc } \underline{\lim u_n = +\infty}$$

$$(h) \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{3^n + 4^n}{4^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n + 1. \text{ Or } \lim \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 \text{ donc } \underline{\lim u_n = 1}$$

$$(i) (-1)^n = o(n) \text{ donc } \frac{(-1)^n}{n} = o(1) = o(n) \text{ et } n + \frac{(-1)^n}{n} \sim n$$

$$\text{Ainsi } u_n \sim \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}. \text{ Or } \lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \text{ d'où } \underline{\lim u_n = 0}$$

EXO 13

(a) On a déjà vu que $u_n = \frac{7}{5} \left(1 - \left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}\right)$. Or $\lim \left(\frac{2}{7}\right)^{n+1} = 0$
 si bien que $\underline{\lim u_n = 7/5}$ par différence et produit de limites

$$(b) u_n = \frac{3n}{n+1} \sim \frac{3n}{n} = 3 \text{ donc } \underline{\lim u_n = 3}$$

(c) On sort de l'esprit du II ! Ici, il faut exprimer u_{n+2} en fonction de u_n afin de prouver que (u_n) et (u_{n+1}) sont monotones, donc convergentes

puisque bornées. On utilise alors un passage à la limite dans la relation de récurrence pour trouver leur limite et conclure...

Alors-y ! En gardant en tête que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 2 \leq u_n \leq 3 \quad \text{d. exo 9}$$

$$(1) \text{ Pour } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n} = \frac{2u_n + 1}{u_n}$$

$$\text{donc } u_{n+2} = 2 + \frac{1}{u_{n+1}} = 2 + \frac{u_n}{2u_n + 1} = \frac{4u_n + 2 + u_n}{2u_n + 1} = \frac{5u_n + 2}{2u_n + 1}$$

$$\begin{array}{r|l} 5x+2 & 2x+1 \\ -(5x+5/2) & 5/2 \\ \hline & -1/2 \end{array}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{2u_n + 1} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2+4u_n}$$

La fonction $f: x \mapsto \frac{5}{2} - \frac{1}{2+4x}$ est $\uparrow$ sur $[0, +\infty[$ car $f'(x) = \frac{4}{(2+4x)^2} > 0$

$$(2) \text{ Posons alors } v_n = u_{2n} \text{ et } w_n = u_{2n+1}$$

$$\bullet \text{ On a } v_0 = u_0 = 3 \text{ et } v_{n+1} = u_{2n+2} = f(u_{2n}) = f(v_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

soit $v_{n+1} = f(v_n)$. En particulier $v_1 = f(3) = \frac{5}{2} - \frac{1}{14} = \frac{34}{14} = \frac{17}{7} < v_0$

$$\text{Pour } n \in \mathbb{N}, \text{ posons } P(n): "0 < v_{n+1} < v_n"$$

$$f(x) = \frac{5x+2}{2x+1} \text{ d'après exo 9}$$

INIT $0 < v_1 < v_0$ donc $P(0)$ est vraie

HÉRÉD soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose que $P(n)$ est vraie.
Alors $0 < v_{n+1} < v_n$

d'où $f(v) < f(v_{n+1}) < f(v_n)$ par croissance de f sur $[0, +\infty[$

soit $0 < v_{n+2} < v_{n+1}$

Autrement dit, $P(n+1)$ est vraie

CONCL d'après le principe de récurrence, la proposition $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$
Ainsi,

la suite (v_n) est décroissante et minorée par 0

• De même, $w_0 = u_2 = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ et $w_{n+1} = u_{2n+3} = f(u_{n+1}) = f(w_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
 En particulier, $w_1 = f(\frac{7}{3}) = \frac{5}{2} - \frac{1}{2 + \frac{7}{3}} = \frac{5}{2} - \frac{3}{34} = \frac{85}{34} - \frac{3}{34} = \frac{82}{34} = \frac{41}{17}$

donc $w_0 = \frac{7}{3} = \frac{7 \times 17}{3 \times 17} = \frac{119}{51}$ et $w_1 = \frac{3 \times 41}{3 \times 17} = \frac{123}{51} > w_0$

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $P(n)$: " $0 < w_n < w_{n+1} < 3$ "
 Comme précédemment, on démontre par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, en utilisant la croissance de f sur $]0; +\infty[$ et en notant que $f(0) > 0$ et $f(3) = \frac{17}{7} < 3$.
 Ainsi:

la suite (w_n) est croissante et majorée par 3

- (3) Comme (v_n) est décroissante et minorée par 0, elle converge vers un réel l .
 • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_n \leq v_0 = 3$ donc $0 \leq l \leq 3$ (passage à la limite)
 • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f(v_n)$ avec f continue donc $l = f(l)$ (même raison)

Or $f(x) = x \Leftrightarrow \frac{5x+2}{2x+1} = x \Leftrightarrow 5x+2 = 2x^2+x \Leftrightarrow 2x^2-4x-2=0$
 $\Leftrightarrow x^2-2x-1=0$

$\Delta = 4 - 4 \times (-1) = 8 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \text{solut}^0 \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1-\sqrt{2} \\ x_2 = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2} \end{array} \right.$

Ainsi $l = 1-\sqrt{2}$ ou $l = 1+\sqrt{2}$

Or $0 \leq l \leq 3$ donc $l = 1+\sqrt{2}$ et $\lim v_n = 1+\sqrt{2}$

- (4) De même (w_n) est croissante et majorée par 3, donc elle converge vers un réel l' .
 • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < w_0 \leq w_n < 3$ donc $0 \leq l' \leq 3$
 • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = f(w_n)$ donc $l' = f(l')$
 Ainsi $l' = 1 \pm \sqrt{2}$ donc $l' = 1+\sqrt{2}$ puisque $l' \geq 0$, soit $\lim w_n = 1+\sqrt{2}$

CONCLUSION

$\lim u_{2n} = \lim u_{2n+1} = 1+\sqrt{2}$ donc

$\lim u_n = 1+\sqrt{2}$

CHAPITRE 20

Exo 14 à 30

EXO 14

(a) $\lim \left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2} \right)^n$?

• Si $a=b$: alors $\left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2} \right)^n = (a^{1/n})^n = a$ donc $\lim \left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2} \right)^n = a$

• Sinon : comme $a^{1/n} = e^{\frac{1}{n} \ln a} = 1 + \frac{\ln(a)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ et $b^{1/n} = 1 + \frac{\ln(b)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

alors $\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2} = 1 + \frac{\ln(a) + \ln(b)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{\ln(ab)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

or $\left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2} \right)^n = \exp \left[n \ln \left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2} \right) \right]$

$e^u = 1 + u + o(u)$

$\ln(1+u) = u + o(u)$

avec $\ln \left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2} \right) = \ln \left(1 + \frac{\ln(ab)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) = \frac{\ln(ab)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

donc $n \ln \left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2} \right) = \frac{\ln(ab)}{2} + o(1) \rightarrow \frac{1}{2} \ln(ab) = \ln(\sqrt{ab})$

soit par composition

$\lim \left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2} \right)^n = \sqrt{ab}$

(b) $\lim (a^n + b^n)^{1/n}$?

• Si $a=b$: alors $(a^n + b^n)^{1/n} = (2a^n)^{1/n} = 2^{1/n} a \rightarrow a$ car $2^{1/n} = e^{\frac{\ln 2}{n}} \rightarrow e^0 = 1$

Ainsi

$\lim (a^n + b^n)^{1/n} = a$

• Si $a > b$: alors $(a^n + b^n)^{1/n} = \left[a^n \left(1 + \left(\frac{b}{a} \right)^n \right) \right]^{1/n} = a e^{\frac{1}{n} \ln \left(1 + \left(\frac{b}{a} \right)^n \right)} \rightarrow a$

car $\left(\frac{b}{a} \right)^n \rightarrow 0$ donc $\frac{1}{n} \ln \left(1 + \left(\frac{b}{a} \right)^n \right) \rightarrow 0$ par somme, composée et produits de limites

Ainsi $\lim (a^n + b^n)^{1/n} = a$

Si $b > a$, on montre de même que $\lim (a^n + b^n)^{1/n} = b$

EXO 15

(a) Pour tout $k \in [1; n]$, on a : $n^2 + 1 \leq n^2 + k \leq n^2 + n$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^2+1} \geq \frac{1}{n^2+k} \geq \frac{1}{n^2+n} \Rightarrow \frac{n}{n^2+1} \geq \frac{n}{n^2+k} \geq \frac{n}{n^2+n}$$

si bien que

$$\frac{n^2}{n^2+1} \geq \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k} \geq \frac{n^2}{n^2+n} = \frac{n}{n+1}$$

or $\frac{n^2}{n^2+1} \sim \frac{n^2}{n^2} = 1 \rightarrow 1$ et $\frac{n}{n+1} \sim \frac{n}{n} = 1 \rightarrow 1$

donc on déduit du Théorème des gendarmes que $\lim u_n = 1$

(b) De même, $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ pour tout $k \in [1; n]$

donc $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

or $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \sim \frac{n}{\sqrt{n^2}} = 1 \rightarrow 1$ et $\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \sim \frac{n}{\sqrt{n^2}} \rightarrow 1$

donc on déduit du Théorème des gendarmes que $\lim v_n = 1$

(c) De même, $\frac{n}{\sqrt{n^4+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4+k}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4+1}}$ pour tout $k \in [1; n]$

donc $\frac{n^2}{\sqrt{n^4+n}} \leq w_n \leq \frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}}$

or $\frac{n^2}{\sqrt{n^4+n}} \sim \frac{n^2}{\sqrt{n^4}} = 1 \rightarrow 1$ et $\frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}} \sim \frac{n^2}{\sqrt{n^4}} = 1 \rightarrow 1$

si bien que $\lim w_n = 1$ cf. Théorème des Gendarmes

EXO 16

(a) D'après le cours, $2^n = o(n!)$ donc $\lim \frac{2^n}{n!} = 0$

On retrouve ceci par calcul direct en notant que pour $n \geq 2$,

$$0 \leq \frac{2^n}{n!} = \frac{2 \times \underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{\leq 1} \times 2}{1 \times \underbrace{2 \times 3 \times \dots \times (n-1)}_{\leq 1} \times n} \leq \frac{4}{n}$$

d'où le résultat en utilisant le théorème des gendarmes

(b) D'après le cours, $n^2 = o(2^n)$ donc $\lim \frac{n^2}{2^n} = 0$

On peut le retrouver en notant que $\ln\left(\frac{n^2}{2^n}\right) = 2\ln n - n\ln 2 = n\left(\frac{2\ln n}{n} - \ln 2\right)$
 tend vers $-\infty$

(c) D'après le cours, $n^3 = o(e^n)$ et $e^n = o(n!)$ donc $n^3 = o(n!)$ soit $\lim \frac{n^3}{n!} = 0$

On retrouve ceci par calcul direct en écrivant pour $n \geq 4$

$$0 \leq \frac{n^3}{n!} = \frac{1 \times \cancel{n \times n \times n}}{1 \times 2 \times \dots \times (n-3) \times (n-2) \times (n-1) \times n} \leq \frac{n^2}{(n-3)(n-2)(n-1)}$$

≤ 1

Comme $\frac{n^2}{(n-3)(n-2)(n-1)} \sim \frac{1}{n} \rightarrow 0$, on retrouve le résultat à l'aide du théorème des gendarmes.

(d) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$
 $= n\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ puisque $\ln(1+u) = u + o(u)$ $u \rightarrow 0$
 $= 1 + o(1)$

donc $\lim n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 1$

Rien de bien méchant dans cet exercice!

EXU 17

L'idée est ici d'observer que ces deux suites sont quasi arithmétique et quasi géométrique, et d'utiliser ceci pour établir par récurrence des inégalités intéressantes.

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{2n+1}{3(n+1)} \leq \frac{2n+2}{3(n+1)} \leq \frac{2}{3}$

Comme $u_n \geq 0$ (on le montre par récurrence immédiate), on a
On va alors en déduire que $0 \leq u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n u_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^n$
 $\Rightarrow$ DÉMONSTRATION PAR RÉCURRENCE À EFFECTUER

$$0 \leq u_{n+1} \leq \frac{2}{3} u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On conclut grâce au Théorème des Échelles que

$$\lim u_n = 0$$

2) $\lim \frac{n-1}{2n+3} = \frac{1}{2}$ puisque $\frac{n-1}{2n+3} \sim \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$

$$\begin{array}{c|c} n-1 & 2n+3 \\ \hline -5/2 & 1/2 \end{array}$$

De ce fait: $\forall \varepsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq m_0, \left| \frac{n-1}{2n+3} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$

Prends $\varepsilon = 1/4$: il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq m_0$, $\left| \frac{n-1}{2n+3} - \frac{1}{2} \right| < 1/4$

EN PARTICULIER $u_{n+1} \geq u_n + 1/4$ pour $n \geq m_0$

$$\text{soit } \frac{1}{4} < \frac{n-1}{2n+3} < \frac{3}{4}$$

On va alors en déduire que

$$u_n \geq u_{m_0} + \frac{n-m_0}{4} \text{ pour tout } n \geq m_0$$

$\Rightarrow$ DÉMONSTRATION PAR RÉCURRENCE À EFFECTUER

On conclut grâce au Théorème de minoration que

$$\lim u_n = +\infty$$

TRÈS À RETENIR

Quand une suite est quasi-géométrique, on peut tenter de la comparer à une suite géométrique.
Idem pour une suite quasi-arithmétique.

Exo 18

Pour décroissance de (u_n) , on a $u_{n+1} \leq u_n \leq u_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\text{d'où } u_n + u_{n+1} \leq 2u_n \leq u_{n-1} + u_n$$

$$\text{soit } n(u_n + u_{n+1}) \leq 2n u_n \leq n(u_{n-1} + u_n)$$

Or $u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}$ donc $n(u_n + u_{n+1}) \sim 1$ et $u_{n-1} + u_n \sim \frac{1}{n-1} \sim \frac{1}{n}$ donc $n(u_{n-1} + u_n) \sim 1$

Ainsi $\lim (u_n + u_{n+1}) = 1 = \lim n(u_{n-1} + u_n)$ donc $\lim 2n u_n = 1$ (Squeeze)

soit $2n u_n \sim 1$ et donc

$$u_n \sim \frac{1}{2n}$$

Exo 19

(a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n(1+1/n)} - \sqrt{n} = \sqrt{n} (\sqrt{1+1/n} - 1)$

$$\text{Or } \sqrt{1+u} = 1 + u/2 + o(u) \text{ et } \lim_{u \rightarrow 0} 1/n = 0$$

$$\text{donc } \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right) = \frac{1}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Ainsi

$$u_n \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

(b) On sait que $\sin x \sim x$ et $\cos x \sim 1$ donc $\tan x \sim x$

$$\text{Or } \frac{\pi}{n+3} \rightarrow 0 \text{ donc } \tan\left(\frac{\pi}{n+3}\right) \sim \frac{\pi}{n+3} \sim \frac{\pi}{n}$$

Ainsi

$$u_n \sim \frac{\pi}{n}$$

(c) Pour $n \in \mathbb{N}$, $\ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \ln\left(\frac{n+2-1}{n+2}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{n+2}\right)$

$$\text{Or } \ln(1-u) = -u + o(u) \text{ et } \frac{1}{n+2} \sim \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

donc

$$u_n \sim -\frac{1}{n}$$

EXO 20

1) Considérons $f: x \mapsto \tan(x) - \frac{1}{x}$ sur $]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$

- $f'(x) = 1 + \tan^2(x) + \frac{1}{x^2} > 0$ donc f est strictement croissante
- f est continue comme somme de fonctions continues
- $\lim_{x \rightarrow n\pi} f(x) = -\frac{1}{n\pi}$ (q. $\tan(n\pi) = 0$) et $\lim_{x \rightarrow n\pi + \frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$ (somme de limites)

d'où le tableau de variations

On en déduit que f prend une seule fois sur $]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$

x	$n\pi$	$n\pi + \frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\frac{1}{n\pi}$	$\nearrow +\infty$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists! x_n \in]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[, \tan(x_n) = \frac{1}{x_n}$$

2) Par périodicité $\tan(x_n - n\pi) = \tan(x_n) = \frac{1}{x_n}$

Or $n\pi < x_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$ d'où $1 < \frac{x_n}{n\pi} < 1 + \frac{1}{2n}$

On déduit du Théorème des Gendarmes que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n\pi} = 1$$

d'où $x_n \sim n\pi$ et $\tan(x_n - n\pi) \sim \frac{1}{n\pi}$

EN AUTRE $x_n - n\pi \in]0, \frac{\pi}{2}[$ donc $x_n - n\pi = \arctan(\tan(x_n - n\pi))$

Or $\arctan x \underset{0}{\sim} x$ et $\tan(x_n - n\pi) \sim \frac{1}{n\pi} \rightarrow 0$

si bien que

$$x_n - n\pi \sim \frac{1}{n\pi}$$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 + o(1)$$

$$\arctan x = x + o(x) \underset{0}{\sim} x$$

REMARQUE on a ainsi établi que

$$x_n = n\pi + \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

EXO 21

- Par construction, on a $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- De plus, on passe de u_n à u_{n+1} en ajoutant des chiffres à l'écriture décimale de u_n , donc $u_{n+1} > u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

AINSI la suite (u_n) est croissante et majorée, donc convergente.

EXO 22

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 0,3 \dots 3 \overbrace{8 \dots 8}^n$ donc $0 \leq u_n \leq 1$

En outre,

$$\begin{cases} u_n = 0,3 \dots 3 \overbrace{8 \dots 8}^n \\ u_{n+1} = 0,3 \dots 3 \overbrace{3}^{n+1} \overbrace{8 \dots 8}^n \end{cases}$$

donc $u_n > u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

AINSI la suite (u_n) est décroissante et minorée, donc convergente

EXO 23

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P(n): "u_n \leq 2 - \frac{1}{n}"$

(I) $u_1 = \frac{1}{1^3} = 1$ et $2 - \frac{1}{1} = 1 \geq u_1$ donc $P(1)$ est vraie

(H) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $P(n)$ est vraie.

$$\text{Alors } u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

$$\text{donc } u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^3} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^3}$$

QUESTION: a-t-on $2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^3} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$?

Il suffit de regarder le signe de la différence

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^3} - \left(2 - \frac{1}{n+1}\right) &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^3} - \frac{1}{n} \\
 &= \frac{n(n+1)^2 + n - (n+1)^3}{n(n+1)^3} \\
 &= \frac{n^3 + 2n^2 + n + n - (n^3 + 3n^2 + 3n + 1)}{n(n+1)^3} \\
 &= \frac{-n^2 - n - 1}{n(n+1)^3} < 0
 \end{aligned}$$

donc $2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^3} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$

d'où $u_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$: donc, $P(n+1)$ est vraie

(C) On déduit du principe de récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
c'est-à-dire $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$

2). En particulier, on a $u_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

• Par ailleurs, $u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^3} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} + \frac{1}{(n+1)^3} = u_n + \frac{1}{(n+1)^3} > u_n$
donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante

AINSI la suite est croissante et majorée, donc convergente.

EXO 24

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(n+1)! - n! = (n+1) \times n! - n! = n \times n! \geq 0$ donc la suite de terme général $n!$ est croissante
- De plus, pour tout $n \geq 2$, on peut écrire $n! = \underbrace{1 \times \dots \times (n-1)}_{\geq n} \times n \geq n$
donc pour tout réel $A \geq 0$, il existe $m_0 = \lfloor A+1 \rfloor \geq n$
tel que pour tout $n \geq m_0$, $n! \geq n \geq m_0 > A$: la suite $(n!)$ n'est pas majorée

Cette suite étant croissante et non majorée, elle tend vers $+\infty$

EXO 25

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

Or $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$ donc $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} > 2\sqrt{n}$ et
$$\boxed{\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}}$$

2) Il en découle que $\frac{1}{\sqrt{k}} > 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$ pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$

d'où
$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} > 2 \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \quad \leftarrow \text{SOMME TELESCOPIQUE}$$

soit $u_n > 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{1})$ après télescopage

On déduit alors du Thème de Minoration que
$$\boxed{\lim u_n = +\infty}$$

EXO 26

1) Pour $n \geq 2$, on a
$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{n - (n-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)} \geq \frac{1}{n^2} \text{ puisque } n(n-1) \leq n^2$$

2) Il en découle que $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ pour tout $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$

d'où
$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \quad \leftarrow \text{SOMME TELESCOPIQUE}$$

soit $u_n - 1 \leq 1 - \frac{1}{n}$ après télescopage

AINS $u_n \leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2$ donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée

Par ailleurs, $u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2} > u_n$ donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ $\nearrow$

Comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée, elle converge.

EXO 27

1) Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a : $0 \leq \sin(t) \leq 1$ par croissance du $\sin$
 donc : $0 \leq \sin^n(t) \leq \sin^{n-1}(t)$ ($\times \sin(t)$)

et : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(t) dt$

soit $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Ainsi, la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

2) a) On va calculer I_{n+2} à l'aide d'une IPP:

$$\begin{cases} f(t) = \sin^{n+1}(t) \\ g'(t) = \sin(t) \end{cases} \quad \begin{cases} f'(t) = (n+1) \cos(t) \sin^n(t) \\ g(t) = -\cos(t) \end{cases}$$

$$\int f g' = [f g] - \int f' g$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(t) \times \sin(t) dt = \left[-\cos(t) \sin^{n+1}(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1) \cos^2(t) \sin^n(t) dt \\ &= -0 + 0 + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos^2(t)}_{1 - \sin^2(t)} \sin^n(t) dt \\ &= (n+1) \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(t) dt \right] \\ &= (n+1) (I_n - I_{n+2}) \end{aligned}$$

d'où $I_{n+2} = (n+1) I_n - (n+1) I_{n+2}$ soit $(n+2) I_{n+2} = (n+1) I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

(b) Ainsi $I_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2} I_{2p}$ donc $I_2 = \frac{1}{2} I_0$, $I_4 = \frac{3}{4} I_2 = \frac{3 \times 1}{4 \times 2} I_0, \dots, I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2}$

$$\begin{aligned} \text{et } I_{2p} &= \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2p-1)}{2 \times 4 \times \dots \times 2p} I_0 = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times (2p-1) \times 2p}{2 \times 2 \times 4 \times 4 \times \dots \times 2p \times 2p} I_0 \\ &= \frac{(2p)! I_0}{(2 \times 4 \times \dots \times 2p)^2} = \frac{(2p)! I_0}{(2^p p!)^2} = \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} I_0 \end{aligned}$$

Or $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{2}$ donc

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \frac{\pi}{2}$$

De même $I_{2p+1} = \frac{2 \times 4 \times \dots \times 2p}{3 \times 5 \times \dots \times (2p+1)} I_1 = \frac{2 \times 2 \times 4 \times 4 \times \dots \times 2p \times 2p}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \dots \times 2p \times (2p+1)} I_1$
 $= \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} I_1 = \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!} I_1$

Or $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(t) dt = [-\cos t]_0^{\pi/2} = 1$ donc $I_{2p+1} = \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!}$

3(a) Posons $u_n = (n+1) I_{n+1} I_n$ pour $n \in \mathbb{N}$

Alors $u_{n+1} = \underbrace{(n+2) I_{n+2} I_{n+1}}_{2(a)} = (n+1) I_n I_{n+1} = u_n$ donc la suite (u_n) est constante

Or $u_0 = I_1 I_0 = \pi/2$

si bien que $u_n = u_0 = \pi/2$ soit

$(n+1) I_{n+1} I_n = \pi/2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

(b) Comme (I_n) est décroissante d'après la question 1), on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$

soit $\frac{I_{n+2}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$

Or $(n+2) I_{n+2} = (n+1) I_n$ question 2(a)
 donc $\frac{I_{n+2}}{I_n} = \frac{n+1}{n+2}$

Ainsi

$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

(c) On déduit alors du théorème des Gendarmes que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$ soit $I_{n+1} \sim I_n$

De ce fait, $\frac{\pi}{2} = (n+1) I_{n+1} I_n \sim n \cdot I_n^2$

donc $I_n^2 \sim \frac{\pi}{2n}$ soit

$I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

Exo 28

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{v_n + 3u_n}{4} = \frac{2v_n - 2u_n}{4} = -\frac{1}{2}(u_n - v_n)$

donc $u_n - v_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - v_0) = -\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

et $u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} + \frac{v_n + 3u_n}{4} = \frac{4u_n + 4v_n}{4} = u_n + v_n$

donc $u_n + v_n = u_0 + v_0 = 3$

AINSI $\begin{cases} u_n - v_n = -(-1/2)^n \\ u_n + v_n = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_n = 3 - (-1/2)^n \\ 2v_n = 3 + (-1/2)^n \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} u_n = \frac{3 - (-1/2)^n}{2} \\ v_n = \frac{3 + (-1/2)^n}{2} \end{cases}}$

EXO 29

(a). $u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2} > u_n$ donc (u_n) $\uparrow$ strictement.

$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - \left(u_n + \frac{1}{n}\right) = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$
 $= \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{n + n^2 + n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0$ donc (v_n) $\downarrow$

$v_n - u_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$

Ainsi

(u_n) et (v_n) sont adjacentes

(b). $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+k} = \boxed{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}}$ et $u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k+n+1} = \boxed{\frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$

donc $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{2}{2n+2} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{2n+2 - (2n+1)}{(2n+1)(2n+2)} > 0$

AINSI la suite (u_n) est croissante

$v_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \boxed{\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}}$ et $v_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k} = \boxed{\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$

donc $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{2}{2n} = \underbrace{\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n}\right)}_{< 0} + \underbrace{\left(\frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n}\right)}_{< 0} < 0$

AINSI la suite (v_n) est décroissante

$v_n - u_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$

De ce fait,

(u_n) et (v_n) sont adjacentes

EXO 30

- 1) $f: x \mapsto x + \ln(x)$ est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ (somme de fonctions $\uparrow$)
• De plus $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ par somme de limites
donc $n \in]\lim_0 f; \lim_{+\infty} f[$

On déduit alors du Théorème de la Bijection que: $\exists ! x_n \in]0, +\infty[\quad f(x_n) = n$

- 2) Comme $f(x_{n+1}) = n+1 > n = f(x_n)$ et que f est strictement $\uparrow$, alors $x_{n+1} > x_n$
donc la suite (x_n) est croissante

Si (x_n) est majorée, alors (x_n) converge vers un réel l .

Comme $f(x_n) = n$ pour tout n et que f est continue, on obtient $f(l) = +\infty$ par passage à la limite
 $\Rightarrow$ C'EST ABSURDE

De ce fait, (x_n) n'est pas majorée donc $\lim x_n = +\infty$. Par conséquent, $\ln(x_n) = o(x_n)$
d'où $f(x_n) = x_n + \ln(x_n) \sim x_n$ soit $x_n \sim n$

- 3) Par définition, $f(x_n) = n = x_n + \ln(x_n)$ donc $x_n = n - \ln(x_n)$
Or $x_n \sim n$ donc $x_n = n + o(n) = n(1 + o(1))$ et $\ln(x_n) = \ln(n) + \ln(1 + o(1)) = \ln(n) + o(1)$
Il en découle que $x_n = n - \ln(n) + o(1)$

CHAPITRE 21

EXO 1

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

Soit alors $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $x > 0$, on a $f(x) - \alpha x = x \left[\frac{f(x)}{x} - \alpha \right]$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} - \alpha = +\infty$ par somme, on conclut par produit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \alpha x) = +\infty$

Ceci étant vrai pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a bien :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \alpha x) = +\infty$$

EXO 2

• Pour $x \in]0, a[$, on a $0 < \frac{x}{a} < 1$ donc $\lfloor \frac{x}{a} \rfloor = 0$ et $\frac{b}{x} \lfloor \frac{x}{a} \rfloor = 0$

De ce fait,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{b}{x} \lfloor \frac{x}{a} \rfloor = 0$$

• Par définition : $\lfloor X \rfloor \leq X < \lfloor X \rfloor + 1$ d'où $X - 1 < \lfloor X \rfloor \leq X$ pour tout $X \in \mathbb{R}$

Pour tout $x > 0$, on a donc $\frac{b}{x} - 1 < \lfloor \frac{b}{x} \rfloor \leq \frac{b}{x}$

$$\text{d'où } \frac{b}{a} - \frac{x}{a} \leq \frac{x}{a} \lfloor \frac{b}{x} \rfloor \leq \frac{b}{a} \quad (\text{comme } \frac{x}{a} > 0)$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{a} = 0$, on déduit de Theor des Gendarmes que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{a} \lfloor \frac{b}{x} \rfloor = \frac{b}{a}$$

EX03

- Soit f une fonction périodique de période $T > 0$ admettant une limite finie l en $+\infty$
- Raisonnons par l'absurde et supposons que f n'est pas constante : il existe alors deux réels a et b tels que $f(a) \neq f(b)$
 - Posons alors $u_n = a + nT$ et $v_n = b + nT$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
 - * Par périodicité $f(u_n) = f(a + nT) = f(a)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $\lim f(u_n) = f(a)$
On a $\lim u_n = +\infty$ par produit et somme de limites
Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$, on a alors $\lim f(u_n) = l$ soit $f(a) = l$
 - * On montre de même que $\lim f(v_n) = f(b)$ et $\lim f(v_n) = l$ soit $f(b) = l$
 - * Ainsi $f(a) = f(b) = l$: CONTRADICTION

On a de ce fait montré que f est nécessairement constante.

EX04

La fonction $f: x \mapsto x \lfloor 1/x \rfloor$ est bien définie sur $]0; +\infty[$
On voit que la partie entière est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$: la fonction f va donc présenter des discontinuités lorsque $\frac{1}{x} = m \in \mathbb{N}^*$ soit $x = \frac{1}{m}$ avec $m \in \mathbb{N}^*$

AINSI f est continue sur tout intervalle $] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} [$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

La plus grande valeur de $\frac{1}{n}$ étant 1, il n'y aura plus de problème au-delà de 1.
D'ailleurs, $0 < \frac{1}{x} < 1$ pour $x > 1$ donc $\lfloor 1/x \rfloor = 0$ et $f(x) = 0$ pour $x > 1$

AINSI f est nulle (donc continue) sur l'intervalle $]1; +\infty[$

En 0, par contre, rien d'évident car les points de discontinuité et les intervalles $] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} [$ vont s'accumuler. On peut noter que la limite

est facile à calculer :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$
$$\text{donc} \quad x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

$$\text{En particulier, pour tout } x > 0, \quad \frac{1}{x} - 1 < \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \leq \frac{1}{x} \quad \downarrow \times x^2$$

$$\text{donc} \quad x - x^2 < f(x) \leq x$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} x = \lim_{x \rightarrow 0} (x - x^2) = 0$, on déduit du Théorème des Gendarmes que

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0}$$

Établisons enfin la discontinuité en tout point $1/n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{Sur }]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[\quad \frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n} \Rightarrow n < \frac{1}{x} < n+1 \Rightarrow \lfloor \frac{1}{x} \rfloor = n \Rightarrow f(x) = nx^2$$
$$\text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{n}} f(x) = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

$$\text{Sur }]\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}[\quad \frac{1}{n} < x < \frac{1}{n-1} \Rightarrow n-1 < \frac{1}{x} < n \Rightarrow \lfloor \frac{1}{x} \rfloor = n-1 \Rightarrow f(x) = (n-1)x^2$$
$$(511 > 1) \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{n}} f(x) = \frac{n-1}{n^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \neq \lim_{x \rightarrow \frac{1}{n}} f(x)$$

$$\text{Si } n=1 \quad \text{comme } f(x)=0 \text{ sur }]1, +\infty[, \text{ on a } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \neq \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

ce qui montre bien que f est discontinue en $1/n$
pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

EX05

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x+5) = 7 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(n) = \lim_{x \rightarrow 2} (ax+b) = 2a+b$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 8 \\ x < 8}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8} (ax+b) = 8a+b \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 8 \\ x > 8}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8} (-x+3) = -5$$

Comme f est continue car polynôme sur $] -\infty, 2[$, $] 2, 8[$ et $] 8, +\infty[$, il faut et il suffit qu'elle soit continue en 2 et en 8 pour l'être sur $\mathbb{R}$.

$$\text{Ainsi, } f \text{ continue sur } \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=7 \\ 8a+b=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=7 \\ 6a=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} a=-2 \\ b=11 \end{cases}}$$

2) Même démarche avec la fonction g

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x-5) = -3 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} -\sqrt{ax+b} = -\sqrt{2a+b}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 8 \\ x < 8}} g(x) = \lim_{x \rightarrow 8} -\sqrt{ax+b} = -\sqrt{8a+b} \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 8 \\ x > 8}} g(x) = \lim_{x \rightarrow 8} (-x+b) = b-8$$

$$\text{donc } g \text{ continue sur } \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2a+b} = -3 \\ -\sqrt{8a+b} = b-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=9 \\ 8a+b=(8-b)^2 \end{cases} \quad \text{et } (b \leq 8)$$

$$\text{Ceci implique } (8-b)^2 - 36 = 8a+b - 4(2a+b) = -3b$$

$$\Leftrightarrow 64 - 16b + b^2 - 36 = -3b$$

$$\Leftrightarrow b^2 - 13b + 28 = 0$$

$$\Delta = 169 - 112 = 57$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{13 - \sqrt{57}}{2} \quad \text{ou} \quad b = \frac{13 + \sqrt{57}}{2} > 10$$

Comme $b \leq 8$ nécessairement, on a donc

$$\boxed{b = \frac{13 - \sqrt{57}}{2}}$$

$$\text{et} \quad \boxed{a = \frac{9-b}{2} = \frac{5 + \sqrt{57}}{4}}$$

EXO 6

- 1) $5x^2 - 12x + 4$ admet pour racines 2 (racine évidente) et $\frac{2}{5}$ ($x_1, x_2 = \frac{c}{a}$)
donc $5x^2 - 12x + 4 = 5(x-2)(x-\frac{2}{5}) = (x-2)(5x-2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
De ce fait, on a pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$f(x) = \frac{5x^2 - 12x + 4}{x-2} = \frac{(x-2)(5x-2)}{x-2} = 5x-2$$

si bien que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5 \times 2 - 2 = 8$.

On peut ainsi prolonger f par continuité à $\mathbb{R}$ en posant $f(2) = 8$

- 2) $x^3 - 2x^2 - x + 2$ admet pour racines évidentes 1 et -1, donc il se factorise par $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$. D'ailleurs ici c'est assez facile :

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 - x + 2 &= x^3 - x - 2x^2 + 2 = x(x^2 - 1) - 2(x^2 - 1) \\ &= (x-2)(x^2 - 1) \\ &= (x-2)(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

De ce fait, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$$g(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{1-x} = \frac{(x-2)(x+1)(x-1)}{1-x} = -(x-2)(x+1)$$

si bien que $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -(1-2)(1+1) = 2$. De même, on a pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$g(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{1-|x|} = \frac{(x-2)(x+1)(x-1)}{1+x} = (x-2)(x-1)$$

d'où $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = (-1-2)(-1-1) = 6$. Par conséquent,

On peut prolonger g par continuité à $\mathbb{R}$ en posant $g(1) = 2$ et $g(-1) = 6$.

EX07

- Si $f(a) = f(b)$, alors $\frac{f(a) + 2f(b)}{3} = f(a)$ donc on peut prendre $c = a$
- Si $f(a) < f(b)$, alors $3f(a) < f(a) + 2f(b) < 3f(b)$
donc $f(a) < \frac{f(a) + 2f(b)}{3} < f(b)$
Comme f est continue sur $[a, b]$, on déduit du TVI
qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \frac{f(a) + 2f(b)}{3}$
- Si $f(b) < f(a)$, on a $f(b) < \frac{f(a) + 2f(b)}{3} < f(a)$
et on conclut de la même manière.

EX08

Considérons la fonction $f: x \mapsto 2x - \sin(x^2 + 2x + \sqrt{3})$ définie sur $\mathbb{R}$

- (1) f est continue sur $\mathbb{R}$ car composée et somme de fonctions usuelles continues sur $\mathbb{R}$
- (2) Comme $|\sin(x^2 + 2x + \sqrt{3})| \leq 1$, alors $\sin(x^2 + 2x + \sqrt{3}) = o(2x)$
si bien que $f(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} 2x$. De ce fait,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{donc } 0 \in] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) [$$

On déduit alors du TVI appliqué à f sur $\mathbb{R}$ qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$
tel que $f(\alpha) = 0$, soit $2\alpha = \sin(\alpha^2 + 2\alpha + \sqrt{3})$

CQFD. ✓

EXO 9

Considérons $g: x \mapsto f(x) - x$ définie sur l'intervalle $[0; 1]$

(1) g est continue en tant que somme de fonctions continues

(2) $g(0) = f(0) \in [0, 1]$ donc $g(0) \geq 0$

$g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ car $f(1) \in [0, 1]$

AINSI $g(1) \leq 0 \leq g(0)$

On déduit alors du TVI qu'il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que $g(\alpha) = 0$
soit $f(\alpha) = \alpha$

EXO 10

1) Définissons $f: x \mapsto \cos(x) - x$ sur l'intervalle $[0, \pi/2]$

(1) f est continue sur $[0, \pi/2]$ (somme de fonctions usuelles continues)

(2) f est strictement décroissante car $f'(x) = -\sin(x) - 1 < 0$ sur $[0, \pi/2]$

(3) $f(0) = \cos 0 = 1$ et $f(\pi/2) = \cos(\pi/2) - \pi/2 = -\pi/2$ donc $f(\pi/2) < 0 < f(0)$

On déduit alors du Théorème de la Bijection qu'il existe un unique réel $\alpha \in [0, \pi/2]$ tel que $f(\alpha) = 0$ c-à-d $\cos(\alpha) = \alpha$. ~~cos~~ (FD)

2) Même démarche avec $f: x \mapsto \tan(x) - x$ sur $] \pi/2, 3\pi/2[$

(1) f est continue (somme de fonct^o continues)

(2) $f'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x) \geq 0$ donc $f \uparrow$ str

(3) $\lim_{x \rightarrow \pi/2^+} f = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 3\pi/2^-} f = +\infty$ donc $0 \in] \lim_{x \rightarrow \pi/2^+} f, \lim_{x \rightarrow 3\pi/2^-} f [$

Théorème Bijection:
 $\left\{ \begin{array}{l} \exists ! \alpha \in] \pi/2, 3\pi/2[\\ \text{t.q. } f(\alpha) = \alpha \\ \text{c-à-d } \tan(\alpha) = \alpha \end{array} \right.$

EXO 11

Soit f un polynôme de degré impair n et a_n son coefficient dominant

(1) f est une fonction continue car polynomiale

$$(2) f(x) \underset{\infty}{\sim} a_n x^n \quad \begin{cases} \text{si } a_n > 0 : \lim_{+\infty} f = +\infty \text{ et } \lim_{-\infty} f = -\infty \\ \text{si } a_n < 0 : \lim_{+\infty} f = -\infty \text{ et } \lim_{-\infty} f = +\infty \end{cases}$$

On a donc $0 \in]\lim_{-\infty} f; \lim_{+\infty} f[$ (1^{er} cas) ou $0 \in]\lim_{+\infty} f; \lim_{-\infty} f[$ (2nd cas)

Dans tous les cas, on déduit du TVI qu'il existe un réel α tel que $f(\alpha) = 0$: autrement dit, f admet au moins une racine réelle.

EXO 12

$$1) \begin{cases} \bullet f \text{ est continue (car polynomiale) sur } [1; +\infty[\\ \bullet f(1) = 6 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ (cf. équivalent) donc } 4 \in]\lim_{+\infty} f; f(1)[\end{cases}$$

On déduit alors du TVI qu'il existe $c \in]1, +\infty[$ tq $f(c) = 4$

$$2) \begin{cases} \bullet f \text{ est continue sur }]0; 5] \text{ (donnée de fonctions continues)} \\ \bullet f \text{ est str } \uparrow \text{ sur }]0; 5] \text{ (donnée de fonctions croissantes)} \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty \text{ et } f(5) = 24 > 7 \text{ donc } 7 \in]\lim_{x \rightarrow 0} f; f(5)[\end{cases}$$

On déduit alors du Théorème de la Bijection qu'il existe un unique $c \in]0, 5[$ tq $f(c) = 7$

EXO 13

$$1) \begin{cases} \bullet f: x \mapsto 4x^5 - x^2 + x + 1 \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ car polynomiale} \\ \bullet f(x) \underset{\infty}{\sim} 4x^5 \text{ donc } \lim_{-\infty} f = -\infty \text{ et } \lim_{+\infty} f = +\infty \text{ soit } 0 \in]\lim_{-\infty} f; \lim_{+\infty} f[\end{cases}$$

On déduit alors du TVI qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tq $f(c) = 0$

2). Pour $x > 1$, on a $x^3 > 1$ donc $x^5 > x^2 > 1$ et $f(x) = 3x^5 + \underbrace{(x^5 - x^2)}_{>0} + x + 1 > 5$

• Pour $x < -1$, on a $x^5 < -1$ et $-x^2 < -1$ donc $f(x) = 4x^5 - x^2 + x + 1 < 1 - 6 = -5$

Ainsi $f(x) \neq 0$ sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, ce qui prouve par contraposée que toutes les racines réelles de f sont comprises dans l'intervalle $[-1; 1]$.

EXO 14

Comme f est continue sur l'intervalle I , alors $f(I)$ est un intervalle d'après le TVI. Si $f(I)$ est fini, ses bornes sont nécessairement égales : il est donc réduit à un point, ce qui prouve que f est constant.

EXO 15

1) * Appliquons la définition de la limite avec $M = f(0) + 1$

• Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, il existe $A_2 > 0$ tel que $x > A_2 \Rightarrow f(x) > M$

• Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, il existe $A_1 < 0$ tel que $x < A_1 \Rightarrow f(x) > M$

* De ce fait, $f(x) > M$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus [A_1, A_2]$. Examinons maintenant ce qui se passe sur $[A_1, A_2]$

• la fonction f est continue sur $[A_1, A_2]$

• $[A_1, A_2]$ est un intervalle fermé borné

Par conséquent, f est bornée et atteint ses bornes sur $[A_1, A_2]$. En particulier, f admet un minimum m sur $[A_1, A_2]$

* Enfin, $0 \in [A_1, A_2]$ donc $m \leq f(0) < M$

d'où $f(x) > m$ pour tout $x \notin [A_1, A_2]$,

ce qui montre que m est le minimum de f sur $\mathbb{R}$

AINSI

f admet un minimum sur $\mathbb{R}$

2) Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, on procède de la même façon avec $M = f(0) - 1$

et l'on trouve un intervalle $[A_1, A_2]$ contenant 0 tel que $f(x) < M$ pour $x \notin [A_1, A_2]$
ce qui permet de prouver que le maximum de f sur $[A_1, A_2]$ est aussi
le maximum de f sur $\mathbb{R}$

AINSI

f admet un maximum sur $\mathbb{R}$

3) On applique la définition de la limite avec $\varepsilon = 1$

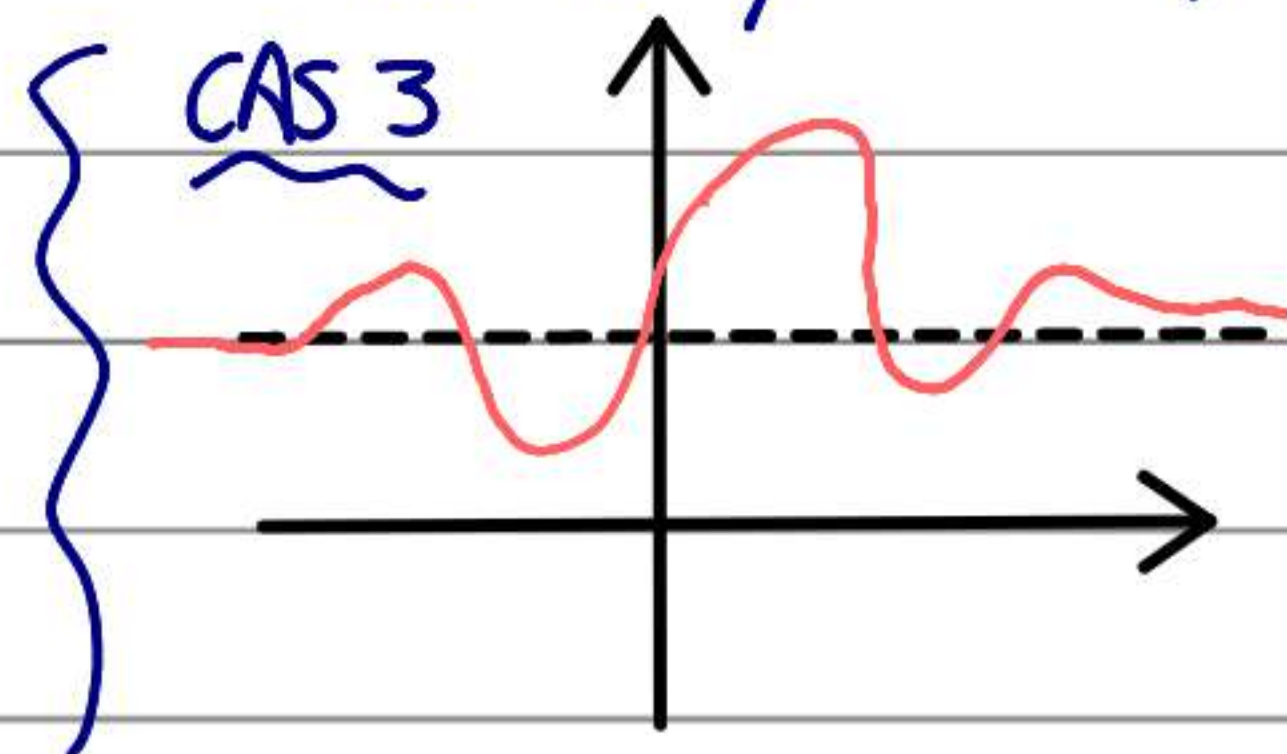
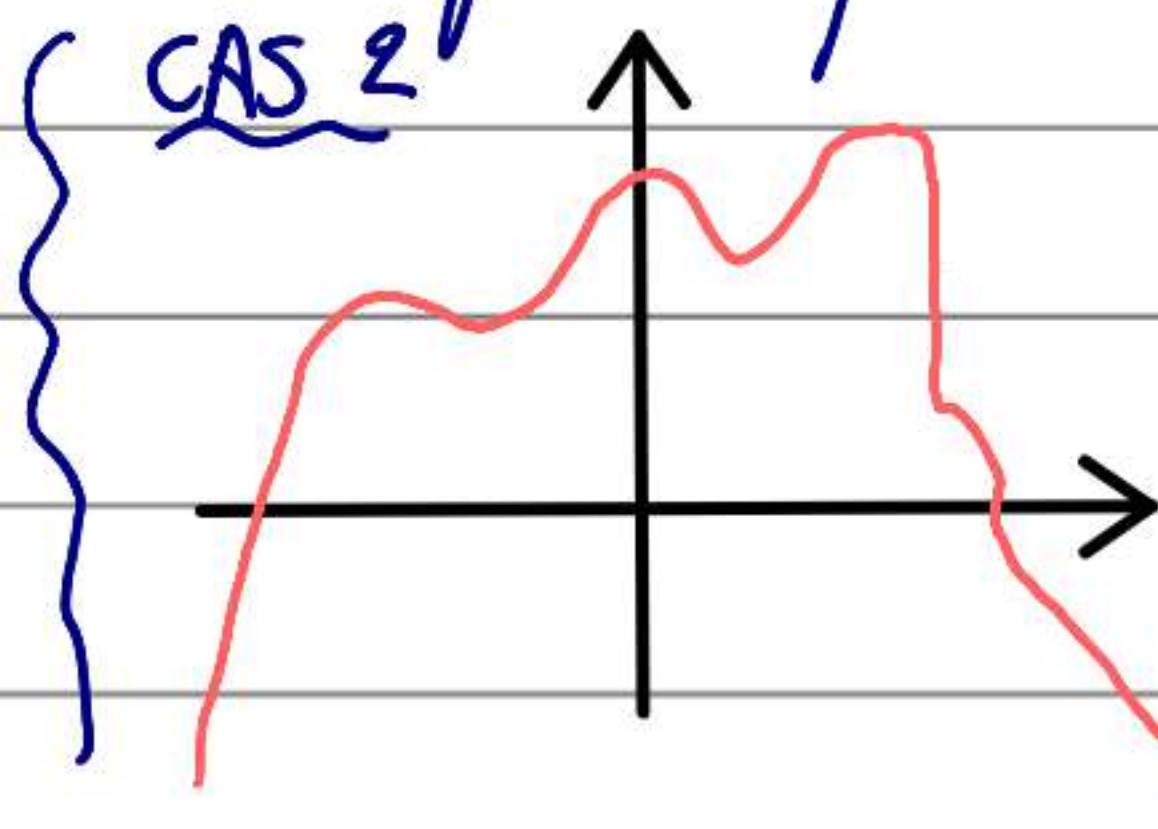
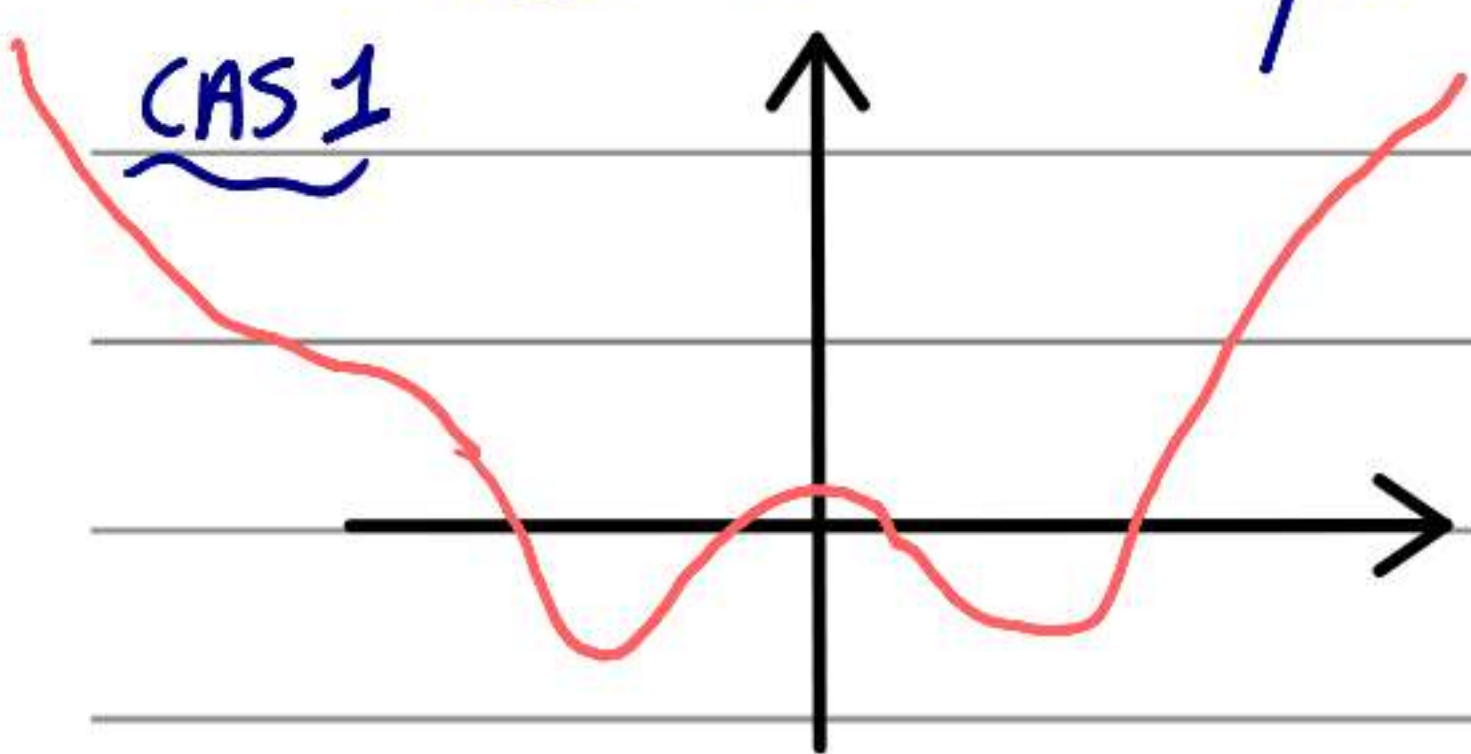
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \text{ donc il existe } A_2 > 0 \text{ tel que } x > A_2 \Rightarrow |f(x) - l| < 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \text{ donc il existe } A_1 < 0 \text{ tel que } x < A_1 \Rightarrow |f(x) - l| < 1 \end{cases}$$

Ainsi, pour $x \in]-\infty, A_1[\cup]A_2, +\infty[$, on a $f(x) \in]l-1; l+1[$ donc
 f est bornée sur ces deux intervalles.

Sur l'intervalle fermé borné $[A_1, A_2]$, la fonction f est continue donc bornée

$\Rightarrow$ en déduisant que f est bornée sur $\mathbb{R}$

REMARQUE : les démonstrations effectuées dans chacun des cas ne viennent pas
de nulle part... ni d'intuition!... mais "simplement" d'une observation
graphique. On tente de tracer la courbe d'une fonction continue ayant
les limites imposées, et on s'aperçoit qu'elle va avoir un min / un max / les 2



EXO 16

(1) CAS GÉNÉRAL : $m < f(a) = f(b) < M$

On va noter x_1 et $x_2 \in [a, b]$ deux réels vérifiant $m = f(x_1)$ et $M = f(x_2)$
Soit $k \in]m, M[$

* Si $k = f(a)$: il admet pour antécédents a et b .

* Si $k \in]m, f(a)[$: on applique le TVI sur $[a, x_1]$ et $[x_2, b]$

• f est continue sur $[a, x_1]$ } $\Rightarrow$ il existe $c_1 \in]a, x_1[$ tel que $f(c_1) = k$
• $m = f(x_1) < k < f(a)$

• f est continue sur $[x_2, b]$ } $\Rightarrow$ il existe $c_2 \in]x_2, b[$ tel que $f(c_2) = k$
• $m = f(x_1) < k < f(a) = f(b)$

Ainsi k admet (au moins) deux antécédents c_1 et c_2 sur $[a, b]$

* Si $k \in]f(a), M[$: on applique le TVI sur $[a, x_2]$ et $[x_1, b]$

• f est continue sur $[a, x_2]$ } $\Rightarrow$ il existe $c_1 \in]a, x_2[$ tel que $f(c_1) = k$
• $f(a) < k < f(x_2) = M$

• f est continue sur $[x_1, b]$ } $\Rightarrow$ il existe $c_2 \in]x_1, b[$ tel que $f(c_2) = k$
• $f(b) = f(a) < k < f(x_1) = m$

Ainsi k admet (au moins) deux antécédents c_1 et c_2 sur $[a, b]$

(2) CAS où $f(a) = f(b) = m$

On note x_2 un réel de $[a, b]$ vérifiant $f(x_2) = M$.
Soit $k \in]m, M[$. On applique le TVI sur $[a, x_2]$ et $[x_2, b]$.

• f est continue sur $[a, x_2]$ } $\Rightarrow$ il existe $c_1 \in]a, x_2[$ tel que $f(c_1) = k$
• $m = f(a) < k < f(x_2) = M$

• f est continue sur $[x_2, b]$ } $\Rightarrow$ il existe $c_2 \in]x_2, b[$ tel que $f(c_2) = k$
• $m = f(b) < k < f(x_2) = M$

AINSI k admet (au moins) deux antécédents c_1 et c_2 sur $[a, b]$

(3) CAS où $f(a) = f(b) = M$

On note x_1 un réel de $[a, b]$ vérifiant $f(x_1) = m$
Soit $k \in]m, M[$. On applique le TVI sur $[a, x_1]$ et $[x_1, b]$

• f est continue sur $[a, x_1]$ } $\Rightarrow$ il existe $c_1 \in]a, x_1[$ tel que $f(c_1) = k$
• $m = f(x_1) < k < f(a) = M$

• f est continue sur $[x_1, b]$ } $\Rightarrow$ il existe $c_2 \in]x_1, b[$ tel que $f(c_2) = k$
• $m = f(x_1) < k < f(b) = M$

AINSI k admet (au moins) deux antécédents sur $[a, b]$

On a bien étalé le résultat recherché dans tous les cas de figure.

EXO 17

L'idée est de jouer avec la relation $f(x) = f(2x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
On a aussi $f(x) = f(2 \times \frac{x}{2}) = f(x/2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
d'où par une récurrence immédiate

$$f(x) = f(x/2^n) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Soit alors $x \in \mathbb{R}$ fixé.

On a bien évidemment
par continuité de f en 0.

$$x/2^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ d'où } f(x/2^n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(0)$$

Or $f(x/2^n) = f(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui montre que $f(x) = f(0)$.
Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que

la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$

EXO 18

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = f(\frac{x}{2})^2 \geq 0$ donc

La fonction f est nécessairement positive.

2) Supposons qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = 0$. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(x - c + c) = f(x - c) \times f(c) = 0$$

AINSI

Si f s'annule en un point, c'est la fonction nulle.

PAR CONTRAPOSÉE si f n'est pas la fonction nulle, elle ne s'annule jamais
donc elle reste strictement positive d'après la question 1.

3) CAS OÙ $f > 0$

• Pour $x = y = 0$, on obtient $f(0) = f(0)^2$ soit $\boxed{f(0) = 1}$ comme $f(0) > 0$

• Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n+1) = f(1) \times f(n)$ donc $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $f(1)$ et de premier terme $f(0) = 1$ si bien que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = f(1)^n}$$

• AD Comme $f(1) > 0$, on peut poser $a = \ln(f(1)) \in \mathbb{R}$ de sorte que $f(1) = e^a$ et ainsi $\underline{f(n) = e^{an}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ça commence à prendre forme

• Soit maintenant $m \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Alors $-m \in \mathbb{N}$ et $m + (-m) = 0$ si bien que $f(m) \times f(-m) = f(0) = 1$ par propriété de f d'où $f(m) = \frac{1}{f(-m)} = \frac{1}{e^{-am}} = e^{am}$ grâce à l'expression trouvée sur $\mathbb{N}$

On a ainsi établi que

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{Z} \quad f(m) = e^{am}}$$

• Soit $r \in \mathbb{Q}$: il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $r = \frac{p}{q}$

En suivant le même raisonnement qu'au début de la question,

$$f((n+1)r) = f(nr + r) = f(nr) \times f(r)$$

donc $(f(nr))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $f(r)$ et de premier terme $f(0) = 1$, si bien que $f(nr) = f(r)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

En particulier, $f(qr) = f(p) = e^{ap}$ car $p \in \mathbb{Z}$

d'où $f(r) = (e^{ap})^{1/q} = e^{a \frac{p}{q}} = e^{ar}$. De ce fait

$$\boxed{\forall r \in \mathbb{Q} \quad f(r) = e^{ar}}$$

Là, on tombe sur un résultat classique mais délicat :
« tout réel est limite d'une suite de nombres rationnels »

Le plus simple est de considérer l'arrondi à la $n^{\text{ème}}$ décimale.
Voici comment procéder: soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le nombre rationnel $u_n = \frac{E(10^n x)}{10^n}$

On se convainc sans peine que c'est l'arrondi de x à la $n^{\text{ème}}$ décimale...
mais quoiqu'il en soit, on va prouver que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x$

Pour tout $z \in \mathbb{R}$, $E(z) \leq z < E(z) + 1$ donc $z - 1 < E(z) \leq z$

En particulier, $10^n x - 1 < E(10^n x) \leq 10^n x$

d'où $x - 10^{-n} < u_n \leq x$ en divisant par 10^n

On déduit alors du théorème des gendarmes que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x$

Par continuité de f sur $\mathbb{R}$, on obtient $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n)$

Or $u_n \in \mathbb{Q}$ donc $f(u_n) = e^{a u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = e^{ax}$ par continuité de l'exponentielle

On a ainsi établi que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = e^{ax}$ avec $a = \ln f(1)$

4) On déduit des questions précédentes que les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$
et vérifiant $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) = f(x) \times f(y)$

sont la fonction nulle et toutes les fonctions $f_a : x \mapsto e^{ax}$
avec $a \in \mathbb{R}$ fixé.

CHAPITRE 22

Exo 1 à 15

EXO 1

1). Pour $x \neq 0$, on a $|f(x)| = x^2 |\sin(1/x)| \leq x^2$
 Comme $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$ Théorème des Gendarmes

AINSI f est continue en 0. Par ailleurs, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ en tant que composée de fonctions usuelles $\mathcal{C}^\infty$ sur leurs ensembles de définition, si bien que f est continue sur $\mathbb{R}$.

• Pour $x \neq 0$, on a
$$f'(x) = 2x \sin(1/x) + x^2 \times (-1/x^2) \times \cos(1/x)$$

$$= \underline{2x \sin(1/x) - \cos(1/x)}$$

et
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin(1/x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \quad (\text{même méthode que pour } \lim_{x \rightarrow 0} f(x))$$

donc f est dérivable en 0 et $\underline{f'(0) = 0}$

Toutefois $\lim_{x \rightarrow 0} 2x \sin(1/x) = 0$ alors que $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(1/x)$ n'existe pas

si bien que $\underline{f' \text{ n'admet pas de limite en 0}}$. De ce fait, f' n'est pas continue

PAR CONSÉQUENT

f est de classe $\mathcal{C}^0$ mais pas de classe $\mathcal{C}^1$

2) On a par définition
$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Cette fonction est évidemment de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. Il ne nous reste qu'à examiner son comportement en 0

- $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x|x| = 0 = g(0)$ par produit de limites

si bien que la fonction g est continue en 0 , donc sur $\mathbb{R}$.

- On a $g'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x > 0 \\ -2x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = 0$

Or, $\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{x|x|}{x} = |x| \rightarrow 0$ donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$

Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = g'(0)$ donc g' est continue en 0 , donc sur $\mathbb{R}$

- On a $g''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x > 0 \\ -2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} g''(x)$ n'existe pas.

De ce fait, g'' n'est pas continue en 0 .

PAR CONSÉQUENT g est de classe $\mathcal{C}^1$ mais pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

3) La fonction h est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ (composée de fonctions $\mathcal{C}^\infty$) et sur $]-\infty, 0[$ (fonction constante). Il faut donc examiner son comportement en 0 .

- Comme $h = 0$ sur $]-\infty, 0[$, alors h et toutes ses dérivées tendent vers 0 lorsque x tend vers 0^- (continuité et dérivabilité à gauche en 0)

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1/x = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} -1/x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 0$ par composition $= h(0)$

De ce fait, h est continue en 0 , donc sur $\mathbb{R}$

- Pour $x > 0$, on a $h'(x) = +\frac{1}{x^2} e^{-1/x} = X^2 e^X$ en posant $X = -1/x$
Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} X = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} X^2 e^X = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} h'(x) = 0$

On en déduit que h est dérivable en 0 , $h'(0) = 0$ et h' continue en 0 , donc sur $\mathbb{R}$

- De même, $h^{(n)}(x) = P_n(1/x) e^{-1/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ (avec P_n polynôme)

donc $h^{(n)}(0) = 0$ et $h^{(n)}$ est continue en 0 pour tout $n \in \mathbb{N}$

On en déduit ainsi que h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

EXO 2

- f est un quotient de polynômes et $\mathcal{D}f = \mathbb{R}$ car $1+x^2 \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
De ce fait, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$: " $f^{(n)}: x \mapsto \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$, où P_n polynôme de degré n "

INITIALISATION

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{P_0(x)}{(1+x^2)^{0+1}}$
avec $P_0 = 1$ polynôme de degré 0.
De ce fait, $P(0)$ est vraie.

HÉRÉDITÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $P(n)$ est vraie.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a alors $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$ avec $\deg(P_n) = n$
donc $f^{(n+1)}(x) = \frac{P_n'(x)(1+x^2)^{n+1} - P_n(x) \times 2x \times (n+1)(1+x^2)^n}{(1+x^2)^{2n+2}} = \frac{(1+x^2)P_n'(x) - 2(n+1)xP_n(x)}{(1+x^2)^{n+2}}$

On a $\deg(P_n) = n$ donc $\deg((1+x^2)P_n'(x)) = n+1 = \deg(2(n+1)xP_n(x))$
Examinons les coefficients dominants de ces polynômes, en notant $a_n \neq 0$ celui de P_n .

$$\begin{cases} 2(n+1)xP_n(x) \rightsquigarrow 2(n+1)a_n \\ (1+x^2)P_n'(x) \rightsquigarrow na_n \end{cases}$$

Comme $2(n+1)a_n - na_n = (n+2)a_n \neq 0$
alors la différence de nos deux polynômes
est un polynôme de degré $n+1$.

AINSI $f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{(1+x^2)^{n+1+1}}$, avec $\deg(P_{n+1}) = n+1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

donc $P(n+1)$ est vraie.

CONCLUSION ✓ Après le principe de récurrence, la proposition $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ - CQFD!

EX03

1) f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ (quotient de polynômes)

Pour tout $x \neq 0$, on a :

$$f^{(0)}(x) = 1/x = x^{-1} ; \quad f^{(1)}(x) = -1 x^{-2} ; \quad f^{(2)}(x) = +2 x^{-3} ; \quad f^{(3)}(x) = -6 x^{-4}$$

d'où

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}^* \quad f^{(m)}(x) = \frac{(-1)^m m!}{x^{m+1}}$$

ce qui se démontre par récurrence sans aucun problème

2) g est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ (fonct. nouvelle) et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$g^{(0)}(x) = \sin(x) ; \quad g^{(1)}(x) = \cos(x) ; \quad g^{(2)}(x) = -\sin(x) ; \quad g^{(3)}(x) = -\cos(x)$$

puis $g^{(4)}(x) = \sin(x) ; \quad g^{(5)}(x) = \cos(x)$ etc...

AINSI

$$\begin{array}{ll} \forall m \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} & g^{(4m)}(x) = \sin(x) & g^{(4m+1)}(x) = \cos(x) \\ & g^{(4m+2)}(x) = -\sin(x) & g^{(4m+3)}(x) = -\cos(x) \end{array}$$

3) h est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ (quotient de polynômes)

Si on dérive "bêtement" h , on tombe assez vite sur une expression infinie et cela ne permet pas de trouver l'expression de $h^{(n)}$.

ASTUCE (vue lors des recherches de primitives) : mettre $h(x)$ sous la forme $\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}$

$$\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} = \frac{a(x-1) + b(x+1)}{x^2 - 1} = \frac{(a+b)x + b-a}{x^2 - 1} = \frac{-(a+b)x + a-b}{1-x^2}$$

d'où cette expression coïncide avec celle de $h(x)$ pour $\begin{cases} a-b=1 \\ a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1/2 \\ b=-1/2 \end{cases}$

$$\text{AINSI} \quad \forall x \in \mathcal{D}_h \quad h(x) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \right)$$

En utilisant l'expression de $f^{(n)}$ trouvée au début de l'exercice, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{2} \left(\frac{1}{(x+1)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right)$$

4) f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ (produit de fonctions usuelles) et pour tout $x > 0$

$$f(x) = x^2 \ln(x) \quad ; \quad f'(x) = 2x \ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x} \quad ; \quad f^{(2)}(x) = 2 \ln(x) + 2x \times \frac{1}{x} + 1 \\ = 2x \ln(x) + x \quad \quad \quad = 2 \ln(x) + 3$$

si bien que $f^{(3)}(x) = \frac{2}{x} = 2f(x)$

On a donc

$$\forall x > 0 \quad \begin{cases} f^{(0)}(x) = x^2 \ln(x) \\ f^{(1)}(x) = 2x \ln(x) + x \\ f^{(2)}(x) = 2 \ln(x) + 3 \\ f^{(n+3)}(x) = \frac{2(-1)^n n!}{x^{n+1}} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

5) f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ (produit de fonctions usuelles) et pour tout $x \in \mathbb{R}$

Notons $p: x \mapsto x^2 + 1$ et $q: x \mapsto \sin(x)$. Alors $f = p \times q$ et l'on déduit de la formule de Leibniz que

$$f^{(n)} = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} p^{(\ell)} q^{(n-\ell)} \quad \binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{1} = n \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

avec $p^{(0)}(x) = x^2 + 1$, $p^{(1)}(x) = 2x$, $p^{(2)}(x) = 2$ et $p^{(\ell)} = 0$ pour $\ell \geq 3$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(x) = (x^2 + 1) \sin^{(n)}(x) + 2n x \sin^{(n-1)}(x) + n(n-1) \sin^{(n-2)}(x)$$

6) f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (produit de fonctions usuelles). On peut aussi noter avec la formule de Leibniz mais elle ne nous donne une somme de n termes, ce qui n'est pas très explicite

ASTUCE $\cos(x) = \operatorname{Re}(e^{ix})$ donc $l(x) = \operatorname{Re}(e^x e^{ix}) = \operatorname{Re}(e^{(1+i)x})$
 On va simplement dériver n fois $L: x \mapsto e^{(1+i)x}$ puis prendre
 la partie réelle

Trop facile: $\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R} \quad L^{(n)}(x) = (1+i)^n e^{(1+i)x}$
 or $1+i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$ donc $(1+i)^n = 2^{n/2} e^{i n \pi/4}$
 $\& \quad L^{(n)}(x) = 2^{n/2} e^x e^{i(x + n\pi/4)}$
 soit $l^{(n)}(x) = 2^{n/2} e^x \cos(x + n\pi/4)$

AINSI $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R} \quad l^{(n)}(x) = 2^{n/2} e^x \cos(x + n\pi/4)}$

EXO 4

Posons $f: x \mapsto x^n (1-x)^n$ sur $\mathbb{R}$.
 1) On a: $f(x) = x^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-x)^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} x^{n+k}$

or $\frac{\partial^n x^{n+k}}{\partial x^n} = (n+k)(n-1+k) \dots (1+k) x^k = \frac{(n+k)!}{k!} x^k = n! \binom{n+k}{k} x^k$

donc $f^{(n)}(x) = n! \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n+k}{k} \binom{n}{k} x^k \quad (\forall x) \quad (x^n \text{ pour } k=n)$

AVEC LA FORMULE DE LEIBNIZ

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\partial^k x^n}{\partial x^k} \frac{\partial^{n-k} (1-x)^n}{\partial x^{n-k}}$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \frac{n!}{k!} (-1)^{n-k} (1-x)^k$$

$$= n! \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 x^{n-k} (-1)^{n-k} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} (-x)^l$$

$$= n! \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^k (-1)^{n+l-k} \binom{n}{k}^2 \binom{k}{l} x^{n+l-k} \quad (\forall x) \quad (x^n \text{ pour } l=k)$$

2) (V1): $n! (-1)^n \binom{2n}{n} \quad (V2): n! (-1)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$

Les deux quantités étant identiques, on en déduit que

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

EX05

1). f est définie sur $\mathcal{D}_f =]0, +\infty[$ cf. présence de $\ln$

• Par quotient de limites $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ ($-\infty/0^+$)

Par croissance comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

• La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ (quotient de fonctions usuelles)
et

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = \frac{1/x \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

Ainsi $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) < 1 \Leftrightarrow 0 < x < e$
On en déduit le tableau de variations de f :

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	0

2). g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (cf. somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$)

• On a $g(x) \sim x^2/2$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$

• Pour $x \in \mathbb{R}$ $g'(x) = -\sin(x) + x$ et $g''(x) = -\cos(x) + 1 = 1 - \cos(x) \geq 0$
puisque $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

On en déduit les variations puis le signe de g

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g''(x)$	+	+	
$g'(x)$		$\nearrow 0 \searrow$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow 0 \nearrow$	$+\infty$

$$g'(0) = \sin 0 - 0 = 0$$

$$g(0) = \cos 0 - 1 = 0$$

On voit ainsi que $g(x) \geq 0$
soit $\cos(x) \geq 1 - x^2/2$
pour tout $x \in \mathbb{R}$

3). De même, la fonction h est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ par somme de fonctions usuelles $\mathcal{C}^\infty$.
On a en $+\infty$ et $-\infty$ $h(x) \sim x^3/6$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

Enfin $h'(x) = \cos(x) - 1 + x^2/2 = g(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	+
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow 0 \searrow$	$+\infty$

EX06

1) Pour $x > 0$, on a $f(x) = 1 - a_1 x^{-1} - \dots - a_n x^{1-n} - a_{n+1} x^{-n}$

De ce fait, $f'(x) = a_1 x^{-2} + 2a_2 x^{-3} + \dots + (n-1)a_n x^{-n} + na_{n+1} x^{-(n+1)} \geq 0$
puisque $a_i \geq 0$ pour tout $i \in [1, n+1]$.

Comme l'un de ces coefficients est non nul, on peut même affirmer que $f' > 0$
sur $]0, +\infty[$

• On obtient sans difficulté $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

• Notons $i = \max \{ j \in [1, n] / a_j \neq 0 \}$
On a alors $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -a_i x^{-i}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ puisque $a_i > 0$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	1

On en déduit le tableau de variations de f

2) Good! Le tableau de variations d'une bijection!
Appliquons le Théorème de la Bijection à la fonction f sur $]0, +\infty[$:

(1) la fonction f est continue (quotient de polynômes) sur $]0, +\infty[$

(2) la fonction f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

(3) $\lim_0 f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = 1$ donc $0 \in]\lim_0 f; \lim_{+\infty} f[$

On déduit alors du Thème de la Bijection qu'il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $f(\alpha) = 0$

Or $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^{-n} P(x) = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0$ pour tout $x > 0$

ANSI il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $P(\alpha) = 0$

EXO 7

Il faut que $\mathcal{L}(a) = \mathcal{L}(b) = 0$ soit $K = \mathcal{L}_x \frac{f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)}{(b-a)^2}$.

On utilise cette valeur de K pour définir la fonction $\mathcal{L}$ comme dans l'énoncé

Appliquons alors le théorème de Rolle à φ sur l'intervalle $[a, b]$

- φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$
- $\varphi(a) = \varphi(b)$

$\Rightarrow$ il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Or, pour tout $x \in [a, b]$

$$\varphi'(x) = -f'(x) - (b-x)f''(x) + f'(x) + k(b-x) = (b-x)(k - f''(x))$$

donc $\varphi'(c) = 0 \Leftrightarrow f''(c) = k$ puisque $b-c \neq 0$. La relation $\varphi(a) = 0$ peut alors s'écrire

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(c) \text{ avec } c \in]a, b[$$

EX08

1) Posons $\varphi: x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{si } x \in]a, b] \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases}$

- Comme $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = f'(a) = 0 = \varphi(a)$, la fonction φ est continue en a
- Elle est continue sur $]a, b]$ par quotient de fonctions continues, donc sur $[a, b]$
- Enfin, elle est dérivable sur $]a, b[$ comme quotient de fonctions dérivables

On peut ainsi lui appliquer le théorème de Rolle sur l'intervalle $[a, b]$

- φ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$
- $\varphi(a) = 0$ et $\varphi(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$ soit $\varphi(a) = \varphi(b)$

De ce fait, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = \frac{f'(c)(c-a) - (f(c) - f(a))}{(c-a)^2} = 0$

soit
$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} = \frac{f(a) - f(c)}{a - c}$$

2) Posons $\varphi: x \mapsto e^x f(x)$ sur $[a, b]$

- φ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ par produit
- $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ puisque $f(a) = f(b) = 0$

On déduit du Théorème de Rolle qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$
soit $e^c f'(c) - e^c f(c) = e^c (f'(c) - f(c)) = 0$
d'où

$$\boxed{f'(c) = f(c)}$$

EXO 9

f est deux fois dérivable donc f et f' sont continues
De plus :

- f est continue et dérivable sur $[x_0, x_1]$
- $f(x_0) = f(x_1)$

donc il existe d'après le Théorème de Rolle $a \in]x_0, x_1[$ tel que $f'(a) = 0$

De même, il existe $b \in]x_1, x_2[$ tel que $f'(b) = 0$

Enfin

- f' est continue et dérivable sur $[a, b]$
- $f'(a) = f'(b) = 0$

donc il existe d'après le Théorème de Rolle un réel $c \in]a, b[$ tq $f''(c) = 0$

Comme $x_0 < a < x_1 < b < x_2$, on a bien $x_0 < c < x_2$

EXO 10

Il faut utiliser l'inégalité des Accroissements finis :

si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et que $|f'| \leq K$ sur $]a, b[$
alors

$$\boxed{|f(b) - f(a)| \leq K |b - a|}$$

$$1) \begin{cases} f: x \mapsto \sqrt{x} \text{ sur } [10000; +\infty[\text{ de classe } \mathcal{C}^\infty \\ f': x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ et } |f'(x)| \leq \frac{1}{200} \text{ pour tout } x \geq 10000 \end{cases}$$

$$\bullet a = 10000 \text{ et } b = 10001$$

Les conditions d'application du TAF et de l'IAF sont réunies :

$|f(a) - f(b)| = \sqrt{10001} - 100$, $|b - a| = 1$ donc la Majoration recherchée est

$$\boxed{\sqrt{10001} - 100 \leq \frac{1}{200}}$$

$$2) \begin{cases} f: x \mapsto \frac{1}{x^2} \text{ sur } [0,9; +\infty[\text{ de classe } \mathcal{C}^\infty \\ f'(x) = -\frac{2}{x^3} \text{ et } |f'(x)| \leq \frac{2}{(0,9)^3} \leq 3 \text{ car } \left(\frac{9}{10}\right)^3 = \frac{729}{1000} \geq \frac{2}{3} \\ \bullet a = 1 \text{ et } b = 0,999 \end{cases}$$

$$\text{IAF: } |f(b) - f(a)| = \frac{1}{0,999^2} - 1 \text{ et } |b - a| = \frac{1}{1000} \text{ donc}$$

$$\boxed{0 \leq \frac{1}{0,999^2} - 1 \leq \frac{3}{1000}}$$

$$3) \begin{cases} f = \cos \text{ de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R} \\ f' = -\sin \text{ et } |f'| \leq 1 \text{ sur } \mathbb{R} \\ \bullet a = 1 \text{ et } b = \pi/3 \end{cases}$$

$$\text{IAF: } |f(b) - f(a)| = |\cos 1 - \cos \pi/3| = |\cos(1) - 1/2| \text{ et } |a - b| = \frac{\pi - 3}{3}$$

donc

$$\boxed{|\cos(1) - 1/2| \leq \frac{\pi - 3}{3} \leq 0,05 \text{ car } 3,14 < \pi < 3,15}$$

EXO 11

Avec le binôme de Newton: $(X+1)^d = X^d + dX^{d-1} + \dots$

$$\text{donc } (X+1)^d - X^d = dX^{d-1} + \dots \in \mathbb{R}_{d-1}[X]$$

De m, $Q(X+1) - Q(X) \in \mathbb{R}_{d-2}[X]$

$$\text{donc } P(X+1) - P(X) = adX^{d-1} + R \text{ avec } R \in \mathbb{R}_{d-2}[X]$$

On en déduit que

$$P(m+1) - P(m) \sim ad m^{d-1}$$

EXO 12

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin'(x)| \leq 1$

TAF: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists c \text{ entre } x \text{ et } y, |\sin(x) - \sin(y)| = |\sin'(c)| |x - y|$
d'où

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$$

2) Exactement pareil

3) • Pour $x \geq 0$: on applique le TAF sur $[0, x]$

$$\exists \text{ existe } c \in [0, x] \text{ tq } e^x - e^0 = (x - 0)e^c \geq x \text{ soit } e^x \geq 1 + x$$

• Pour $x \leq 0$: on applique le TAF sur $[x, 0]$

$$\exists \text{ existe } c \in [x, 0] \text{ tq } e^0 - e^x = \underbrace{(0 - x)}_{\geq 0} \underbrace{e^c}_{\leq 1} \leq -x \text{ soit } 1 - e^x \leq -x \text{ soit } e^x \geq 1 + x$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$$

EXO 13

1) • TAF sur $[0, x]$: $\exists c \in]0, x[$ $\ln(1+x) - \ln(1+0) = x \times \frac{1}{1+c} < x$

$$\text{d'où } \forall x > 0, \ln(1+x) < x$$

• Posons $f: x \mapsto \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$ sur $[0, +\infty[$

$$\text{Alors } f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1 - (1+x) + x^2 + x}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} \geq 0$$

et comme $f(0) = 0$, on a bien

$$\forall x > 0, f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} > 0$$

AINSI

$$\forall x > 0, x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$$

2) TAF sur $[0, \pi]$: $\exists c \in]0, \pi[, \sin x - \sin 0 = \cos(c) \times (x - 0) < x$
 d'où $\sin(x) < x$ pour tout $x > 0$

• Posons $f: x \mapsto \sin(x) - \frac{2x}{\pi}$ sur $[0, \pi/2]$
 On a $f'(x) = \cos(x) - \frac{2}{\pi}$ qui s'annule sur $(0, \pi/2)$

x	0	α	$\pi/2$
$f'(x)$	$1 - \frac{2}{\pi} \rightarrow 0 \rightarrow -\frac{2}{\pi}$		
$f(x)$	+	0	-
$f(x)$	$f(0)$		$f(\pi/2)$

Lemme (1) f' est continue sur $[0, \pi/2]$
 et que (2) f' est strictement monotone
 (3) $f(\pi/2) < 0 < f(0)$

Alors il existe un unique $\alpha \in]0, \pi/2[$ tq $f'(x) = 0$
 d'après le Théorème de la Bijection

$f(0) = 0$ $f(\pi/2) = 1 - \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi}{2} = 1 - 1 = 0$
 Le tableau de variations prouve que $f(x) \geq 0$
 soit $\sin(x) \geq \frac{2x}{\pi}$ pour tout $x \in [0, \pi/2]$

AINSI

$$\forall x \in [0, \pi/2] \quad \frac{2x}{\pi} \leq \sin(x) \leq x$$

EXO 15

Il suffit de suivre la méthode proposée ! Pour montrer qu'une fonction f admet un unique point fixe sur un intervalle I , on étudie $g: x \mapsto f(x) - x$

1) Soient $f: x \mapsto 2 + \ln(x)$ et $g: x \mapsto f(x) - x = 2 + \ln(x) - x$ sur $I = [2, 4]$

A/ POINT FIXE (2)

(1) La fonction est continue sur I (somme de fonctions continues)

(2) De même, elle est dérivable et $g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} < 0$ sur $[2, 4]$
 donc g est strictement décroissante sur I

(3) Enfin $g(2) = \ln(2) > 0$ et $g(4) = \ln(4) - 2 = 2\ln 2 - 2 = 2(\ln 2 - 1) < 0$
 donc $0 \in]g(4); g(2)[$

On éduit du Théorème de la Bijection qu'il existe un unique $c \in I$ tq $g(c) = 0$

Or $g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) - c = 0 \Leftrightarrow f(c) = c$
Ainsi

La fonction f admet un unique point fixe $c \in I$

B/ $\forall n \in \mathbb{N}$

• Pour montrer ceci par récurrence, il faut prouver que $f(x) \in I$ pour $x \in I$
Or, f est croissante sur I (ln ↑) donc on a :

$$x \in I \Rightarrow 2 \leq x \leq 4 \Rightarrow f(2) \leq f(x) \leq f(4)$$

$$\Rightarrow 2 < 2 + \ln(2) \leq f(x) \leq 2 + \ln(4) < 4$$

$$\text{car } \ln(2) > 0$$

$$\text{car } \ln(4) = 2\ln 2 < 2$$

Ainsi $\forall x \in I, f(x) \in I$ (1)

• Passons maintenant $P(n)$: " $\forall n \in \mathbb{N}$ pour $n \in \mathbb{N}$ "

(1) INIT $n_0 = 2 \in I$ donc $P(0)$ est vraie

(2) HERED soit $n \in \mathbb{N}$; on suppose que $P(n)$ est vraie

Alors $\forall n \in I$ d'où $f(n) \in I$ d'après (1)

soit $n_{n+1} \in I$

Ainsi $P(n+1)$ est vraie

(3) CONCL on déduit du principe de récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$,
soit

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall n \in I \quad (2)$$

C/ TAF sur I

La fonction f est dérivable sur I et $|f'(x)| = \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$ pour tout $x \in I$
TAF: pour tout $x \in I$, il existe $c \in I$ tel que $f(x) - f(c) = (x - c) f'(c)$
soit

$$|f(x) - f(c)| = |x - c| \times |f'(c)| \leq \frac{|x - c|}{2}$$

Ainsi

$$\forall x \in I \quad |f(x) - f(c)| \leq \frac{|x - c|}{2} \quad (3)$$

D/ CONVERGENCE

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in I$ d'après (2)
d'où $|f(u_n) - f(c)| \leq \frac{1}{2} |u_n - c|$ d'après (3)
soit $|u_{n+1} - c| \leq \frac{1}{2} |u_n - c|$ (4)

On va en déduire que $|u_n - c| \leq |u_0 - c| / 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
Posons $P(n)$: " $|u_n - c| \leq |u_0 - c| / 2^n$ " pour $n \in \mathbb{N}$

(1) INIT $|u_0 - c| \leq |u_0 - c|$ donc $P(0)$ est vraie

(2) HÉRÉD soit $n \in \mathbb{N}$; on suppose que $P(n)$ est vraie

$$\text{Alors } |u_n - c| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - c|$$

$$\text{d'où } |u_{n+1} - c| \leq \frac{1}{2} |u_n - c| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - c| \text{ d'après (4)}$$

soit $P(n+1)$ est vraie

(3) CONCL d'après le principe de récurrence, la proposition $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - c| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - c|$$

On déduit alors du Théorème des Gendarmes que (u_n) converge vers c
d'où

$$\boxed{\lim u_n = c} \quad \text{avec } c \text{ le point fixe de } f.$$

2) On procède exactement de la même façon... la correction sera plus concise, je donne juste les résultats et les grandes étapes.

Soit $f: x \mapsto \cos(x)$ et $g: x \mapsto \cos(x) - x$ sur $I = [0, 1]$

A/ POINT FIXE DE f

(1) g continue sur $[0, 1]$
(2) g str $\downarrow$ sur $[0, 1]$
(3) $g(1) < 0 < g(0)$

} $\exists ! c \in [0, 1], g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = c$
Ainsi f admet un unique point fixe c sur $[0, 1]$

B/ $\mu_n \in I$

$\cos$ est un fct^o $\downarrow$ sur I donc $0 \leq \cos(1) \leq \cos(x) \leq \cos(0) = 1$ pour tout $x \in I$
si bien que

$$\forall x \in I \quad f(x) \in I$$

Comme $\mu_0 \in I$, une récurrence immédiate permet de montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mu_n \in I$$

C/ TAF sur I

f est dérivable sur I et $|f'(x)| = \sin(x) \leq \sin(1)$ pour tout $x \in I$
TAF: pour tout $x \in I$, il existe $d \in I$ tq $f(x) - f(c) = f'(d)(x - c)$
si bien que

$$\forall x \in I \quad |f(x) - f(c)| \leq \sin(1) |x - c|$$

D/ CONVERGENCE

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu_n \in I$ donc $|f(\mu_n) - f(c)| \leq \sin(1) \times |\mu_n - c|$
soit $|\mu_{n+1} - c| \leq \sin(1) \times |\mu_n - c|$

Une récurrence immédiate permet de prouver que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |\mu_n - c| \leq \sin(1)^n |\mu_0 - c|$$

On déduit alors du Théorème des Gendarmes que $\lim \mu_n = c$
avec c l'unique point fixe de f .

3) Soit $f: x \mapsto \frac{1}{x^2+1} + 1$ et $g: x \mapsto f(x) - x = \frac{1}{x^2+1} + 1 - x$ sur $I = [1, 2]$

A/ POINT FIXE DE f

(1) g est continue sur $[1, 2]$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{car quotient polynômes} \\ \text{Théorème Bijection:} \end{array} \right.$
(2) $g(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} - 1 < 0$ donc $g \downarrow$ str sur $[1, 2]$ $\left\{ \begin{array}{l} \exists! c \in [1, 2], g(c) = 0 \end{array} \right.$
(3) $g(1) = \frac{1}{2}$ et $g(2) = -\frac{4}{5}$ donc $g(2) < 0 < g(1)$

AINSI:

la fonction f admet un unique point fixe c sur $[1, 2]$

B/ $\forall n \in \mathbb{I}$

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} < 0 \text{ donc } f \downarrow \text{ str sur } [1, 2]$$

$$\text{Ainsi } f(2) \leq f(x) \leq f(1) \text{ pour tout } x \in [1, 2]$$

$$\text{Or } f(1) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} < 2 \text{ et } f(2) = 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5} > 1$$

$$\text{d'où } 1 \leq f(2) \leq f(x) \leq f(1) \leq 2 \text{ pour tout } x \in [1, 2]$$

soit

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{I}, f(x) \in \mathbb{I}}$$

Une récurrence immédiate permet de montrer que comme $u_1 = \frac{1}{u_0^2+1} + 1 \in [1, 2]$
alors

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n \in \mathbb{I}}$$

C/ TAF sur $\mathbb{I}$

$$f \text{ dérivable sur } [1, 2] \text{ et } |f'(x)| = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$\text{De plus } x^2+1 \geq 1+1=2 \text{ donc}$$

$$\text{on a } |f'(x)| \leq \frac{1}{2} \text{ pour tout } x \in [1, 2]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Or } (x-1)^2 = x^2+1-2x \geq 0 \\ \text{donc } 2x \leq x^2+1 \\ \text{d'où } |f'(x)| \leq \frac{1}{x^2+1} \end{array} \right.$$

TAF: pour tout $x \in \mathbb{I}$, il existe $d \in \mathbb{I}$ tel que $f(x) - f(c) = f'(d)(x-c)$

$$\text{d'où } \boxed{\forall x \in \mathbb{I}, |f(x) - f(c)| \leq \frac{1}{2} |x-c|}$$

D/ CONVERGENCE

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, u_n \in \mathbb{I} \text{ donc } |f(u_n) - f(c)| \leq \frac{1}{2} |u_n - c|$$

$$\text{soit } |u_{n+1} - c| \leq \frac{1}{2} |u_n - c|$$

Une récurrence immédiate permet de prouver que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |u_n - c| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - c|}$$

On déduit alors du théorème des Gendarmes que $\lim u_n = c$
avec c l'unique point fixe de f sur $[1, 2]$