Espaces vectoriels : cadre de la dimension finie

Table des matières

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne l'un des deux corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel différent de l'espace nul $\{0_E\}$.

Le but de ce chapitre est d'appréhender le *nombre de degrés de liberté* dans un espace vectoriel.

- ⋆ Dans une droite vectorielle :
$$\mathscr{D}_v = \left\{ \lambda v \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{K} \right\} \qquad (\text{où } v \in E \setminus \{0_E\}),$$
il y a un seul « degré de liberté » (on se déplace sur celle-ci dans la direction du vecteur v).
- ⋆ Dans un plan vectoriel :
$$\mathscr{P}_{u,v} = \left\{ \lambda u + \mu v \,\middle|\, \lambda, \mu \in \mathbb{K} \right\} \qquad (\text{où } (u, v) \text{ est une famille libre de } E),$$
il y a deux « degrés de liberté » (ceux que définissent les deux vecteurs u et v).

Définition (dimension finie) ⋆ On dit que l'espace vectoriel E est de *dimension finie* s'il admet une famille génératrice finie, *i.e.* s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $e_1, \ldots, e_n \in E$ tels que :
$$E = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$$

⋆ Si E n'est pas de dimension finie, on dit qu'il est de *dimension infinie* et on pose $\dim(E) = \infty$.

Exemple ⋆ Les espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont de dimension finie.

Démonstration On sait que :

$$\mathbb{K}^n = \text{Vect}\big((1,0,\dots,0),(0,1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1)\big), \qquad \mathbb{K}_n[X] = \text{Vect}(1,X,\dots,X^n)$$

et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = \text{Vect}\big(E_{i,j}\big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$. ■

⋆ Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathscr{P} = \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\big|\, x-y-z=0\big\}$ est de dimension finie.

Démonstration Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned}(x,y,z)\in\mathscr{P} \iff x-y-z=0 \iff x=y+z &\iff (x,y,z)=(y+z,y,z)\\ &\iff (x,y,z)=y(1,1,0)+z(1,0,1)\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathscr{P} = \text{Vect}\big((1,1,0),(1,0,1)\big)$$

et donc $\mathscr{P}$ est de dimension finie. ■

⋆ L'espace $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.

Démonstration Par l'absurde, supposons que $\mathbb{K}[X]$ est de dimension finie. Il existe alors $n\in\mathbb{N}^*$ et $P_1,\dots,P_n\in\mathbb{K}[X]\setminus\{0_{\mathbb{K}[X]}\}$ tels que $\mathbb{K}[X]=\text{Vect}(P_1,\dots,P_n)$. En posant :

$$d = \max(\deg(P_1),\dots,\deg(P_n))\in\mathbb{N},$$

on a l'inclusion (puisque $\mathbb{K}_d[X]$ est un espace vectoriel) :

$$\text{Vect}(P_1,\dots,P_n)\subset\mathbb{K}_d[X] \qquad i.e. \qquad \mathbb{K}[X]\subset\mathbb{K}_d[X],$$

ce qui est absurde car $X^{d+1}\in\mathbb{K}[X]\setminus\mathbb{K}_d[X]$. Ainsi, $\dim(\mathbb{K}[X])=\infty$. ■

I – Un résultat préliminaire

Lemme Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $\mathscr{F}=(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, $\mathscr{F}'=(e'_i)_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ deux familles de vecteurs de E telles que :

$$\forall i\in[\![1,n+1]\!], \qquad e'_i\in\text{Vect}(\mathscr{F})$$

Alors la famille $\mathscr{F}'$ est liée.

Démonstration On utilise un raisonnement par récurrence sur le nombre de vecteurs. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on considère la proposition $\mathscr{P}_n$ « pour toutes familles $\mathscr{F}=(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, $\mathscr{F}'=(e'_i)_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ de vecteurs de E telles que :

$$\forall i\in[\![1,n+1]\!], \qquad e'_i\in\text{Vect}(\mathscr{F}),$$

la famille $\mathscr{F}'$ est liée ».

⋆ **Initialisation :** soient e_1, e'_1, e_2 trois vecteurs de E tels que $e'_1\in\text{Vect}(e_1)$ et $e'_2\in\text{Vect}(e_1)$. Alors il existe $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$ tels que :

$$e'_1=\lambda e_1 \qquad \text{et} \qquad e'_2=\mu e_1$$

On distingue deux cas.

— Si $\lambda=0$, alors $e'_1=0_E=0\cdot e'_2$ donc la famille (e'_1,e'_2) est liée.

— Si $\lambda\neq 0$, alors :

$$e'_2=\mu e_1=\frac{\mu}{\lambda}(\lambda e_1)=\frac{\mu}{\lambda}e'_1$$

et donc la famille (e'_1,e'_2) est liée.

Dans les deux cas, la famille (e'_1,e'_2) est liée et la proposition $\mathscr{P}_1$ est vraie.

⋆ **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}_n$ soit vraie. Soient $\mathscr{F} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ et $\mathscr{F}' = (e'_i)_{1\leqslant i\leqslant n+2}$ des familles de vecteurs de E telles que :

$$\forall i \in [\![1, n+2]\!], \qquad e'_i \in \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$$

Pour tout $i \in [\![1, n+2]\!]$, il existe donc une famille $(a_{i,j})_{1\leqslant j\leqslant n+1} \in \mathbb{K}^{n+1}$ telle que :

$$e'_i = \sum_{j=1}^{n+1} a_{i,j} e_i$$

On distingue deux cas.

— Si pour tout $i \in [\![1, n+2]\!]$, on a $a_{i,n+1} = 0$, alors :

$$e'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} e_i \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$$

et donc, en particulier,

$$\forall i \in [\![1, n+1]\!], \qquad e'_i \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$$

Par hypothèse de récurrence, la famille $(e'_1, \ldots, e'_{n+1})$ est liée. La famille $\mathscr{F}'$, qui en est une sur-famille, est donc également liée.

— Sinon, il existe un entier $i_0 \in [\![1, n+2]\!]$ tel que $a_{i_0,n+1} \neq 0$. Quitte à renuméroter les vecteurs, on peut supposer que $i_0 = n+2$.

Pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, on pose :

$$e''_i = e'_i - \frac{a_{i,n+1}}{a_{n+2,n+1}} e'_{n+2},$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} e''_i = \sum_{j=1}^{n+1} a_{i,j} e_j - \frac{a_{i,n+1}}{a_{n+2,n+1}} \sum_{j=1}^{n+1} a_{n+2,j} e_j &= \sum_{j=1}^{n+1} \underbrace{\left(a_{i,j} - \frac{a_{i,n+1}}{a_{n+2,n+1}} a_{n+2,j} \right)}_{=0 \text{ si } j=n+1} e_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(a_{i,j} - \frac{a_{i,n+1}}{a_{n+2,n+1}} a_{n+2,j} \right) e_j \\ &\in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n) \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, la famille $(e''_1, \ldots, e''_{n+1})$ est liée. Il existe donc une famille de scalaires $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0_{\mathbb{K}^{n+1}}\}$ tel que :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i e''_i = 0_E \qquad \textit{i.e.} \qquad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i (e'_i - \mu_i e'_{n+2}) = 0_E \qquad \left(\text{en posant } \mu_i = \frac{a_{i,n+1}}{a_{n+2,n+1}}\right)$$

soit encore :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e'_i + \left(-\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \mu_i \right) e'_{n+2} = 0_E$$

L'un des scalaires λ_i est non nul dans la somme de gauche donc la famille $\mathscr{F}'$ est liée et la proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Le lemme est donc démontré par principe de récurrence simple. ■

On en déduit le résultat suivant.

Corollaire Soit E un espace vectoriel de dimension finie engendré par une famille de $n \in \mathbb{N}^*$ vecteurs. Alors toute famille libre de E est finie et est constituée d'au plus n vecteurs.

Démonstration Soit $\mathscr{L}$ une famille libre de vecteurs de E. Par l'absurde, supposons que $\mathscr{L}$ soit constituée d'au moins $n+1$ vecteurs et notons $\mathscr{L}_0$ une sous-famille de $\mathscr{L}$ constituée de $n+1$ vecteurs. Alors $\mathscr{L}_0$ est libre (puisque $\mathscr{L}$ l'est). Par ailleurs, si $(e'_1, \dots, e'_n)$ est une famille génératrice de E, alors le lemme appliqué aux familles $\mathscr{L}_0$ et $(e'_1, \dots, e'_n)$ montre que $\mathscr{L}_0$ est liée, ce qui est absurde. ∎

Exemple
- ⋆ Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $\big((1,1,1),(0,-1,2),(1,2,3),(2,-10,2)\big)$ est liée car on sait que $\mathbb{R}^3$ est engendré par la famille de trois vecteurs $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$.
- ⋆ Dans $\mathbb{R}_2[X]$, la famille $(X^2-X, X, 1-X, X^2+X+1)$ est liée car on sait que $\mathbb{R}_2[X]$ est engendré par la famille de trois vecteurs $(1, X, X^2)$.

II – Algorithme de la base incomplète et conséquences

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie (et différent de l'espace nul).

1) Algorithme de la base incomplète

On peut montrer que, dans tout espace de dimension finie, il existe une base de cet espace.

Théorème (algorithme de la base incomplète) Soient $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille génératrice de E et $k \in [\![1,n]\!]$. On suppose que la famille $(e_i)_{i\in[\![1,k]\!]}$ est libre. Alors il existe une partie J de $[\![1,n]\!]$ qui contient $[\![1,k]\!]$ telle que $(e_i)_{i\in J}$ soit une base de E.

Démonstration Considérons l'ensemble :

$$\mathscr{E} = \big\{\mathrm{Card}(A) \;\big|\; [\![1,k]\!] \subset A \subset [\![1,n]\!] \text{ et } (e_i)_{i\in I} \text{ est libre}\big\}$$

L'ensemble $\mathscr{E}$ est une partie de $\mathbb{N}$ qui est majorée par n (car un élément de A est un sous-ensemble de $[\![1,n]\!]$). De plus, $\mathscr{E}$ est non vide (car $k \in \mathscr{E}$ par hypothèse). On peut donc considérer le maximum m de $\mathscr{E}$ et il existe aussi une partie J de $[\![1,n]\!]$, de cardinal m qui contient $[\![1,k]\!]$ et telle que $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in J}$ soit libre.

Montrons maintenant que $\mathscr{B}$ est une famille génératrice de E. Soit $x \in E$. Comme $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une famille génératrice de E, il existe $(\lambda_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ tel que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{i\in J} \lambda_i e_i + \sum_{i\in[\![1,n]\!]\setminus J} \lambda_i e_i$$

Soit $i \in [\![1,n]\!] \setminus J$. Alors $\mathscr{B}_i = (\mathscr{B}, e_i)$ n'est pas libre (car $\mathrm{Card}(\mathscr{B}_i) = m+1 > m$ et par définition de m) donc $e_i \in \mathrm{Vect}(\mathscr{B})$. Ainsi, $x \in \mathrm{Vect}(\mathscr{B})$, d'où le résultat. ∎

Exemple La famille $\big((1,-5,7),(2,6,8)\big)$ est une base de :

$$F = \mathrm{Vect}\big((1,-5,7),(2,6,8),(3,1,15),(1,11,1)\big)$$

Démonstration On utilise l'algorithme de la base incomplète.
- ⋆ La famille $\big((1,-5,7)\big)$ est libre car elle est constituée d'un unique vecteur non nul.
- ⋆ La famille $\big((1,-5,7),(2,6,8)\big)$ est libre. En effet, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\alpha(1,-5,7)+\beta(2,6,8) = 0_{\mathbb{R}^3} &\iff \left\{\begin{array}{rcrcll} \alpha & + & 2\beta & = & 0 & \mathrm{L}_1 \\ -5\alpha & + & 6\beta & = & 0 & \mathrm{L}_2 \\ 8\alpha & + & 8\beta & = & 0 & \mathrm{L}_3 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcll} \alpha & + & 2\beta & = & 0 & \mathrm{L}_1 \\ & & 16\beta & = & 0 & \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 + 5\,\mathrm{L}_1 \\ 8\alpha & + & 8\beta & = & 0 & \mathrm{L}_3 \end{array}\right. \\
&\iff \alpha = \beta = 0
\end{aligned}$$

- ⋆ On remarque que :

$$(3,1,15) = (1,-5,7)+(2,6,8) \qquad \text{et} \qquad (1,11,1) = -(1,-5,7)+(2,6,8)$$

  donc les familles $\big((1,-5,7),(2,6,8),(3,1,15)\big)$ et $\big((1,-5,7),(2,6,8),(1,11,1)\big)$ sont liées.

On en déduit le résultat annoncé. ∎

2) Théorèmes de la base incomplète et de la base extraite

Les deux résultats suivants sont essentiels.

Théorème (de la base incomplète) Toute famille libre de vecteurs de E peut être complétée en une base de E.

Démonstration Soit $\mathscr{L}$ une famille libre de vecteurs de E. D'après le corollaire précédent, cette famille est constituée d'un nombre fini de vecteurs. Posons alors $k = \text{Card}(\mathscr{L})$ et notons $e_1, \ldots, e_k \in E$ les vecteurs de cette famille. Soit $\mathscr{G} = (e_{k+1}, \ldots, e_n)$ une famille génératrice de E (une telle famille existe puisque E est supposé de dimension finie). On considère alors la famille de vecteurs de E suivante :

$$\mathscr{F} = (e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n)$$

Comme $\mathscr{F}$ est une sur-famille de $\mathscr{G}$, la famille $\mathscr{F}$ est génératrice de E. En appliquant l'algorithme de la base incomplète, on obtient une base de E dont les k premiers vecteurs sont ceux de $\mathscr{L}$. ■

Théorème (de la base extraite) De toute famille génératrice de E, on peut en extraire une base.

Démonstration Soit $\mathscr{G}$ une famille génératrice finie de E. Comme $E \neq \{0_E\}$, l'un des vecteurs x de la famille $\mathscr{G}$ est non nul. On applique alors l'algorithme de la base incomplète à la sous-famille libre (x) de $\mathscr{G}$; n obtient une sous-famille de $\mathscr{G}$ qui est une base de E. ■

Remarque : tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie admet donc une base.

✎✎✎ **Exercice** Déterminer une base des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivants :

1. $A = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \,|\, P(0) + P(1) = 0\}$
2. $B = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & 0 & a+b \\ 0 & b+c & 0 \\ a+b & 0 & a+b \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

Une solution.

1. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que $P = aX^2 + bX + c$. Alors :

$$\begin{aligned} P \in A \iff P(0) + P(1) = 0 \iff a + b + 2c = 0 &\iff a = -b - 2c \\ &\iff P = (-b-2c)X^2 + bX + c \\ &\iff P = b(X - X^2) + c(1 - 2X^2) \\ &\iff P \in \text{Vect}(X - X^2, 1 - 2X^2) \end{aligned}$$

On a donc :

$$A = \text{Vect}(X - X^2, 1 - 2X^2)$$

La famille $(X - X^2, 1 - 2X^2)$ est génératrice de A. Montrons maintenant que cette famille est libre. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \alpha(X - X^2) + \beta(1 - 2X^2) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} &\iff \beta + \alpha X + (-\alpha - 2\beta)X^2 = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{ccc} \beta & = & 0 \\ \alpha & = & 0 \\ -\alpha - 2\beta & = & 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

car la famille $(1, X, X^2)$ est libre. On a donc $\alpha = \beta = 0$. Ainsi, la famille $(X - X^2, 1 - 2X^2)$ est libre. Finalement, cette famille est une base de A.

2. On a :

$$\begin{aligned} B &= \left\{ a\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} \,\middle|\, a,b,c\in\mathbb{R}\right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right) \qquad \text{car} \qquad \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} \end{aligned}$$

En posant $M = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, la famille (M,N) est génératrice de B. Elle est de plus libre car, pour tous $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, on a :

$$\alpha M + \beta N = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \iff \begin{pmatrix}\alpha&0&\alpha\\0&\beta&0\\\alpha&0&\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \iff \alpha=\beta=0$$

Une base de B est donc la famille (M,N).

3) Définition de la dimension

Le résultat suivant va nous permettre de définir la notion de dimension.

Théorème (nombre de vecteurs d'une base) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Toutes les bases de E ont le même nombre (fini) de vecteurs.

Démonstration Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Les deux familles sont libres donc de cardinal fini d'après le corollaire.

- ⋆ Comme $\mathscr{B}$ est libre et $\mathscr{B}'$ est génératrice de E, on a $\mathrm{Card}(\mathscr{B}) \leqslant \mathrm{Card}(\mathscr{B}')$ (on utilise à nouveau le corollaire).
- ⋆ En échangeant les rôles de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$, on a aussi $\mathrm{Card}(\mathscr{B}') \leqslant \mathrm{Card}(\mathscr{B})$

Par antisymétrie de la relation $\leqslant$, on a l'égalité $\mathrm{Card}(\mathscr{B}) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}')$. ■

On peut enfin définir la notion centrale du chapitre.

Définition (dimension d'un espace vectoriel de dimension finie) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On appelle *dimension de* E, notée $\dim(E)$, le cardinal d'une base quelconque de E.

Remarques :

- ⋆ Soit $v\in E\setminus\{0_E\}$ et :
$$\mathscr{D}_v = \left\{\lambda v \,\middle|\, \lambda\in\mathbb{K}\right\} = \mathrm{Vect}(v)$$
La droite vectorielle $\mathscr{D}_v$ est de dimension 1 (une base de $\mathscr{D}_v$ étant (v)).
- ⋆ Soient u et v deux vecteurs de E tels que la famille (u,v) soit libre et :
$$\mathscr{P}_{u,v} = \left\{\lambda u + \mu v \,\middle|\, \lambda,\mu\in\mathbb{K}\right\} = \mathrm{Vect}(u,v)$$
Le plan vectoriel $\mathscr{P}_{u,v})$ est de dimension 2 (une base de $\mathscr{P}_{u,v}$ étant (u,v)).

- ⋆ On a $\{0_E\} = \text{Vect}(\varnothing)$ et $\varnothing$ est une famille libre et génératrice de $\{0_E\}$ donc $\{0_E\}$ est de dimension finie égale à 0.
- ⋆ La dimension d'un espace de dimension finie dépend en fait du corps de base. Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{C}$.
  - — On peut considérer que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Dans ce cas, une base de $\mathbb{C}$ est $(1, i)$ et donc la dimension de $\mathbb{C}$ est égale à 2. On note $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$.
  - — Vu cette fois comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, une base de $\mathbb{C}$ est (1) et donc $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$.
- ⋆ L'espace vectoriel nul $E = \{0_E\}$ est de dimension 0 et une base est la famille $\varnothing$.

Démonstration On a :

$$\text{Vect}(\varnothing) = \bigcap_{\substack{F \text{ SEV de } E \\ \varnothing \subset F}} F = \{0_E\}$$

En effet, $\{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E contenant $\{0_E\}$ donc $\text{Vect}(\varnothing) \subset \{0_E\}$, et l'inclusion réciproque est immédiate. Ainsi, la famille $\varnothing$ est génératrice de $\{0_E\}$.
Ensuite, dire que la famille $\varnothing$ est liée, c'est dire qu'il existe un élément de $\varnothing$ qui s'exprime comme combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille, ce qui n'est pas le cas par définition de $\varnothing$; il s'agit donc d'une famille libre. Ainsi, $\varnothing$ est une base de $\{0_E\}$ est donc l'espace nul est de dimension 0. ■

4) Conséquences sur les familles libres et génératrices

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition (cardinal d'une famille libre, d'une famille génératrice) ⋆ Toute famille libre de vecteurs de E comporte au plus n vecteurs.

- ⋆ Toute famille génératrice finie de vecteurs de E comporte au moins n vecteurs.

Démonstration ⋆ Il suffit d'appliquer le corollaire.

- ⋆ Soit $\mathscr{G}$ une famille génératrice finie de E. D'après le théorème de la base extraite, on peut en extraire une base. Cette base contient n vecteurs, donc $\mathscr{G}$ contient bien au moins n vecteurs. ■

Exemple ⋆ La famille $\big((1,1),(1,2),(1,3)\big)$ n'est pas libre dans $\mathbb{R}^2$.

- ⋆ La famille $(X^2 - X, X)$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.

Le résultat suivant est très utile en pratique.

Proposition ⋆ Si $\mathscr{L}$ est une famille libre de E de cardinal n, alors $\mathscr{L}$ est une base de E.

- ⋆ Si $\mathscr{G}$ est une famille génératrice de E de cardinal n, alors $\mathscr{G}$ est une base de E.

Démonstration ⋆ Soit $\mathscr{L}$ est une famille libre de E de cardinal n. On peut compléter (d'après le théorème de la base incomplète) $\mathscr{L}$ en une base de E qui doit être de cardinal n. Comme $\mathscr{L}$ possède déjà n vecteurs, il s'agit bien d'une base de E.

- ⋆ Soit $\mathscr{G}$ est une famille génératrice de E de cardinal n. D'après le théorème de la base extraite, on peut extraire de $\mathscr{G}$ une base de E. Pour la même raison de cardinalité, $\mathscr{G}$ est une base de E. ■

Exemple La famille $\mathscr{B} = \big((-1,1,1),(0,1,0),(1,2,3)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration La famille $\mathscr{B}$ est constituée de 3 vecteurs et $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3. Pour montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, il suffit donc de montrer que cette famille est libre (ce que l'on vérifie aisément). ■

5) Dimension des espaces vectoriels usuels

Proposition ⋆ Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont de dimension finie égales à :

$$\dim(\mathbb{K}^n) = n, \qquad \dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1 \qquad \text{et} \qquad \dim(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$$

En particulier, $\dim_{\mathbb{K}}(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})) = n^2$.

- ⋆ Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et $a \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$. L'ensemble des fonctions $y \in \mathscr{D}(I, \mathbb{K})$ solutions de l'équation différentielle linéaire homogène $y' + a(x)y = 0$ est une droite vectorielle.
- ⋆ Soient $a, b \in \mathbb{K}$. L'ensemble des solutions $y \in \mathscr{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ de l'équation différentielle linéaire homogène $y'' + ay' + by = 0$ est un plan vectoriel.
- ⋆ Soient $a, b \in \mathbb{K}$. L'ensemble des suites $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

est un plan vectoriel.

Démonstration ⋆ On sait effectivement que des bases de chacun de ces espaces vectoriels sont respectivement :

$$\big((\delta_{k,\ell})_{1\leqslant \ell\leqslant n}\big)_{1\leqslant k\leqslant n}, \qquad (X^k)_{0\leqslant k\leqslant n} \qquad \text{et} \qquad (E_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$$

- ⋆ Soit $A \in \mathbb{K}^I$ une primitive de la fonction a sur I. On sait alors que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle ci-dessus est :

$$\mathrm{Sol} = \left\{ x \in I \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-A(x)} \;\middle|\; C \in \mathbb{K} \right\} = \mathrm{Vect}\left(x \longmapsto \mathrm{e}^{-A(x)}\right)$$

La famille $\left(x \longmapsto \mathrm{e}^{-A(x)}\right)$ est génératrice de Sol et elle est libre car constituée d'un unique vecteur non nul ; il s'agit donc d'une base de Sol. Ainsi, Sol est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1, ce qu'il fallait démontrer.

- ⋆ On distingue deux cas suivant la valeur du discriminant Δ de l'équation caractéristique $x^2 + ax + b = 0$.
  - — Si $\Delta = 0$, alors en notant $\alpha \in \mathbb{C}$ la racine double de l'équation caractéristique, on sait que l'ensemble des solutions à valeurs complexes de l'équation différentielle est :

$$\mathrm{Sol} = \left\{ x \longmapsto (Ax+B)\,\mathrm{e}^{\alpha x} \;\middle|\; A, B \in \mathbb{C} \right\} = \mathrm{Vect}\left(x \longmapsto x\,\mathrm{e}^{\alpha x}, x \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha x}\right)$$

  La famille $\left(x \longmapsto x\,\mathrm{e}^{rx}, x \longmapsto \mathrm{e}^{rx}\right)$ est donc génératrice de Sol, et on vérifie qu'elle est libre. libre, d'où le résultat.
  - — Si $\Delta \neq 0$, alors en notant $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ les racines distinctes de l'équation caractéristique, on a :

$$\mathrm{Sol} = \left\{ x \longmapsto A\,\mathrm{e}^{\alpha x} + B\,\mathrm{e}^{\beta x} \;\middle|\; A, B \in \mathbb{C} \right\} = \mathrm{Vect}\left(x \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha x}, x \longmapsto \mathrm{e}^{\beta x}\right)$$

  La famille $\left(x \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha x}, x \longmapsto \mathrm{e}^{\beta x}\right)$ est donc génératrice de Sol, et on vérifie qu'elle est libre.
- ⋆ On procède comme au point précédent en utilisant le théorème donnant le terme général des suites récurrentes linéaires d'ordre deux. ■

6) Dimension d'un produit cartésien

Proposition (dimension d'un produit) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E \times F$ est de dimension finie égale à :

$$\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$$

Démonstration Comme E et F sont de dimension finie, on peut en trouver des bases $(e_1, \dots, e_n)$ et $(f_1, \dots, f_p)$ respectivement, où $n = \dim(E)$ et $p = \dim(F)$.

- ⋆ Soit $(x, y) \in E \times F$. Il existe $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p \in \mathbb{K}$ tels que :

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \qquad \text{et} \qquad y = \sum_{k=1}^{p} y_k f_k$$

Alors :

$$\begin{aligned}(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k, \sum_{k=1}^{p} y_k f_k \right) &= \left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k, 0_F \right) + \left(0_E, \sum_{k=1}^{p} y_k f_k \right) \qquad (*) \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k (e_k, 0_F) + \sum_{k=1}^{p} y_k (0_E, f_k)\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$E \times F \subset \mathrm{Vect}\big((e_1, 0_F), \dots, (e_n, 0_F), (0_E, f_1), \dots, (0_E, f_p)\big)$$

et comme l'inclusion réciproque est immédiate (structure d'espace vectoriel de $E \times F$), on a l'égalité :

$$E \times F = \mathrm{Vect}\big((e_1, 0_F), \dots, (e_n, 0_F), (0_E, f_1), \dots, (0_E, f_p)\big)$$

Ainsi, la famille $\mathscr{B} = \big((e_1, 0_F), \dots, (e_n, 0_F), (0_E, f_1), \dots, (0_E, f_p)\big)$ est une famille génératrice finie de $E \times F$; cet espace est donc de dimension finie.

- ⋆ Montrons que la famille $\mathscr{B}$ est libre. Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k (e_k, 0_F) + \sum_{k=1}^{p} y_k (0_E, f_k) = 0_{E \times F} = (0_E, 0_F)$$

En remontant les égalités $(*)$, on obtient $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k, \sum_{k=1}^{p} y_k f_k \right) = (0_E, 0_F)$, *i.e.* :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k e_k = 0_E \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{p} y_k f_k = 0_F$$

La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, donc cette famille est libre. Ainsi :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad x_k = 0$$

De la même manière :

$$\forall k \in [\![1, p]\!], \qquad y_k = 0$$

La famille $\mathscr{B}$ est donc libre. Finalement, $\mathscr{B}$ est une base de $E \times F$, ce qui implique que :

$$\dim(E \times F) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}) = n + p = \dim(E) + \dim(F)$$

Ceci achève la démonstration. ■

III – Sous-espaces et dimension

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Dimension d'un sous-espace vectoriel

Proposition (dimension d'un sous-espace vectoriel) Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors :

- ⋆ F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$;
- ⋆ de plus, $\dim(F) = \dim(E)$ si et seulement si $F = E$.

Démonstration ⋆ Il n'y a rien à démontrer si $F = \{0_E\}$. Supposons que $F \neq \{0_E\}$ et considérons l'ensemble :

$$\mathscr{E} = \big\{\mathrm{Card}(\mathscr{L}) \,\big|\, \mathscr{L} \text{ famille libre de vecteurs de } F\big\}$$

L'ensemble $\mathscr{E}$ est une partie de $\mathbb{N}$ qui est non vide (en considérant $x \in F \setminus \{0_E\}$, la famille (x) est libre et donc $1 \in \mathscr{E}$) et majoré par $\dim(E)$ (en effet, toute famille libre de vecteurs de F est une famille libre de E donc constituée d'au plus $\dim(E)$ vecteurs d'après le corollaire du début de chapitre). Ainsi, $\mathscr{E}$ possède un maximum noté m. On a $m \leqslant \dim(E)$ et il existe une famille libre $\mathscr{L}$ de vecteurs de F de cardinal m.

On va maintenant montrer que la famille $\mathscr{L}$ est génératrice de F. Soit $x \in F$. La famille $\mathscr{L}_x = (\mathscr{L}, x)$ n'est pas libre dans F (par définition de m et car $\mathrm{card}(\mathscr{L}_x) = m+1 > m$) donc x est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{L}$. On vient donc de montrer que $\mathscr{L}$ est une famille génératrice de F. Ainsi, $\mathscr{L}$ est une base de F. On peut donc conclure que F est de dimension finie et que $m = \dim(F) \leqslant \dim(E)$.

⋆ Si $E = F$, on a clairement $\dim(E) = \dim(F)$. Réciproquement, si $\dim(E) = \dim(F)$, alors la famille libre $\mathscr{L}$ précédente est de cardinal égal à $\dim(E)$ donc $\mathscr{L}$ est une base de E. Ainsi :

$$F = \mathrm{Vect}(\mathscr{L}) = E,$$

ce qu'il fallait démontrer. ∎

Exemple Dans $\mathbb{R}^3$, le sous-espace vectoriel :

$$\mathscr{P} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, x - y - z = 0\big\}$$

est de dimension finie égale à $2 \leqslant 3$.

Démonstration On obtient facilement l'égalité :

$$\mathscr{P} = \mathrm{Vect}\big((1,1,0),(1,0,1)\big)$$

et on vérifie ensuite que la famille $\big((1,1,0),(1,0,1)\big)$ est libre. ∎

2) Dimension d'une somme de deux sous-espaces

On rappelle que, si F et G sont deux sous-espaces vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors la somme $F + G$ est le sous-ensemble de E défini par :

$$\begin{aligned} F + G &= \big\{x \in E \,\big|\, \exists\,(x_F, x_G) \in F \times G,\ x = x_F + x_G\big\} \\ &= \big\{x_F + x_G \,\big|\, (x_F, x_G) \in F \times G\big\} \end{aligned}$$

On a démontré au chapitre 21 que $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Le résultat suivant nous donne une information sur la dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels d'un espace de dimension finie.

Proposition (formule de Grassmann) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors $F + G$ est de dimension finie égale à :

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Démonstration Comme $F, G, F \cap G$ et $F + G$ sont des sous-espaces vectoriels de E qui est de dimension finie, ces sous-espaces vectoriels sont de dimension finie. Considérons une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ de $F \cap G$.

- ⋆ D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter $\mathscr{B}$ en une base $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q)$ de F.
- ⋆ De même, on peut compléter $\mathscr{B}$ en une base $(e_1, \dots, e_p, g_1, \dots, g_r)$ de G.

La famille $\mathscr{C} = (e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q, g_1, \dots, g_r)$ est alors une famille génératrice de $F+G$. En effet, si $x \in F+G$, alors il existe $x_F \in F$ et $x_G \in G$ tels que $x = x_F + x_G$. Il existe ensuite $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q \in \mathbb{K}$ tels que :

$$x_F = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k + \sum_{k=1}^{q} \mu_k f_k$$

et il existe $\lambda'_1, \dots, \lambda'_p, \nu_1, \dots, \nu_r \in \mathbb{K}$ tels que :

$$x_G = \sum_{k=1}^{p} \lambda'_k e_k + \sum_{k=1}^{r} \nu_k g_k$$

On en déduit que :

$$x = \sum_{k=1}^{p} (\lambda_k + \lambda'_k) e_k + \sum_{k=1}^{q} \mu_k f_k + \sum_{k=1}^{r} \nu_k g_k$$

Ainsi, $F + G \subset \text{Vect}(\mathscr{C})$. L'inclusion réciproque est immédiate car $F + G$ est un espace vectoriel donc :

$$F + G = \text{Vect}(\mathscr{C})$$

La famille $\mathscr{C}$ est donc génératrice de $F + G$. Montrons maintenant que cette famille est libre. Soient :

$$\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q, \nu_1, \dots, \nu_r \in \mathbb{K}$$

tels que :

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k + \sum_{k=1}^{q} \mu_k f_k + \sum_{k=1}^{r} \nu_k g_k = 0_E \qquad (*)$$

Alors :

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{r} \nu_k g_k}_{\in G} = \underbrace{\underbrace{\sum_{k=1}^{p} (-\lambda_k) e_k}_{\in E \cap F} + \underbrace{\sum_{k=1}^{q} (-\mu_k) f_k}_{\in F}}_{\in F} \in F \cap G$$

Ainsi, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\sum_{k=1}^{r} \nu_k g_k = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k e_k \qquad i.e. \qquad \sum_{k=1}^{p} \alpha_k e_k + \sum_{k=1}^{r} (-\nu_k) g_k = 0_E$$

Comme la famille $(e_1, \dots, e_p, g_1, \dots, g_r)$ est libre, on a :

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_p = \nu_1 = \dots = \nu_r = 0$$

Il reste dans $(*)$:

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k + \sum_{k=1}^{q} \mu_k f_k = 0_E$$

et comme la famille $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q)$ est libre, il vient :

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_p = \mu_1 = \dots = \mu_q = 0$$

Finalement, la famille $\mathscr{C}$ est libre ; il s'agit donc d'une base de $F + G$. Par conséquent :

$$\dim(F+G) = \text{Card}(\mathscr{C}) = p + q + r = (p+q) + (p+r) - p = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G),$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

Exemple Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ deux plans vectoriels non confondus de $\mathbb{R}^3$. Alors $\mathscr{P} \cap \mathscr{Q}$ est une droite vectorielle.

Démonstration D'après la formule de Grassmann, on a :

$$\dim(\mathscr{P} \cap \mathscr{Q}) = \dim(\mathscr{P}) + \dim(\mathscr{Q}) - \dim(\mathscr{P} + \mathscr{Q}) = 4 - \dim(\mathscr{P} + \mathscr{Q})$$

Comme $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ ne sont pas confondus, on a $\mathscr{P} \subsetneq \mathscr{P} + \mathscr{Q}$. En effet :

- ⋆ pour tout $x \in \mathscr{P}$, on a $x = x + 0_E \in \mathscr{P} + \mathscr{Q}$ (car $0_E \in \mathscr{Q}$) donc $\mathscr{P} \subset \mathscr{P} + \mathscr{Q}$;
- ⋆ par l'absurde, supposons que l'on ait l'égalité $\mathscr{P} = \mathscr{P} + \mathscr{Q}$. Comme $\mathscr{Q} \subset \mathscr{P} + \mathscr{Q}$, on a $\mathscr{Q} \subset \mathscr{P}$ et comme $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont de même dimension finie (égale à 2), on a l'égalité $\mathscr{P} = \mathscr{Q}$, ce qui est absurde.

Par conséquent :

$$2 < \dim(\mathscr{P} + \mathscr{Q}) \leqslant 3$$

donc $\dim(\mathscr{P} + \mathscr{Q}) = 3$. On en déduit que $\dim(\mathscr{P} \cap \mathscr{Q}) = 1$, ce qui signifie que $\dim(\mathscr{P} \cap \mathscr{Q})$ est une droite vectorielle. ■

3) Supplémentaires en dimension finie

Soient F et G deux sous-espace vectoriels de E. On rappelle que F et G sont supplémentaires dans E, noté $E = F \oplus G$, si :

$$\forall x \in E,\ \exists!\,(x_F, x_G) \in F \times G,\ x = x_F + x_G$$

On a donc :

$$E = F \oplus G \iff \begin{cases} E = F + G \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}$$

Proposition (existence d'un supplémentaire en dimension finie) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E de dimension $p \in \mathbb{N}$. Alors :

- ⋆ F admet un supplémentaire dans E ;
- ⋆ tout supplémentaire de F dans E est de dimension $\dim(E) - p$.

Démonstration ⋆ Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F. D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter la compléter en une base $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E, où on a noté n la dimension de E. Posons alors $G = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ et vérifions que $E = F \oplus G$.

— L'inclusion $F + G \subset E$ est claire et, pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tel que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$ (puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E), *i.e.* :

$$x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k + \sum_{k=p+1}^{n} \lambda_k e_k \in F + G$$

Ainsi, $E = F + G$.

— L'inclusion $\{0_E\} \subset F + G$ est immédiate (car F et G sont des sous-espaces vectoriels de E) et si $x \in F \cap G$, alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que :

$$x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k \qquad \text{et} \qquad x = \sum_{k=p+1}^{n} \lambda_k e_k$$

Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k + \sum_{k=p+1}^{n} (-\lambda_k) e_k = 0_E$$

Or la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre donc :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad \lambda_k = 0$$

Ainsi, $x = 0_E$ et donc $F \cap G \subset \{0_E\}$. On a bien l'égalité $F \cap G = \{0_E\}$.

Finalement, $E = F \oplus G$.

★ Soit G un supplémentaire de F dans E. D'après la formule de Grassmann, on a :

$$\dim(E) = \dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(\underbrace{F \cap G}_{=\{0_E\}}) = \dim(F) + \dim(G),$$

d'où le résultat. ■

Remarque : la base de $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ construite dans la démonstration est appelée une *base adaptée* à la décomposition en somme directe $E = F \oplus G$.

Exemple ★ Dans $\mathbb{R}^3$, le supplémentaire d'un plan vectoriel est une droite vectorielle.

★ Dans $\mathbb{R}^3$, le supplémentaire d'une droite vectorielle est un plan vectoriel.

Le résultat suivant est utile en pratique pour montrer que des sous-espaces sont supplémentaires en dimension finie.

Proposition (caractérisation de la supplémentarité en dimension finie) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Alors :

$$E = F \oplus G \iff \begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \end{cases}$$

Démonstration $\boxed{\Longrightarrow}$ Si $E = F \oplus G$, on sait que F et G sont en somme directe et la relation entre les dimensions a été démontrée à la question précédente.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Réciproquement, supposons que $F \cap G = \{0_E\}$ et que $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$. Il s'agit de montrer que $E = F + G$. Or, d'après la formule de Grassmann,

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = \dim(E) - \dim(\{0_E\}) = \dim(E)$$

et $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E donc $E = F + G$. Ainsi, $E = F \oplus G$. ■

Exemple Dans $\mathbb{R}^3$, les sous-espaces vectoriels :

$$F = \mathrm{Vect}\big((1,0,0)\big) \qquad \text{et} \qquad G = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, x - y - z = 0\big\}$$

sont supplémentaires.

IV – Rang d'une famille de vecteurs

1) Définition

Définition (rang d'une famille finie de vecteurs) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{F}$ une famille finie de vecteurs de E. On appelle *rang de* $\mathscr{F}$, la dimension de $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$. On le note $\mathrm{rg}(\mathscr{F})$. Ainsi :

$$\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \dim\big(\mathrm{Vect}(\mathscr{F})\big)$$

Exemple ★ Dans $\mathbb{R}^2$, on a $\mathrm{rg}\big((0,1),(0,-1)\big) = 1$ car :

$$\mathrm{Vect}\big((0,1),(0,-1)\big) = \mathrm{Vect}\big((0,1)\big)$$

est de dimension 1.

★ Dans $\mathbb{R}[X]$, on a $\mathrm{rg}(X, X^2+1) = 2$ car la famille (X, X^2+1) est libre.

2) Propriétés

Proposition (lien avec les familles libres/génératrices) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{F} = (e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de E (où $p \in \mathbb{N}^*$). Alors :

- ⋆ $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) \leqslant \min(n, p)$;
- ⋆ $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = p \iff \mathscr{F}$ est libre ;
- ⋆ $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = n \iff \mathscr{F}$ est une famille génératrice de E ;
- ⋆ $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = n = p \iff \mathscr{F}$ est une base de E.

Démonstration Posons $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.

⋆ Comme $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ est un sous-espace vectoriel de E, on a :

$$\dim(\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)) \leqslant \dim(E) \qquad i.e. \qquad \mathrm{rg}(\mathscr{F}) \leqslant n$$

Par ailleurs, on peut extraire de $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ donc :

$$\dim(\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)) \leqslant p \qquad i.e. \qquad \mathrm{rg}(\mathscr{F}) \leqslant p$$

Finalement, $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) \leqslant \min(n, p)$.

⋆ Si $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = p$, alors :

$$\dim(F) = p = \mathrm{Card}\big((e_1, \dots, e_p)\big)$$

La famille génératrice $\mathscr{F} = (e_1, \dots, e_p)$ de F est donc une base de F. En particulier, elle est libre. Réciproquement, si $(e_1, \dots, e_p)$ est libre, alors cette famille constitue une base de F, et donc :

$$\dim(F) = \mathrm{Card}\big((e_1, \dots, e_p)\big) = p$$

⋆ Comme $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ est un sous-espace vectoriel de E, on a :

$$\mathrm{Vect}(\mathscr{F}) = E \iff \dim(\mathrm{Vect}(\mathscr{F})) = \dim(E) \iff \mathrm{rg}(\mathscr{F}) = n$$

⋆ Le dernier point est une conséquence immédiate des deux précédents. ■